

8 Matematică

CORINT
LOGISTIC

MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII

Radu Gologan
Elisabeta Ana Naghi
Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța



Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară

aprobată prin Ordinul ministrului educației nr. 3393 din 28.02.2017,

119 – număr unic de telefon la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor,

116.111 – număr de telefon de asistență pentru copii, în conformitate cu Legea nr. 272/2004 privind protecția și promovarea drepturilor copilului, republicată, cu modificările și completările ulterioare.

Matematică

8

CORINT
LOGISTIC

**MINISTERUL EDUCAȚIEI
ȘI CERCETĂRII**

Radu Gologan
Elisabeta Ana Naghi
Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța



Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin ordinul de ministru nr. 6400/22.09.2025.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2025–2026.

Inspectoratul școlar

Școala / Colegiul / Liceul

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: **nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.**

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Date despre autori:

RADU GOLOGAN (coordonator) – profesor universitar la Universitatea Politehnica din București – Facultatea de Automatică și Calculatoare. Este președintele Societății de Științe Matematice din România și coordonatorul olimpiadelor de matematică. Medaliat la olimpiade internaționale de matematică, a absolvit Facultatea de Matematică din București cu diplomă de merit. A obținut titlul de doctor în matematică sub îndrumarea academicianului Marius Iosifescu. A publicat peste 40 de lucrări științifice, dar și tratate, manuale, culegeri și articole de matematică școlară. Este, de asemenea, o prezență vie în mass-media în probleme legate de soarta școlii românești.

ELISABETA ANA NAGHI – inspector școlar pentru disciplina Matematică și Astronomie în cadrul Ministerului Educației și Cercetării, profesor de matematică cu gradul didactic I, titular al Colegiului Economic „P. Cozma” din Oradea, județul Bihor. Formator național pentru disciplina Matematică în cadrul diverselor proiecte/ programe, membru în grupul de lucru pentru elaborarea programelor școlare, membru al Comitetului Național Român de Astronomie, persoană resursă pentru Romania Space Agency (ROSA). Experiență de peste 38 de ani în învățământ: la catedră (metodico-științifică), în inspectorat, în minister, ca președinte executiv la olimpiade naționale de matematică și alte specialități, participare în grupurile de lucru pentru elaborare de proiecte de programe școlare pentru curriculum obligatoriu și pentru curriculum la decizia școlii, elaborare itemi pentru examenele naționale, evaluator în diverse comisii de olimpiade și concursuri școlare (matematică, astronomie, interculturalitate etc.).

CAMELIA ELENA NEȚA – profesor gradul didactic I, Școala Gimnazială nr. 2 din Piatra Neamț, inspector școlar la IȘJ Neamț (2007-2020), membru în diverse grupuri de lucru la nivel județean și național, formator în proiecte de formare continuă a profesorilor de matematică, lector la Centrul Județean de Excelență Neamț, autor de manuale și culegeri.

CIPRIAN CONSTANTIN NEȚA – profesor gradul didactic I, metodist, Școala Gimnazială nr. 2 Piatra Neamț; membru în diverse grupuri de lucru la nivel județean și național, formator în proiecte de formare continuă a profesorilor de matematică, lector la Centrul Județean de Excelență Neamț, autor de manuale și culegeri.

Referenți științifici:

Prof. univ. **MIRCEA OLTEANU**, director al Departamentului de Metode și Modele Matematice din Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA București

Prof. gr. I **NARCIS GABRIEL VRÎNCEANU**, Șef Secviciu Dezvoltare Curriculum în cadrul Centrului Național de Politici și Evaluare în Educație, Ministerul Educației și Cercetării

Redactare: **Corina Toader**

Tehnoredactare computerizată: **Dan Crăciun**

Design copertă: **Dan Mihalache**

Surse foto: **Shutterstock**

Varianta digitală: **Editsoft & Services**

ISBN: 978-630-6679-03-4

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii Corint Logistic.

Pentru comenzi și informații, contactați:

GRUPUL EDITORIAL CORINT

Departamentul de Vânzări

Str. Mihai Eminescu nr. 54A, sector 1, București,
cod poștal 010517. Tel./Fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20

Depozit

Str. Gării nr. 11, Mogoșoaia, jud. Ilfov

Tel.: 0758.053.416

E-mail: vanzari@edituracorint.ro

Magazin virtual: www.edituracorint.ro

Cuprins

Competențe generale și competențe specifice	4
Cuvânt-înainte	5
Ghid de utilizare a manualului	6

RECAPITULARE ÎNIALĂ

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

• Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	12
• Intervale numerice. Reprezentare pe axa numerelor.....	15
• Operații cu intervale numerice: intersecția și reuniunea.....	21
• Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	24
Recapitulare	31
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare	33

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

• Operații cu numere reale reprezentate prin litere	36
• Formule de calcul prescurtat	40
• Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$	43
Recapitulare	47
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ...	48
• Frații algebrice. Operații cu fracții algebrice ...	50
• Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice	53
• Înmulțirea și împărțirea fracțiilor algebrice ..	54
• Ridicarea la putere	54
• Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	58
Recapitulare	62
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ...	63

FUNCȚII

• Funcții definite pe mulțimi finite	66
• Graficul unei funcții	68
• Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $D \subset \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$	73
• Elemente de statistică. Indicatorii tendinței centrale	
• Frecvența.....	83
• Media caracteristicii	85
• Mediana caracteristicii cantitative	86
• Modul sau dominanta caracteristicii	87
• Amplitudinea caracteristicii cantitative	87
Recapitulare	92
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ...	93

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

• Puncte, drepte, plane	96
• Axiome despre puncte/drepte/plan	97
• Determinările planului	99
• Convenții de reprezentare a figurilor în spațiu	100
• Corpuri geometrice	104
• Piramida	105
• Prisma	111
• Cilindru circular drept. Con circular drept ...	118
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ...	120
• Paralelism	
• Drepte paralele. Unghiul a două drepte.....	122
• Dreaptă paralelă cu un plan. Plane paralele. .	126
• Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate.....	133
• Secțiuni în prismă/cilindru	133
• Secțiuni în piramidă/con	134
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ...	138
• Perpendicularitate	
• Dreaptă perpendiculară pe un plan	140
• Aplicații	143
• Plane perpendiculare. Aplicații	148
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ...	151
• Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan	152
• Unghiul dintre o dreaptă și un plan	155
• Unghi diedru, unghi plan corespunzător unghiului diedru. Unghiul a două plane	158
• Teorema celor trei perpendiculare.....	162
Recapitulare	166
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ..	167

ARI ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

• Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate ..	170
• Arie și volume ale unor corpuri geometrice	
• Aria și volumul cubului, ale paralelipipedului dreptunghic și ale prisme drepte	175
• Aria și volumul piramidei și ale trunchiului de piramidă regulată	181
• Aria și volumul cilindrului circular drept, ale conului circular drept și ale trunchiului de con circular drept	188
• Aria și volumul sferei	194
Recapitulare	196
Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare ..	197
RECAPITULARE DINTR-O PRIVIRE	199
RECAPITULARE FINALĂ	203
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	207

Competențe generale și competențe specifice

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- 1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- 1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
- 1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- 1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- 2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- 2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
- 2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- 2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$
- 3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- 3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
- 3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- 3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a înfăptuirilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- 4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- 4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
- 4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- 4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- 5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- 5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
- 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- 5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
- 6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
- 6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
- 6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
- 6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

Cuvânt-înainte

Manualul de matematică pentru voi, elevii clasei a VIII-a, este elaborat de un colectiv de profesori de excepție, cu îndelungată experiență la catedră, în special la clasele de gimnaziu. Echipa formată este una care s-a sudat și consolidat în timp, prin multiple colaborări anterioare.

Ceea ce s-a dorit prin noul curriculum gimnazial la disciplina matematică este ca învățarea să permită oricărui elev un acces la cunoaștere echilibrată, referindu-ne la un bagaj de noțiuni teoretice necesare unei culturi generale și de specialitate, precum și de noțiuni factuale și procedurale prin care elevul să-și formeze și să-și dezvolte deprinderi și atitudini utile pentru viață și pentru o viitoare profesie. Metodele – prin care accesul la cunoaștere este asigurat – au în vedere participarea activă a elevului, fie prin sarcini de lucru independente, fie în colaborare, valorizând experiența reală și intuiția, întărind învățarea prin introducerea de aplicații practice și prin reducerea formalismului matematic la strictul necesar.

Pentru a transpune viziunea acestor programe în realitate este necesar ca manualele să fie elaborate atât din perspectiva programei, cât și prin raportare la caracteristicile noilor generații de elevi, generații pentru care a reduce manualul și predarea doar la funcția de transfer informațional, chiar și perfect structurat, nu mai este suficient.

Pornind de la aceste considerații, în elaborarea manualului s-a avut în vedere nevoia permanentă de actualizare, cu ancoră multiple în experiențele de învățare anterioare ale elevilor, lansarea unor provocări către elevi implicând descoperirea și participarea la construcția noilor domenii de cunoaștere matematică, precum și includerea de contexte prin care elevul să se autoevalueze.

Astfel, consider că manualul de față satisface într-un totuș exigențele pe care trebuie să le îndeplinească o resursă pentru învățare, fie că este utilizată în cadrul orelor de clasă, fie în cadrul unor activități de lucru independent, acordându-se o atenție deosebită nevoii de abordări diferențiate.

Manualul este organizat pe domenii și unități de învățare. În debutul fiecărei lecții există câte un preambul recapitulativ, urmat de observații, întrebări, zone de reflecție, care să îl facă pe elev să descopere parțial noțiunile teoretice ce urmează a fi introduse.

Zonele de exersare și problemele propuse încheie fiecare lecție și fiecare unitate de învățare. Sarcinile de lucru sunt gradual prezentate, în funcție de dificultate și de gradul de aplicabilitate în realitate.

Remarc de asemenea prezentarea grafică de înalt standard. Este un fapt dovedit că matematica școlară are nevoie de texte matematice relevante și atrăgătoare.

Sunt convins că utilizarea curentă a acestui manual va produce o creștere importantă a calității educației matematice în România.

Este bine-cunoscut că orice manual, oricât de bun ar fi, nu va produce efectele scontate dacă utilizarea sa nu se face sub îndrumarea unui mentor de calitate. În acest sens, manualul este o poartă spre învățare a cărei cheie este profesorul. Dragi elevi, vă invităm să faceți o echipă performantă cu profesorul vostru de matematică și să priviți manualul de față ca pe o colecție de experiențe prin care cunoașterea voastră va fi consolidată. Să nu uităm că la finalul clasei a VIII-a sunteți în fața unui moment hotărâtor pentru viitorul vostru și că valoarea unui drum nu se măsoară nu numai prin lungime, ci și prin efortul depus.

Celor care deschid paginile acestui manual le doresc să vadă în matematică dincolo de prejudecăți, căci în orice este matematică!

Ghid de utilizare a manualului

Manualul cuprinde variantele tipărită și digitală



+



Simboluri folosite
în varianta digitală



Rezolvă



Privește



Vizionează

Manualul este structurat în două părți: **ALGEBRĂ**, ce conține unitățile de învățare **Intervale de numere reale**, **Inecuații în $\mathbb{R}$** , **Calcul algebric în $\mathbb{R}$** , **Funcții**, respectiv **GEOMETRIE**, ce conține unitățile de învățare **Elemente ale geometriei în spațiu**, **Arii și volume ale unor corpuri geometrice**. Fiecare unitate de învățare conține lecții care păstrează, în general, titlurile existente la „Conținuturi” în programa școlară. O lecție se poate întinde pe una sau mai multe ore, dând posibilitatea profesorului să-și adapteze planificarea materiei în funcție de posibilitățile psiho-intelectuale ale elevilor.

Conținuturile noi, specifice programei școlare, sunt prezentate în lecții la rubricile **Definiție**, **Teoremă** și **Rețineți!**. Acestea sunt precedate de rubrica **Ne amintim!** și de probleme rezolvate care sugerează introducerea noțiunilor noi. Se atrage atenția asupra unor noțiuni sau situații prin rubricile **Observații** și **Atenție!**.

În cazul în care conținutul ce trebuie prezentat se poate intui sau întări prin prezentarea și analiza unor exemple sau a unor situații din viața de zi cu zi, acestea sunt propuse și comentate în rubricile **Exemple**, **Reflectăm!** și **Descoperiți!**. Prin rubrica **Exersăm împreună!** sunt prezentate exerciții rezolvate, comentate, exemple și contraexemple, iar pentru a înțelege și mai bine noțiunile prezentate, elevii sunt provocați să coopereze în rezolvarea unor sarcini de lucru cât mai aplicative prin intermediul rubricilor **Activitate practică / pe grupe / în echipe / în cooperare**.

Zonele de exersare și probleme propuse, marcate prin rubrica **Exersați** conțin, în general, probleme asemănătoare cu cele rezolvate, prezentate gradual. Dacă nu există exemple rezolvate pentru unele tipuri de probleme propuse, atunci acestea au prezentate la finalul cărții rezolvarea completă sau indicații pentru rezolvare. Un set de lecții cu conținut legat noțional se finalizează cu un set de probleme propuse și **Teste de (auto)evaluare**, urmate de **Activități de remediere/consolidare/aprofundare**. Testele sunt grilă sau cu itemi deschiși, au la finalul cărții răspunsurile, astfel încât elevii să poată verifica corectitudinea rezultatelor obținute, și au punctaj pentru fiecare problemă pentru a fi posibilă și autoevaluarea.

Rubrica **Știați că?** prezintă elevilor informații interesante referitoare la noțiunile învățate, iar prin rubricile **Proiect** și **Investigație** aceștia sunt invitați să documenteze diferite teme, astfel încât să fie puși în situația de a descoperi latura aplicativă a matematicii și frumusețea ei.



Recapitulare inițială

Algebră

1. Scrieți numărul 8 sub diferite forme sau ca rezultat al operațiilor învățate.

Exemplu: $3 = 0 + 3 = 4 - 1 = -(-3) = 3, 0 = 3 \cdot 1 = 6 : 2 = \frac{3}{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \sqrt{9}$.

2. Dacă A este mulțimea cifrelor impare în scrierea în baza 10, precizați:

- a) care sunt elementele mulțimii A ;
- b) cât este $\text{card}A$ (numărul elementelor mulțimii A);
- c) care este cel mai mic număr ce aparține mulțimii (*minimul*);
- d) care este cel mai mare număr ce aparține mulțimii (*maximul*).

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții: $-2 \in \mathbb{Z}$; $-4 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{9} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $-\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $15 \in \mathbb{N}$; $5,1(3) \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{4} - \sqrt{1} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $1, (8) \in \mathbb{R}$; $\frac{21}{3} \in \mathbb{Z}$; $\frac{3}{4} \notin \mathbb{R}$; $-\sqrt{16} \notin \mathbb{Z}$; $\{3\} \in \{1; 2; 3; 4\}$; $\emptyset \in \{0; 1; 3\}$; $3 \in \{-3; 0; 5\}$; $\{-1; 1\} \subset \{-3; -1; 0; 1; 3\}$; $\{0\} \subset \emptyset$; $\{2; 3\} \subset \{0; 1; 2; 3\}$.

4. Dați exemplu de:

- a) două numere naturale care au suma egală cu 15;
- b) două numere întregi care au suma egală cu -17;
- c) două numere din mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ care au suma egală cu 7;
- d) două numere raționale care au suma egală cu -2;
- e) două numere reale care au suma egală cu -5;
- f) două numere iraționale care au suma egală cu 8.

5. Dați exemplu de:

- a) două numere naturale care au produsul egal cu 15;
- b) două numere întregi care au produsul egal cu -17;
- c) două numere din mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ care au produsul egal cu 6;
- d) două numere raționale care au produsul egal cu -2;
- e) două numere reale care au produsul egal cu -5;
- f) două numere iraționale care au produsul egal cu 8.

6. Scrieți două numere raționale și două numere iraționale cuprinse între:

- a) 7,2 și 7,3; b) -11,5 și -11,4;
- c) $\sqrt{16}$ și $\sqrt{17}$; d) $-\sqrt{8}$ și $-\sqrt{7}$.

7. Comparați numerele: a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{2}{5}$ și $-\frac{2}{6}$;
c) 2,(15) și 2,1(5); d) -7,4 și -7,(4);
e) 11,2 și -11,3; f) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; g) $2\sqrt{3} - 3$ și $\sqrt{3} - 1$.

8. Aproximați prin lipsă la zecimi numerele:

- a) 2,71; b) -4,18; c) 0,36; d) -5,82.

9. Aproximați prin adaos la sutimi numerele:

- a) 0,274; b) -4,108; c) 10,3516; d) -5,182.

10. $x = |2 - 5| - |-7| + |1 - 4|$, $y = |2, 5| - |-4, 2| - |2, 7|$ și $z = |2, 4| - |-0, 8| - |1, 2|$. Calculați $2x - 3y + 2z$, amintindu-vă definiția și proprietățile modului unui număr real.

11. Determinați elementele x pentru care:

- a) $\{-2; 0; 2\} = \{x; -2; 2\}$; b) $\{0; 5; x; 8\} \subset \{0; 3; 5; 7; 8\}$.
Luați în considerare toate cazurile posibile!

12. Fie mulțimea $A = \{-4, 123; 8; -2; \frac{9}{3}; -\sqrt{3}; \sqrt{7}; 1; -1, (5); 0; -5, 125; \frac{41}{8}\}$.

- a) Ordonăți crescător elementele mulțimii A .
- b) Aproximați prin lipsă la zecimi cel mai mic element al mulțimii A .
- c) Rotunjiți la întregi cel mai mare element al mulțimii A .
- d) Determinați valoarea sumei dintre inversul celui mai mic element din A și opusul celui mai mare element din A .
- e) Determinați: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

13. Știind că $A = \{\sqrt{3}; 1, 5(3); -2, 5; -3, 1(6); 0; \pi; -3\sqrt{2}; 2^3; -\sqrt{3}; -3^2; \sqrt{6\frac{1}{4}}; (-\frac{2}{3})^{-2}; \sqrt{(\frac{1}{4})^{-4}}\}$, calculați $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

14. Pentru $A = \left\{ -3^2; (-3)^2; (-2)^{-2}; (-1)^3; (-1)^4; \left(\frac{2}{5}\right)^2; -\frac{4}{9}; 0; 5; \sqrt{4}; 2,3; \frac{1}{3}; 0,5; \sqrt{27}; -\sqrt{6} \right\}$, scrieți:

- submulțimea numerelor naturale;
- submulțimea numerelor întregi pozitive;
- submulțimea numerelor întregi;
- submulțimea numerelor raționale;
- submulțimea numerelor iraționale.

15. Ordonați crescător numerele $3,(25); 3,2(5); 3,25$. Transformați-le apoi în fracții ordinare ireductibile. Care ar fi avantajele aducerii la formă ireductibilă a unei fracții ordinare? Comparați răspunsurile la nivelul clasei.

16. Fie numerele: $a = 5,08$ și $b = -6,72$. Determinați media aritmetică și media geometrică a modulelor numerelor date.

17. Calculați: $\sqrt{81}; \sqrt{100}; \sqrt{484}; \sqrt{576}; \sqrt{14400}; \sqrt{\frac{4}{25}}; \sqrt{\frac{16}{225}}; \sqrt{\frac{121}{289}}; \sqrt{0,0064}; \sqrt{0,81}; \sqrt{3^{14}}; \sqrt{7^{10} \cdot 13^{12}}; \sqrt{4^2 \cdot 7^4 \cdot 11^6}; \sqrt{25^2 - 20^2}; \sqrt{4^2 + 3^2}$.

18. Calculați: a) $\sqrt{\frac{625}{81}}; \sqrt{\frac{25}{9}} + 3\frac{1}{3}; \sqrt{1,7} - \sqrt{36}; \sqrt{6^4}$;

b) $\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}} + \sqrt{2,7} + \sqrt{1,96} - 8,0(6)$;

c) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$;

e) $-\sqrt{2} + \sqrt{72} + \sqrt{128} - \sqrt{50} - 8\sqrt{2}$;

f) $\left(\frac{5}{\sqrt{28}} - \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{3}{2\sqrt{7}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7}}$;

g) $\left(\frac{14}{3\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{45}}{15} + \frac{12}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{15\sqrt{5}}{47}$;

h) $\left[\frac{3}{2} + \left(0,2 + \frac{1}{15}\right) : 0,(3) - 0,3\right] : 1,9(6)$;

i) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{6}$;

j) $2\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{6}$;

k) $\sqrt{18} \cdot (3\sqrt{50} + \sqrt{162}) - \sqrt{12} \cdot (\sqrt{432} - \sqrt{192})$;

l) $\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{0,0016} + (-2)^3$;

m) $\frac{\sqrt{12} - 3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{6} - 12}{4\sqrt{2}} + \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5\sqrt{3}} - \frac{16\sqrt{3} - 63\sqrt{2}}{20\sqrt{6}}$;

n) $3\frac{1}{2} + 0,75 + \left(0,1 + \frac{1}{2} - 0,5 + 0,9\right) : 10$;

o) $\frac{22}{15} \cdot \left\{ \frac{15}{11} \cdot [1,4(6) - 2,(8) + 1,6] - 0,1(6) \right\} : 0,(1)$;

p) $\left\{ \left[\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{8}{5} \right]^2 - [0,25^{-1} - 0,1(6)^{-1}]^2 \right\}^2$;

q) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - 1\right)^{-2} - \left(\frac{5}{11}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{14}{25}\right)^{-1}$;

r) $[3,5 - 1,(3)^{-1} - \sqrt{2}^{-2}]^{-1} : \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-2}$.

19. Rezolvați în mulțimea numerelor raționale:

a) $x + 2 = 0$; b) $3 - x = 5$; c) $4x - 2 = 7$;

d) $\frac{1}{3}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$; e) $4x - 1 = 2(4 - x)$; f) $x\sqrt{2} + 1 = 0$;

g) $5(x - 2) = 3(2x + 1) - (x + 13)$; h) $2x + 1 = 2(x + 2)$.

20. Rezolvați ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $2x - 3(4x - 1) = 13$; b) $3(4x - 3) + 5 = 6(2x - 1)$;

c) $5[2 - 3(3x - 2)] = 2 - 7x$; d) $\frac{x+1}{2} - \frac{2x+3}{5} = \frac{3x-3}{10}$;

e) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x - \frac{8}{9}$; f) $\frac{4x-3}{2x+1} = \frac{10x-3}{5x+7}$;

g) $2\sqrt{2}x - 3 = 4\sqrt{2}x + 9$;

h) $2\sqrt{3}x - 5 = \sqrt{3}(\sqrt{2} - x) - \sqrt{6} + 4$;

i) $12 - 3(3x - 2) = 4x - 5(x - 2)$;

j) $3\sqrt{3} \cdot (2x - 3) + 3x = x\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 3)$;

k) $3[2x - 5(x + 8)] = 4 - 7(4 - x)$;

l) $2\overline{x1} + 2\overline{x2} + 2\overline{x3} + \dots + 2\overline{x9} = 2025$.

21. Scrieți relațiile de tip ecuație care corespund fiecăreia dintre afirmațiile din tabel, după model:

Afirmație							Relația corespunzătoare
Abscisele punctelor de pe axa numerelor aflate la distanța...	2,5	...față de punctul de abscisă...	2	... sunt ...	4,5	și	$ x - 2 = 2,5$
	2		2		4		
			1		6		
	3		0				
	4				-1		 sau
					1		5
							$ x + 1 = 3$

22. Determinați un număr pentru care suma sa cu jumătatea lui, cu treimea lui și cu sfertul lui are ca rezultat 100.

23. Cei 6 elevi premianți reprezintă 20% din numărul elevilor clasei. Care este numărul elevilor clasei?

24. Suma a șapte numere întregi pare consecutive este 0. Determinați care este cel mai mare număr dintre acestea.

25. Rezolvați ecuațiile în mulțimea numerelor reale:
 $|2x - 2| = 6$; $|3x - 1| + |5 - 4| - |-2| = 6$; $|5 - x| = 0$;
 $|6 + 2x| = |-5| - |6|$; $\frac{|x+1|}{2} - \frac{2|x+1|}{3} = -1$.

26. Găsiți perechile $(x; y)$ de numere întregi care verifică:

- a) $|x| + |y| = 1$; b) $|x + 1| + |y| = 2$;
 c) $|x - 3| + |y + 2| = 0$; d) $|3 - x| + |y - 3| = -2$.

27. Care dintre perechile $(1; 1)$; $(2; 1)$; $(-1; -1)$; $(1; 2)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$?

28. Determinați numărul real a pentru care perechea $(3, a)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -3x + 12y = -9 \end{cases}$.

29. Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ prin metoda reducerii, apoi prin metoda substituției.

30. Rezolvați sistemele de 2 ecuații cu 2 necunoscute:

- a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 4(x + y) = 2 \\ 2(x - y) - 4y = 16 \end{cases}$;
 c) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3(x + 2) + 4y = -1 \\ 2x - 4(y + 2) = -6 \end{cases}$;

$$e) \begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 5 \\ x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 0 \end{cases}; \quad f) \begin{cases} \frac{7x - y + 1}{3x + y} = \frac{11}{10} \\ 6x + y = 16 \end{cases};$$

$$g) \begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2 \end{cases}; \quad h) \begin{cases} \frac{x}{x+3} = \frac{y-1}{y} \\ \frac{x}{x-2} = \frac{y+1}{y} \end{cases};$$

$$i) \begin{cases} \frac{2}{x+y-3} + \frac{3}{x-y+1} = -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{x+y-3} + \frac{6}{x-y+1} = -\frac{13}{3} \end{cases}; \quad j) \begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ |x| - |y| = 1 \end{cases}.$$

31. a) Justificați de ce sistemul $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ 8x - 2y = 5 \end{cases}$ nu are soluție. Ce reprezintă în acest caz mulțimea soluțiilor?

b) Justificați de ce sistemul $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x - 6y = 10 \end{cases}$ are o infinitate de soluții. Specificați mulțimea soluțiilor.

32. Trei cămăși și două costume costă 908,50 lei, iar cinci cămăși și trei costume costă 1239,20 lei. Cât costă o cămașă și cât costă un costum?

33. La un concurs de matematică se primesc 6 puncte pentru un răspuns corect și se scad 3 puncte pentru un răspuns greșit. După ce a răspuns la 30 de întrebări, Cătălin are 135 de puncte. Câte răspunsuri corecte a dat?

34. Raportul dintre lungimea și lățimea unui dreptunghi este $\frac{7}{5}$. Știind că perimetrul dreptunghiului este 240 cm, determinați dimensiunile acestuia.

35. Într-o curte sunt 45 de rațe și porci, care au în total 120 de picioare. Câte rațe și câți porci sunt?

Geometrie

1. În interiorul pătratului $ABCD$, cu $AB = 18$ cm, se consideră punctul M astfel încât triunghiul CDM să fie echilateral.

- Determinați perimetrul triunghiului CDM .
- Calculați perimetrul poligonului concav $ABCMD$ și aria lui.
- Calculați măsura unghiului AMB .
- Demonstrați că triunghiul MAB este isoscel și calculați aria lui.

2. În triunghiul dreptunghic ABC , $\angle A = 90^\circ$, punctul M este proiecția punctului A pe ipotenuza BC . Știind

că $AM = 8$ cm, iar proiecțiile catetelor pe ipotenuză sunt proporționale cu numerele 2 și 8, calculați:

- aria și perimetrul triunghiului ABC ;
- sinusurile unghiurilor ascuțite ale $\triangle ABC$.
- Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Dreapta AM intersectează a doua oară cercul în punctul E și D este punctul diametral opus lui A . Demonstrați că:

- punctul B este mijlocul arcului mic de cerc $\widehat{AE}$;
- patrulaterul $BEDC$ este trapez isoscel.

3. Triunghiul ABC are laturile $AB = 15$ cm, $BC = 12$ cm și $AC = 16$ cm. Pe latura AB se alege punctul M astfel încât $AM = \frac{2}{3}AB$ și se construiește $\angle BMN = \angle ACB$, $N \in BC$.

a. Realizați desenul.

b. Demonstrați că $\triangle ABC \sim \triangle NBM$ și calculați raportul ariilor celor două triunghiuri.

c. Calculați lungimile segmentelor MN și BN .

4. Considerăm triunghiurile ABC și DEF astfel încât $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Știind că $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm, $EF = 15$ cm și că raportul de asemănare al celor două triunghiuri este egal cu 0,5, calculați:

a. lungimile laturilor DE și DF ;

b. modulul diferenței dintre perimetrele celor două triunghiuri;

c. raportul ariilor celor două triunghiuri.

5. O grădină în formă de paralelogram $ABCD$ are dimensiunile $AB = 16$ m, $AD = 8\sqrt{3}$ m, $\angle A = 60^\circ$. Punctul E aparține laturii AD , astfel încât $BE \perp AD$.

a. Calculați BE și aria grădinii.

b. Arătați că sunt suficienți 60 m de gard pentru a înconjura grădina.

c. Un iepuraș intră alergând în grădină, prin punctul E , și străbate grădina, în linie dreaptă, ieșind prin

punctul C . Calculați distanța parcursă de iepuraș, aproximând rezultatul la număr întreg de metri.

6. În trapezul dreptunghic $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, paralela construită prin punctul O de intersecție al diagonalelor intersectează latura AB în punctul E . Demonstrați că: a. $\triangle AED \sim \triangle BEC$;

b. semidreapta EO este bisectoarea unghiului DEC .

7. În triunghiul dreptunghic ABC , cu $\angle A = 90^\circ$ și cateta mai mică $AC = 4\sqrt{3}$ cm, unghiul dintre înălțimea AD și mediana AM are măsura de 30° . Calculați:

a. lungimile segmentelor AD , AM , DC și DB ;

b. aria și perimetrul triunghiului ABC ;

c. raportul dintre ariile triunghiurilor ADB și ADC ;

d. ce procent din aria triunghiului ABC reprezintă aria triunghiului ADC ;

e. lungimea și aria cercului circumscris triunghiului ABC .

8. Considerăm trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 10$ cm, precum și O punctul de intersecție al diagonalelor. În exteriorul trapezului construim triunghiurile echilaterale ABE și CDF .

a. Demonstrați că AO și OC sunt proporționale cu AE și CF .

b. Demonstrați că $\triangle AOE \sim \triangle COF$.

c. Demonstrați că punctele E , O și F sunt coliniare.

Test inițial

PARTEA I - Pe foaie scrieți numai rezultatele (30 p)

1. Aproximarea prin lipsă la sutimi a numărului $\sqrt{9,734}$ este numărul

2. Cardinalul mulțimii $\{-\sqrt{23}; -\pi; -1, (8); -\sqrt{1\frac{11}{25}}; 0; \sqrt{5}; \sqrt{81}\} \cap \mathbb{Q}$ este egal cu

3. Rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ + 2 \cos 60^\circ$ este egal cu

4. Lungimea cercului $C(O, 2\sqrt{3}$ cm) este egală cu ... cm.

5. Rezultatul calculului $\left(\frac{3}{32}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4} - 2^{-4}\right)$ este egal cu

6. Apotema pătratului cu diagonala de $20\sqrt{2}$ cm este egală cu cm.

PARTEA a II-a - Pentru următoarele probleme se cer rezolvări complete (30 p)

1. a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\frac{x-1,5}{3} - \frac{5-x}{2} = \frac{x-5}{4}$. (10 p)

b) Dacă micșorăm 25% din prețul unei fuste cu 12 lei, acesta devine 68 de lei. Determinați prețul inițial. (10 p)

2. Se consideră numerele reale:

$$a = \left(\frac{5}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{24}}\right) \cdot \sqrt{18} - \frac{\sqrt{12}}{2} \text{ și } b = \sqrt{27}.$$

a) Arătați că $a = \sqrt{3}$. (5 p)

b) Calculați media geometrică a numerelor a și b . (5 p)

PARTEA a III-a - Pentru următoarele probleme se cer rezolvări complete (30 p)

1. Calculați $8\cos 30^\circ - 3\cos 45^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$. (10 p)

2. Fie M mijlocul laturii CD a unui romb $ABCD$. Dacă $AB = 10$ cm și $BD = 12$ cm, calculați:

a) aria rombului $ABCD$; (5 p)

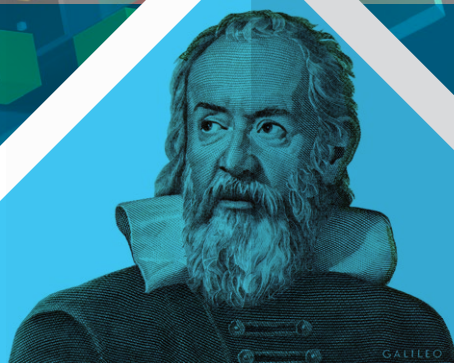
b) sinusul unghiului BAD ; (5 p)

c) lungimea segmentului DE , unde E este punctul de intersecție al dreptelor AM și BD . (10 p)

Timp de lucru: 50 de minute.

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

*Matematica este limba
cu care Dumnezeu
a scris universul.*



„Natura este scrisă în limbaj matematic.”

Galileo Galilei (1564–1642)



Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor



Activitate în cooperare

În grupe de câte 4 elevi, parcurgeți următoarele cerințe:

– Individual, scrieți prin enumerare mulțimea $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18 : x\}$ și mulțimea $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 12\}$

– Comparați mulțimile obținute și analizați ce factori ar conduce la rezultate diferite în cadrul grupeii.

– Colaborați pentru a ajunge la aceleași elemente pentru mulțimile cerute, apoi determinați cardinalele mulțimilor, reuniunea, intersecția și diferențele dintre mulțimile date.

– Dați exemplu de câte un element care aparține mulțimilor D , E , $D \cup E$, $E \cup D$, $D \cap E$, $E \cap D$, $D - E$ și $E - D$.

– Dați câte un exemplu de număr care nu aparține mulțimilor D , E , $D \cup E$, $E \cup D$, $D \cap E$, $E \cap D$, $D - E$, $E - D$.

– Se poate da exemplu de un element care aparține mulțimii D , care nu aparține mulțimii $D \cup E$? Dar un exemplu de element care aparține mulțimii D , care nu aparține mulțimii $D \cap E$? Dar un exemplu de element care aparține mulțimii $D \cup E$, care nu aparține mulțimii $D \cap E$? Argumentați.



Ne amintim!

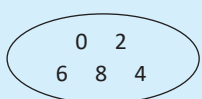
■ **Mulțimea** este o colecție (grup, ansamblu, grămadă) de mai multe obiecte care au o proprietate comună. Aceste obiecte se numesc **elementele mulțimii** și se scriu între acolade. Elementele oricărei mulțimi sunt distincte.

■ Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțime vidă** și se notează $\emptyset$.

■ Mulțimile se notează cu numere mari: $A, B, C, D, \dots$, iar elementele mulțimilor se notează, de regulă, cu litere mici.

■ O mulțime poate fi reprezentată în trei moduri.

De exemplu, dacă A este mulțimea cifrelor pare, A poate fi reprezentată:

prin enumerarea elementelor sale	printr-o proprietate caracteristică comună tuturor elementelor mulțimii	prin diagrama Venn-Euler
$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$	$A = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$	A 
Fiecare cifră apare o singură dată în mulțime.	Citim: <i>mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este cifră pară.</i>	Elementele mulțimii se scriu într-un cerc/oval.

■ Fie mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 9\}$, $D = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 < n < 11\}$.

– Dacă un element x aparține unei mulțimi A , se notează $x \in A$ și se citește „ x aparține lui A ”.

Dacă un element y nu se găsește în mulțimea B , se scrie $y \notin B$ și se citește „ y nu aparține lui B ”.

$2 \in A, 2 \in B; 0 \in A, 0 \notin B, 0 \in C;$
 $10 \notin A, 10 \in B, 10 \notin C.$

– **Cardinalul unei mulțimi** A , notat $\text{card} A$ sau $|A|$, este numărul de elemente al mulțimii A .

Mulțimile cu un număr finit de elemente se numesc **mulțimi finite**. Acestor mulțimi le putem număra elementele, deci putem spune care este cardinalul lor.

$\text{card} A = 10$ (prin numărare);
 $\text{card} B = 5$; $\text{card} C = 10$ (există 10 numere naturale mai mici sau egale cu 9).

Determinați $\text{card} D$.

Mulțimile cu număr infinit de elemente se numesc **mulțimi infinite**. Acestor mulțimi nu le putem asocia niciun număr real care să reprezinte cardinalul, dar putem spune că sunt de cardinal infinit.

– Două mulțimi sunt **egale** dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.

Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține mulțimii B sau invers, se spune că mulțimile A și B sunt diferite. Se notează $A \neq B$.

– **Reuniunea** a două mulțimi este o mulțime formată din toate elementele celor două mulțimi, fiecare element comun fiind luat o singură dată. Notăm $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

– **Intersecția** a două mulțimi este o mulțime formată din elementele comune ale celor două mulțimi. Notăm $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

– **Diferența** a două mulțimi este o mulțime formată din elementele care aparțin primei mulțimi, dar nu aparțin mulțimii a doua.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

– O mulțime A este **inclusă** într-o mulțime B dacă orice element al mulțimii A aparține și mulțimii B și se notează $A \subset B$. Putem spune și că mulțimea B **include** mulțimea A și notăm $B \supset A$. Mulțimea A se numește **submulțime** a mulțimii B .

Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este și element al mulțimii B , se spune că mulțimea A **nu este inclusă** în mulțimea B și se folosește notația $A \not\subset B$.

$A = C$ (utilizând pentru mulțimea C scrierea prin enumerare, obținem aceleași elemente ca cele din A); $A \neq B$.

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \text{ card}(A \cup B) = 11.$$

Determinați $A \cup D$ și $D \cup B$.

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Determinați $A \cap D$ și $B \cap D$.

$$A \setminus B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}; B \setminus A = \{10\}; A \setminus C = \emptyset.$$

Determinați $D \setminus B$.

$B \subset D$, deci B este submulțime a lui D ; putem spune că $A \subset C$ și $C \subset A$; $B \not\subset A$ (B conține pe 10, care nu este în A).

Diagrama Venn-Euler se folosește, în general, la reprezentarea mulțimilor finite. Mulțimile infinite se pot reprezenta prin enumerarea unor elemente și sugerarea faptului că enumerarea poate continua la infinit, dar cel mai bine este să se găsească o proprietate caracteristică a elementelor.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ – mulțimea numerelor naturale nenule

$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ – mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale (un număr irațional este o fracție zecimală infinită neperiodică)

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor iraționale

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Exersăm împreună!

1. Rescrieți în limbaj simbolic mulțimea M formată din elementele n cu proprietatea că sunt numere naturale pare.

2. Rescrieți ca text $S = \{p \in \mathbb{N} \mid p + 1 \leq 10\}$. Scrieți submulțimea P a lui S ce conține ca elemente numai numere pare.

3. Rescrieți mulțimile următoare prin enumerarea elementelor: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k^2 + k - 5, k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7 - k, k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n + 1, n = 1, 2, 3, 4\}$.

Rezolvare.

$$1. M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}.$$

2. S este mulțimea numerelor naturale p cu proprietatea $p + 1 \leq 10$. $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p + 1 \leq 10 \text{ și } p \text{ număr par}\}.$

$$3. A = \{9; 25; 47\}, B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}, C = \{4; 7; 10; 13\}.$$



Reflectăm!

Ne-am amintit că o mulțime poate fi scrisă sau definită prin enumerarea elementelor, prin reprezentarea cu ajutorul diagramei și am învățat că poate fi definită și cu ajutorul precizării unor proprietăți ale elementelor sale.

Argumentați care dintre mulțimile alăturate se poate scrie prin enumerare sau prin diagrame. Formulați opinii privind avantajele sau limitele utilizării uneia sau alteia dintre modalitățile de scriere a mulțimilor.

Exersați

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ și mulțimea $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 8 : x\}$.

a) Precizați valoarea de adevăr a afirmațiilor:

i) $-3 \in A$; ii) $-3 \in B$; iii) $-3 \in A \cup B$; iv) $-3 \in A \cap B$; v) $-3 \in A - B$; vi) $-3 \in B - A$.

b) Scrieți prin enumerare mulțimea B , apoi, cu ajutorul diagramelor, evidențiați zona corespunzătoare intersecției celor două mulțimi.

c) Scrieți mulțimea A evidențiind o proprietate comună a tuturor elementelor sale. Comparați răspunsurile între voi.

2. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ par și } \sqrt{x^2} \leq 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4 \text{ sau } |x| = 4\}$.

a) Fără a rescrie mulțimile date prin enumerarea elementelor, precizați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, explicând cum ați raționat: i) $6 \in A$; ii) $6 \in B$; iii) $0 \in A$; iv) $0 \in B$.

b) Rescrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile A și B . Determinați apoi $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$. Reprezentați cu ajutorul diagramelor cele două mulțimi și asociați zonele din diagrame cu mulțimile obținute prin reuniune, intersecție și diferență.

c) Se consideră mulțimile $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ par}\}$ și $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} \leq 4\}$. Identificați ce operație cu mulțimi stabilește o relație între mulțimile A , C și D .

3. Rescrieți mulțimile prin enumerarea elementelor: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 24\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \mid 6\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \mid x \text{ și } x < 45\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^{k+1}, 0 \leq k \leq 3\}$; $E = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{16}{3x+1} \in \mathbb{N}\}$; $F = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{2x+1}{13} \text{ fracție subunitară}\}$.

4. Determinați mulțimile și cardinalul lor: $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2a, a \in A\}$, $C = \{c \in \mathbb{N} \mid c = 2b - 1, b \in B\}$.

5. Rescrieți mulțimile $A = \{0; 3; 6; 9\}$ și $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ folosind o proprietate a elementelor și determinați reuniunea, intersecția și diferența lor.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10, x \text{ este pătratul unui număr întreg}\} = \{0; 1; 4; 9\}$; b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\} \subset \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se divide cu } 5\} \subset \{1; 5\}$.

7. Scrieți mulțimea divizorilor naturali ai numărului 48, mulțimea divizorilor întregi ai numărului 12 și mulțimea multiplilor naturali ai numărului 8 mai mici decât 100.

8. Determinați mulțimile X și Y , știind că $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X \cap Y = \{4, 5, 7\}$ și $Y \setminus X = \{0, 8\}$.

9. Dintr-o clasă cu 30 de elevi, 18 participă la olimpiada de matematică și 16 la olimpiada de biologie. Determinați câți elevi participă la ambele concursuri, știind că toți elevii participă la cel puțin una dintre cele două olimpiade.

10. Fie mulțimea: $A = \{-3; -2, 14; -\sqrt{2}; -1, (32); 0; 2, (3); \sqrt{6}; \pi; 5; 6, 15\}$. Alegeți din mulțimea A numerele:

a) naturale; b) întregi; c) raționale; d) iraționale.

Investigație

Este foarte important să vă cunoașteți grupa sanguină, pentru că puteți ajunge în situația de a salva sau de a fi salvat prin donație de sânge. În tabelul următor sunt descrise 4 grupe sanguine mari (O, A, B și AB), fiecare cu câte două subcategorii (– și +). Citindu-l și cunoscându-vă grupa sanguină, veți ști către ce tip de grupă sanguină puteți dona sau de la ce grupă sanguină puteți primi sânge.

Întrebați-vă părinții ce grupă sanguină au și identificați-o pe a voastră folosind regulile de mai jos, în care termenii fiecărei sume sunt grupele sanguine ale părinților, iar rezultatele sunt grupele sanguine ale copiilor:

$A + A = A$; $A + O = A$; $A + B = AB$;
 $B + B = B$; $B + O = B$; $O + O = O$.

Faceți legătura cu noțiunea de mulțime. Realizați un tabel cu grupele sanguine și numele colegilor din clasă. Veți forma astfel mulțimi distincte de elevi aparținând diferitelor grupe sanguine.

Grupa de sânge	Poate dona la...	Poate primi de la...
O-	O-, O+, A-, A+, B-, B+, AB-, AB+	O-
O+	O+, A+, B+, AB+	O-, O+
A-	A-, A+, AB-, AB+	O-, A-
A+	A+, AB+, AB+	O-, O+, A-, A+
B-	B-, B+, AB-, AB+	O-, B-
B+	B+, AB+, AB+	O-, O+, B-, B+
AB-	AB-, AB+	O-, A-, B-, AB-
AB+	AB-, AB+, AB+, AB+	O-, O+, A-, A+, B-, B+, AB-, AB+

Intervale numerice. Reprezentare pe axa numerelor

În vorbirea curentă sunt multe situații în care folosim noțiunea de interval, cel mai des fiind corelată cu timpul: *Vremea va rămâne senină pe întreg intervalul următor de 24 de ore.*



Ne amintim!

Se numește **axa numerelor** ansamblul format din: o dreaptă numită direcție, un punct pe dreaptă (notat cu O) numit origine, un sens (spre dreapta), o unitate de măsură.

Oricărui număr real îi corespunde pe axa numerelor un punct (poziție) și reciproc. Astfel, o reprezentare a unei mulțimi de numere poate fi realizată prin corespondență cu mulțimi de puncte ale axei (privită ca dreaptă).

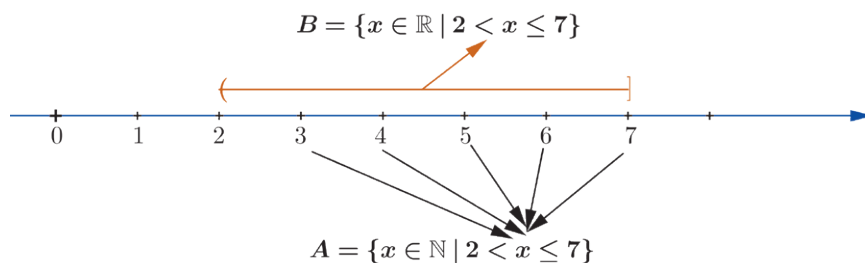
Pe dreaptă putem identifica trei categorii de părți ale sale: puncte, segmente, semidrepte.



Descoperiți!

Notăm cu A mulțimea tuturor numerelor naturale care au proprietatea că sunt mai mari decât 2 și mai mici sau egale cu 7. În aceste condiții, $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$, unde am folosit scrierea prin enumerarea elementelor care îndeplinesc condițiile date, sau $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 7\}$, unde am folosit scrierea cu ajutorul proprietăților elementelor mulțimii.

Există o diferență majoră între mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$. Dacă în primul caz se poate scrie mulțimea prin enumerarea elementelor, în al doilea caz nu este posibil, între oricare două numere naturale distincte situându-se o infinitate de numere reale:



O mulțime de tipul B o vom numi *interval numeric* sau, simplu, *interval*. Vom folosi o scriere simplificată a proprietăților elementelor ce o formează: $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\} = (2; 7]$.



Acum știm, deci putem rezolva!

- Pe dreapta d se consideră punctele distincte A, B și C , în această ordine. Construiți desenul corespunzător și evidențiați pe dreaptă segmentul AB și semidreapta (CA) .
- Se consideră segmentul de dreaptă MN , cu $M \neq N$. Descrieți segmentul cu ajutorul mulțimilor definite printr-o proprietate a elementelor ce le formează.
- Se consideră dreapta d și punctele distincte A, B și C . Realizați desenul, știind că semidreapta (AB) este conținută în semidreapta (CA) . Descrieți semidreapta (AB) cu ajutorul mulțimilor definite printr-o proprietate a elementelor ce le formează.



Reflectăm!

Descrierea notației folosite: $(2; 7]$.

➤ Numerele 2 și 7 se numesc capetele intervalului.

Capetele intervalului sunt acele numere între care se situează toate elementele acestuia, $2 < x \leq 7$.

➤ Folosim paranteza rotundă asociată unui capăt de interval și înțelegem că valoarea de capăt nu aparține intervalului ($2 < x$).

➤ Folosim paranteza pătrată asociată unui capăt de interval și înțelegem că valoarea de capăt aparține intervalului ($x \leq 7$).

Definiție

Fie a și b numere reale, $a < b$.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari decât a și mai mici decât b* se numește **interval deschis** $(a; b)$.

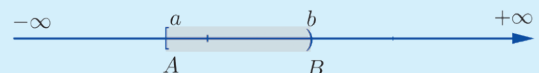
$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor din interiorul segmentului AB (fără capete).

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari sau egale cu a și mai mici decât b* se numește **interval închis la stânga și deschis la dreapta** și se notează $[a; b)$.

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari sau egale cu a și mai mici sau egale decât b* se numește **interval închis** $[a; b]$.

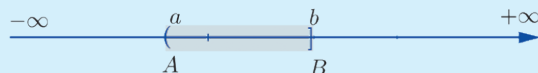
$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor situate pe segmentul AB (inclusiv capetele).

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari decât a și mai mici sau egale cu b* se numește **interval deschis la stânga și închis la dreapta** și se notează $(a; b]$.

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Reflectăm!

➤ Intervalele definite mai sus sunt *mărginite* (capetele intervalelor sunt exprimate prin numere reale).

➤ Intervalele sunt mulțimi de numere reale, de regulă formate dintr-o infinitate de numere.

➤ Intervalele au câte două capete; acestea pot fi deschise (capătul este însoțit de o paranteză rotundă) sau închise (capătul este însoțit de o paranteză dreaptă).

➤ Capătul deschis semnifică faptul că valoarea de capăt nu este element al intervalului (privit ca mulțime de numere), iar capătul închis semnifică faptul că valoarea de capăt este element al intervalului.

➤ Capătul deschis semnifică o inegalitate strictă ($<$, $>$), iar capătul închis semnifică o inegalitate nestrictă ($\leq$, $\geq$).

➤ Dacă $a = b$, atunci $(a; b) = (a; a) = \emptyset$ (niciun număr real nu poate fi în același timp mai mare și mai mic decât un număr dat) și $[a; b] = [a; a] = \{a\}$ (singurul număr care este în același timp mai mare sau egal și mai mic sau egal cu un număr dat este numărul însuși); nu au sens scrierile $(a; a]$ și $[a; a)$.

➤ O condiție de tipul $a \leq x \leq b$ (sau similară) implică un răspuns de tip interval numai în cazul rezolvării sale în mulțimea numerelor reale.



Exersăm împreună!

1. Scrieți intervalele următoare sub formă de mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor:

interval	sub formă de mulțime	interval	sub formă de mulțime
$[0; 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$	$(4; 10]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 10\}$
$[-2; 7)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 7\}$	$(-0, 1; 0, 1)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -0, 1 < x < 0, 1\}$
$[2; 1)$	nu este o scriere pentru un interval pentru că $2 > 1$		
$(\sqrt{2}; \sqrt{8} - 1)$	Verificăm mai întâi dacă $\sqrt{2} < \sqrt{8} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2}$ adevărat, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < \sqrt{8} - 1\}$		

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile următoare și precizați capetele:

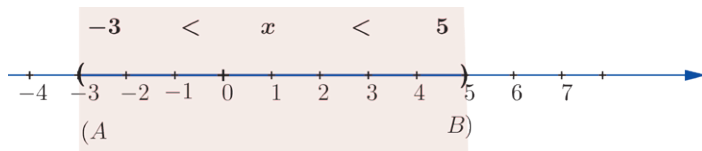
mulțime	sub formă de interval
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	$[-3; 2)$, capetele sunt -3 și 2
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$	$[-2; 3]$, capetele sunt -2 și 3
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$	$(2; 3)$, capetele sunt 2 și 3
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$	$(-2; 2]$, capetele sunt -2 și 2

3. Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate și justificați:

	A/F	justificare
a) $3 \in (-8; 12]$	A	trebuie verificat dacă $-8 < 3 \leq 12$ și se verifică
b) $4 \in (4; 7]$	F	interval deschis în 4 , deci $4 < 4$ fals
c) $2\sqrt{3} \in [3; 4]$	A	$3 \leq 2\sqrt{3} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{9} \leq \sqrt{12} \leq \sqrt{16}$ adevărat

Observații

Desenăm pe axa numerelor reale punctele $A(-3)$ și $B(5)$.



Observăm faptul că orice număr real x cu proprietatea $-3 < x < 5$ se va reprezenta pe axă printr-un punct situat între A și B și putem afirma că oricărui punct dintre A și B îi va corespunde un număr real cuprins între -3 și 5 . Cum condiția anterioară este chiar descrierea intervalului $(-3; 5)$, putem spune că reprezentării intervalului $(-3; 5)$ pe axă îi corespunde segmentul AB , deschis la ambele capete, pe care-l vom nota (AB) .



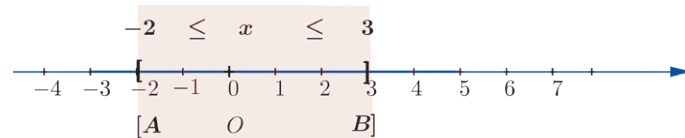
Reflectăm!

➤ Reprezentarea pe axă a intervalelor de numere reale de forma $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ sau $[a; b]$ corespunde unor segmente de dreaptă de tipul (AB) , $(AB]$, $[AB)$, respectiv $[AB]$, cu capetele $A(a)$ și $B(b)$; pentru aceasta, reprezentăm întâi capetele segmentului, apoi segmentul.

➤ La fel ca la intervale, paranteza rotundă asociată unui capăt de segment semnifică faptul că punctul de capăt nu aparține segmentului, iar paranteza pătrată la capăt de segment semnifică faptul că punctul de capăt aparține segmentului; putem afirma că $A \notin (AB)$, $B \notin (AB)$, $A \notin [AB]$, $B \in [AB]$, $A \in [AB]$, $B \in [AB]$, $A \in (AB]$, $B \in (AB]$.

Exersăm împreună!

1. Scrieți intervalul care corespunde segmentului $[AB]$ din desenul alăturat. Verificați dacă $O \in [AB]$. Scrieți trei numere întregi și trei numere raționale neîntregi din intervalul $[-2; 3]$.



Rezolvare. Punctul O se găsește pe axă între

punctele A și B . Exemple de numere întregi: $-1; 1; 2$; exemple de numere raționale neîntregi $0,5; 1,5; 2,5$.

2. Reprezentați intervalele numerice pe axa numerelor, în fiecare caz în parte: a) $(-3; 1]$; b) $[\frac{1}{2}; 1, 5)$; c) $[\sqrt{2}; \sqrt{8}]$ (construiți, fie utilizând o modalitate de a reprezenta segmente de lungimi numere iraționale date, fie utilizând aproximări ale acestor numere).

3. Scrieți intervalele corespunzătoare segmentelor despre care se cunosc:

- a) $[AB]$, cu $A(-3)$ și $B(2)$; b) (CD) , cu $C(0)$ și $D(3)$; c) $[EF)$, cu $E(-1)$ și $F(10)$; d) $(GH]$, cu $G(-5)$ și $H(-2)$; e) $[MN]$, cu un capăt de abscisă 0 și $MN = 4$ (cu identificarea ambelor cazuri); f) $[PQ]$, cu mijlocul segmentului de abscisă 0 și $PQ = 10$.

Rezolvare. a) $[-3; 2]$; b) $(0; 3]$; c) $[-1; 10]$; d) $(-5; -2]$; e) $[0; 4]$ sau $[-4; 0]$; f) $[-5; 5]$.

4. Dați exemplu de: a) interval deschis la stânga și închis la dreapta; b) interval închis; c) interval închis la stânga și deschis la dreapta; d) interval deschis; e) interval închis care-l conține pe 0 ; f) interval deschis care-l conține pe 0 ; g) interval deschis la stânga și închis la dreapta, care-l conține pe 0 și acesta este și capăt.

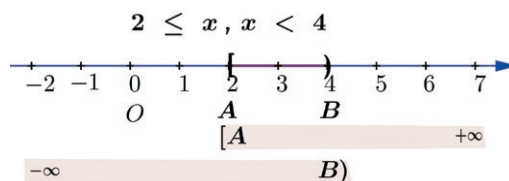
5. Dacă veți verifica pe anumite ambalaje, de exemplu ale unor produse alimentare, înscrierea gramajului este de tipul $100 \text{ g} \pm 2 \text{ g}$. Interpretați cu ajutorul intervalelor această informație.



Descoperiți!

■ Cum reprezentăm pe axa numerelor mulțimea punctelor care au ca abscise valori din mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$, adică toate punctele axei aflate la dreapta punctului $A(2)$?

■ Cum reprezentăm pe axa numerelor mulțimea punctelor care au ca abscise valori din mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$, adică toate punctele axei aflate la stânga punctului $B(4)$?



Atenție!

Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 4\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ este diferită de mulțimea $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\} = [-3; 4]$. Mulțimea A este finită, deoarece conține doar numerele întregi cuprinse între -3 și 4 , iar mulțimea B este infinită (un interval). Mulțimile sunt diferite, $A \neq B$.



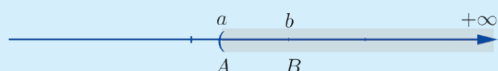
$-\infty$ (minus infinit) și $+\infty$ (plus infinit) sunt simboluri care ne permit definirea unui nou tip de intervale, cu unul dintre capete infinit; $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

Definiție

Fie a un număr real.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari decât* a determină **intervalul deschis** $(a; +\infty)$.

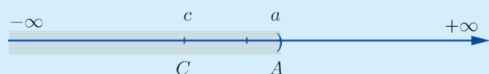
$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $(AB$, unde A este capătul de abscisă a și B punct de abscisă mai mare ca a ; paranteza rotundă asociată originii semidreptei semnalează că originea **nu** aparține acesteia.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mici decât* a determină **intervalul deschis** $(-\infty; a)$.

$$(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $(AC$, unde A este capătul de abscisă a și C punct de abscisă mai mică decât a .

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mari sau egale* cu a determină **intervalul închis la stânga** $[a; +\infty)$.

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $[AB$, unde A este capătul de abscisă a și B punct de abscisă mai mare ca a ; paranteza dreaptă asociată originii semidreptei semnalează că originea **aparține** acesteia.

Mulțimea tuturor numerelor reale *mai mici sau egale* cu a determină **intervalul închis la dreapta** $(-\infty; a]$.

$$(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



Îi corespunde pe axă mulțimea punctelor de pe semidreapta $[AC$, unde A este capătul de abscisă a și C punct de abscisă mai mică decât a .

Observații

■ Intervalele pot avea ambele capete finite (exprimate prin numere reale), caz în care reprezentarea pe axă corespunde unui segment de dreaptă sau unui punct, sau pot avea un capăt finit și unul infinit, caz în care reprezentarea corespunde unei semidrepte.

■ Intervalele cu un capăt infinit nu pot fi decât deschise la capătul infinit.

■ Pentru intervalele de tipul $(a; +\infty)$ și $(-\infty; a)$, semidreptele corespunzătoare sunt deschise (nu conțin originea semidreptei). Pentru intervalele de tipul $[a; +\infty)$ și $(-\infty; a]$, semidreptele corespunzătoare sunt închise la capătul finit (conțin originea semidreptei).

■ O condiție de tipul $x < a$ (sau similară) implică un răspuns de tip interval numai în cazul rezolvării sale în mulțimea numerelor reale.



Exemple

➤ Dacă $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$, atunci relația $A = B$ este adevărată, ambele mulțimi fiind formate din exact aceleași elemente. Spunem că mulțimile sunt egale.

Exersăm împreună!

1. Precizați care dintre scrierile următoare reprezintă un interval:

a) $(+\infty; 2)$; b) $[2; +\infty)$; c) $[-3; +\infty)$; d) $(-\infty; -4]$; e) $(0; +\infty)$.
Rezolvare: a) fals, pentru că relația $+\infty < x < 2$ este falsă. Corect este $(2; +\infty)$;
 b) adevărat; c) fals, pentru că relația $-3 \leq x \leq +\infty$ este falsă. Corect este $[-3; +\infty)$; d) adevărat; e) adevărat.

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile următoare:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

Rezolvare: a) $[-3; +\infty)$; b) $(-\infty; -5]$; c) $(2; +\infty)$; d) $(-\infty; 0)$.

3. Scrieți intervalele următoare sub formă de mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor, după model: $[0; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

a) $[-2; +\infty)$; b) $(-\infty; 1]$; c) $(-\infty; 6)$; d) $(5; +\infty)$.

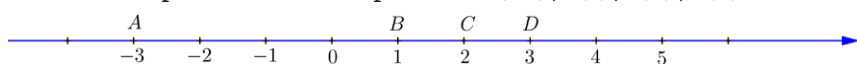
4. Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate:

a) $3 \in (-1; +\infty)$; b) $3 \in (-\infty; 3)$; c) $4 \in (-3; 4]$; d) $-1 \in (-\infty; 2)$.

Rezolvare: a, f, a, a.

Observații

Desenăm pe axa numerelor punctele $A(-3)$, $B(1)$, $C(2)$, $D(3)$.



Cum intervalele reprezintă mulțimi, rezultă că relațiile de incluziune și de egalitate între intervale au aceeași semnificație ca cele de la mulțimi, descrise anterior.

Observăm că segmentul BC se găsește în interiorul segmentului AD . Putem scrie acest lucru cu ajutorul intervalelor $[1; 2] \subset [-3; 3]$. Mai putem spune și că: $(1; 2) \subset [-3; 3]$, $[1; 2] \subset (-3; 3)$, $(1; 3) \subset (1; 3]$, $(-3; 3) \subset (-3; +\infty)$. Incluziunea $[-3; 3) \subset (-3; +\infty)$ este falsă, pentru că numărul -3 se găsește în primul interval și nu se găsește în al doilea interval.

Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate: $(-\infty; 1) \subset (-\infty; 2)$; $(-3; 1) \subset (-\infty; 3)$; $[-3; 3] \subset (1; 3)$; $[-3; 2) \subset (-\infty; 2)$; $(1; 2) \subset (-\infty; 2)$; $(1; +\infty) \subset (-3; +\infty)$.

Reflectăm!

➤ Spre exemplificare, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, în condițiile în care $a < b$ și $c < d$, atunci $[a; b) = [c; d)$ dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$. În consecință, $[a; b) \neq [c; d)$ dacă $a \neq c$ sau $b \neq d$.

➤ În condițiile anterioare, dacă $[a; b) \subset [c; d)$, atunci $c \leq a < b < d$ sau $c < a < b \leq d$ (incluziune strictă).

➤ Orice două intervale care nu sunt de același tip (din punct de vedere al capetelor – închise/deschise) sunt diferite.

Exemplu: $[a; b) \neq (c; d)$, oricare ar fi a, b, c, d numere reale, $a < b, c < d$.

Exersăm împreună!

1. Dați exemplu de interval în fiecare dintre cazurile: a) interval închis la ambele capete; b) interval deschis la stânga și închis la dreapta; c) două intervale diferite; d) două intervale într-o relație de incluziune.

2. Determinați numerele reale a și b astfel încât:

a) $(2; a) = (b; 5)$; b) $(2; a) \subset (b; 5)$; c) $(b; 5) \subset (2; a)$;
d) $(2; a) \subset [b; 5]$; e) $[2; a] \subset (b; 5)$.

Rezolvare: a) $a = 5, b = 2$; b) $2 < a \leq 5, b \leq 2$. Discutați la nivelul clasei celelalte cerințe.



Exemple

➤ Dacă $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ și $C = \{0; 1\}$, atunci relația $C \subset A$ este adevărată, toate elementele mulțimii C fiind și elemente ale mulțimii A . Spunem că mulțimea C este inclusă în mulțimea A ; mai mult, C reprezintă o submulțime a mulțimii A .



Activitate pe grupe

Decupați din carton 52 de dreptunghiuri de dimensiunea unei cărți de joc. Pe 20 dintre ele se vor scrie numere reale (diferite), pe câte 4 dintre ele simbolurile $+\infty$, respectiv $-\infty$. Restul de 24 de dreptunghiuri se vor împărți câte 6, pe fiecare set se va trece câte unul dintre simbolurile de capăt de interval: $(,), [,]$, respectiv $]$. Se vor pregăti astfel atâtea seturi a câte 52 de cărți câte grupe de câte 4 se pot forma cu elevii (+/- 1 elev pe grupă).

În grupe de câte 4 elevi, se alege drept carte de început una care să conțină unul dintre semnele $($ sau $[$ și se așază cu fața în sus pe tabla mesei, între elevi. Se vor amesteca cărțile rămase și apoi se vor împărți, fiecare jucător primind câte 4 cărți. Se decide jucătorul care începe jocul și acesta va pune o carte care se potrivește la dreapta cărții de început, în cazul acesta un număr. Următorul jucător trebuie să pună obligatoriu un număr sau un simbol de tip infinit, dar cu condiția de a da sens unei scrieri de tip interval. Următorul jucător poate pune doar un capăt care să finalizeze scrierea de tip interval. Următorul trebuie să pună pe un nou rând un capăt de interval ș.a.m.d. În cazul în care, atunci când este la rând, jucătorul nu are nicio carte care se potrivește, este obligat să tragă de jos carte. Dacă nu mai sunt cărți de tras, jucătorul care nu are o carte convenabilă va zice *pas*. Jocul se finalizează fie când un jucător reușește să pună jos toate cărțile din mână – caz în care este și câștigător, fie când toți cei 4 jucători spun consecutiv *pas* și nu mai sunt cărți de ales, ceea ce înseamnă că jocul s-a blocat și va fi declarat învingător jucătorul cu cele mai puține cărți în mână.

Exersați

1. Precizați care scriere reprezintă un interval. Corectați scrierile greșite pentru a obține intervale.

- a) $(-4; 4)$; b) $(3; 0)$; c) $[-3; 3]$; d) $(-3; -4]$; e) $[5; 10)$.

2. Precizați care dintre relații sunt adevărate:

- a) $-1 \in (-4; 4)$; b) $0 \in (-1; 1)$; c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \in (\sqrt{2}; \sqrt{3})$; d) $-5 \in [-3; 2]$; e) $4 \in (-3; 4]$;
f) $0 \in (-0,3; 0,1)$; g) $1 \in [-5; 0)$; h) $2 \in (2; 8]$; i) $8 \in (2; 8)$; j) $4 \in (-3; 4]$.

3. Reprezentați pe axa numerelor mulțimile și stabiliți care dintre ele reprezintă un interval:

$$A = \{-2; 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 4\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 4\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}.$$

4. Scrieți sub formă de interval mulțimile următoare:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x < 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$.

5. Scrieți intervalele următoare sub formă de mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor:

- a) $[-1; 3]$; b) $[-7; 7]$; c) $(-4; \sqrt{8}]$; d) $(-2, 1(8); 0, 12(7))$.

6. Se consideră intervalul $[-5; 4)$. Determinați:

- a) cel mai mic număr întreg din interval; b) cel mai mare număr întreg din interval;
c) numărul de numere întregi din interval; d) suma numerelor întregi din interval;
e) diferența dintre cel mai mare număr întreg și cel mai mic număr întreg din interval.

7. Reprezentați intervalele numerice pe axa numerelor, în fiecare caz în parte:

- a) $[-1; 3)$; b) $(4; 6]$; c) $[0; 2]$; d) $(-3; 3)$; e) $(1,5; 3,5)$; f) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ (pentru acest caz, fie utilizând o modalitate de a construi segmente de lungimi numere iraționale date, fie utilizând aproximări ale acestor numere).

8. Scrieți intervalele corespunzătoare segmentelor despre care se cunosc:

- a) $[AB]$, cu $A(-2)$ și $B(4)$; b) (CD) , cu $C(-1)$ și $D(3)$; c) $[EF]$, cu $E(-2)$ și $F(5)$; d) (GH) , cu $G(-4)$ și $H(-1, 5)$;
e) $[MN]$, cu un capăt de abscisă 0 și $MN = 3$ (pentru ambele cazuri);
f) $[PQ]$, cu mijlocul segmentului de abscisă 0 și $PQ = 8$.

9. Care scriere reprezintă un interval: a) $(+\infty; -2)$; b) $[-2; +\infty)$; c) $[3; +\infty]$; d) $(-\infty; 4]$; e) $(0; +\infty)$?

Corectați scrierile greșite pentru a obține intervale.

10. Precizați care dintre relații sunt adevărate:

- a) $-1 \in (-1; +\infty)$; b) $0 \in (-\infty; 3)$; c) $0 \in (-2; +\infty)$; d) $1 \in (-\infty; 1]$; e) $7 \in (-3; 7]$; f) $0 \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$; g) $-1 \in (-\infty; 1)$.

11. Scrieți sub formă de interval mulțimile următoare:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$.

12. Scrieți intervalele următoare sub formă de mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor:

- a) $[6; +\infty)$; b) $[-6; +\infty)$; c) $(-\infty; 12]$; d) $(-\infty; 16)$; e) $(5,5; +\infty)$.

13. Dați exemplu de interval care:

- a) conține exact un număr natural; b) conține pe $2\sqrt{3}$;
c) nu conține niciun număr întreg; d) conține numere oricât de mari;
e) conține exact două numere naturale, dintre care unul să fie capăt al intervalului.

14. Reprezentați intervalele numerice pe axa numerelor:

- a) $[-1; +\infty)$; b) $(-\infty; 3]$; c) $(-2; +\infty)$; d) $(-\infty; 4)$.

15. Scrieți intervalele corespunzătoare semidreptelor despre care se cunosc:

- a) $[AB]$, cu $A(-3)$ și $B(1)$; b) (CD) , cu $C(4)$ și $D(3)$;
c) (EF) , cu $E(-1)$ și originea axei aparține semidreptei;
d) (GH) , cu $G(-5)$ și originea axei nu aparține semidreptei.

16. Care dintre relațiile următoare sunt adevărate?

- a) $(4; 5] \subset [4; 5]$; b) $[-2; 1] \subset (-2; 2]$; c) $[0; 3] \subset (-\infty; 5)$; d) $(-2; 5] \subset (-2; +\infty)$; e) $(0; 3) \subset (-5; -3)$.

17. Precizați care dintre relațiile următoare sunt adevărate:

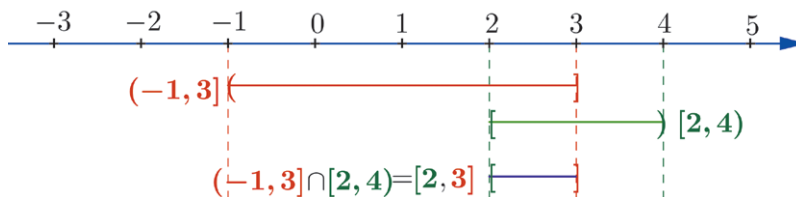
- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\} = (-\infty; -2)$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 5\} = (1; 5)$;
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 1\} = (-1; 1)$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq 3\} = (-7; 3]$.

Operații cu intervale numerice: intersecția și reuniunea



Descoperiți!

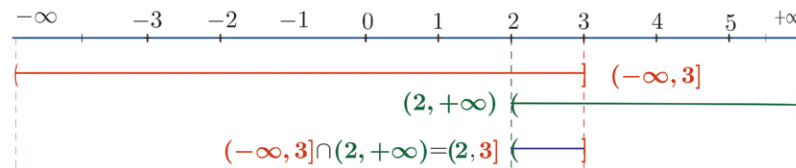
■ Considerăm intervalele $(-1; 3]$ și $[2; 4)$, pe care le reprezentăm pe axa numerelor reale:



Intersecția a două intervale este formată din elementele comune ale celor două intervale.

În exemplul asociat, **intersecția** celor două intervale se evidențiază ca zona comună a celor două segmente ce corespund intervalelor inițiale; zona comună debutează cu valoarea 2 și se finalizează cu valoarea 3.

■ Considerăm intervalele $(-\infty; 3]$ și $(2; +\infty)$, pe care le reprezentăm pe axa numerelor reale:



Pentru a stabili tipul de paranteză pentru rezultatul intersecției, se raționează astfel:

- dacă valoarea de capăt aparține ambelor intervale, se va utiliza paranteza dreaptă;
- dacă valoarea de capăt aparține doar unui interval sau nu aparține niciunui interval inițial, se va utiliza paranteza rotundă;
- dacă valoarea de capăt a intervalului rezultat în urma operațiilor de intersecție este $+\infty$ sau $-\infty$, se va utiliza paranteza rotundă.

Rezultatul intersecției a două intervale poate fi un interval, o mulțime formată dintr-un singur element sau mulțimea vidă.



Exemple!

Intervalele sunt mulțimi, deci putem efectua cu ele operațiile studiate la mulțimi.

Pereche de intervale	$[-2; 2]$ și $(0; 5)$
Intersecție	$-2 \quad 0 \quad 2 \quad 5$ $(0, 2]$
$[-2; 2] \cap (0; 5) = (0; 2]$	

Pereche de intervale	$[-2; 2]$ și $(2; 5)$
Intersecție	$-2 \quad 2 \quad 5$ $\emptyset$
$[-2; 2] \cap (2; 5) = \emptyset$	

Pereche de intervale	$[-2; 2]$ și $(-2; 1)$
Intersecție	$-2 \quad 1 \quad 2$ $(-2, 1)$
$[-2; 2] \cap (-2; 1) = (-2; 1)$	

Dați exemple de intersecție a două intervale care este formată dintr-un singur element!

3. Copiați tabelul următor pe caiete și completați după model:

Pereche de intervale	$[0; 3]$ și $(0; 5)$	Pereche de intervale	$(-\infty; -1)$ și $(0; 7)$	Pereche de intervale	$[-2; 8]$ și $(-1; 0)$
Reuniune	$\begin{array}{c} 0 \quad 3 \quad 5 \\ \text{[} \quad \text{]} \\ \text{(} \quad \text{)} \\ \text{[0 } \quad \text{ 5)} \end{array}$	Reuniune		Reuniune	
$[0; 3] \cup (0; 5) = [0; 5]$					
Intersecție		Intersecție		Intersecție	

4. Determinați partea întreagă și partea fracționară a numerelor: $3,45$; $-7,12$; $0,25$.

Partea întreagă a numărului real x este numărul întreg n cu proprietatea $n \leq x < n + 1$; $[x] = n$.

Partea fracționară a unui număr este diferența dintre numărul considerat și partea sa întreagă; $\{x\} = x - [x]$.

$[x] \in \mathbb{Z}$, $\{x\} \in [0; 1)$, pentru orice x număr real.

Rezolvare: $3 \leq 3,45 < 4 \Rightarrow [3,45] = 3$ și $\{3,45\} = 3,45 - 3 = 0,45 \in [0; 1)$; $-8 \leq -7,12 < -7 \Rightarrow [-7,12] = -8$ și $\{-7,12\} = -7,12 - (-8) = 0,88 \in [0; 1)$; $0 \leq 0,25 < 1 \Rightarrow [0,25] = 0$ și $\{0,25\} = 0,25 - 0 = 0,25 \in [0; 1)$.

5. Determinați mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = -1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \{x\} + 1\}$, apoi calculați $A \cap B$ și $A \cup C$.

Rezolvare: $[x] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2 \Leftrightarrow A = [1; 2)$; $[x] = -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \Leftrightarrow B = [-1; 0)$; $x = \{x\} + 1 \Leftrightarrow x = x - [x] + 1 \Leftrightarrow [x] = 1 \Leftrightarrow C = [1; 2)$. $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup C = A$.

Exersați

1. Reprezentați în fiecare caz în parte, pe axa numerelor, intervalele și rezultatul operației respective:

- a) $(\frac{1}{2}; 2) \cup (0; 1) = (0; 2)$; $(\frac{1}{2}; 2) \cap (0; 1) = (\frac{1}{2}; 1)$; b) $[\frac{1}{2}; 2] \cup (0; 1) = (0; 2]$; $[\frac{1}{2}; 2] \cap (0; 1) = [\frac{1}{2}; 1)$;
c) $[\frac{1}{2}; 2) \cup (0; 1) = (0; 2)$; $[\frac{1}{2}; 2) \cap (0; 1) = [\frac{1}{2}; 1)$; d) $(\frac{1}{2}; 2] \cup (0; 1) = (0; 2]$; $(\frac{1}{2}; 2] \cap (0; 1) = (\frac{1}{2}; 1)$.

2. Reprezentați intervalele, în fiecare caz în parte, pe axa numerelor și calculați reuniunea și intersecția lor:

- a) $(-\infty; 0)$ și $(-1; 1)$; b) $(-\infty; 2)$ și $[1; +\infty)$; c) $(1; 4]$ și $[1; +\infty)$;
d) $[-8; 6]$ și $[-2; 2]$; e) $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$; f) $(-\infty; 1]$ și $[1; +\infty)$.

3. Efectuați:

- a) $[-3; 6) \cup \{6\}$; b) $[-4; 5] \cup \{-5; -2; 0; 5\}$; c) $[-4; 5] \cap \{-5; -2; 0; 5\}$; d) $(-3; 2) \cup \{-5; -3; 0; 2; 5\}$;
e) $(-3; 2) \cap \{-5; -3; 0; 2; 5\}$; f) $(-3; 2) \cup [-3; 5]$; g) $(-3; 2) \cap [-3; 5]$; h) $(-8; -2) \cup [-1; 5]$;
i) $(-5; 5] \cap [-6; 2) \cap \mathbb{Z}^*$; j) $[2; 12] \cup (3; 18)$; k) $[2; 12] \cap (3; 18)$; l) $(-6; 2,5) \cup (-5,6; 6)$.

4. Scrieți următoarele mulțimi sub formă de intervale, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 9\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 5\}$ și apoi calculați: $A \cup B$; $C \cup D$; $A \cap B$; $B \cap C$; $D \cup C$; $(A \cup B) \cap D$; $A \cup C$; $A \cap C$; $A \cap D$; $B \cup C$; $B \cap D$; $A \cap B \cap C \cap D$; $A \cup B \cup C \cup D$.

5. Dacă n este număr întreg, scrieți ca intervale sau ca mulțimi finite de numere:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\} \cap [-2; 6]$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq -4\} \cap [-4; 6]$; c) $\{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leq x \leq 4\} \cap [-2; 3]$;
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\} \cup [2; 6]$; e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq -4\} \cup [-2; 6]$; f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\} \cap [4; 5]$;
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 7\} \cup (7; 9)$; h) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 8\} \cup [-2; 5]$; i) $(-\infty; n+1) \cup (n; n+2)$;
j) $[n-3; n] \cup [n-2; n+2]$; k) $(-\infty; n] \cap [n; \infty)$; l) $(n; n+1) \cap (n; n+2)$.

6. Determinați două intervale a căror reuniune reprezintă intervalul $[4; 20)$ și a căror intersecție reprezintă intervalul $(7; 10]$. De ce nu pot fi mai multe alegeri?

7. Determinați intervalul I care îndeplinește condițiile:

- a) $I \cup [-3; 4) = [-3; 6]$ și $I \cap [-3; 4) = (-1; 4)$; b) $I \cap [-1; 7] = [0; 4]$; c) $I \cup [-3; 5] = [-4; 6]$.

8. Determinați numerele reale a și b , cu $a < b$, dacă:

- a) $[a; b] \cap [-3; 4] = [-3; 2]$; b) $(a; b) \cap \mathbb{Z} = \{4\}$; c) $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{-1; -2\}$; d) $[a; b) \cap [-3; 4] = [-1; 3)$.

$$\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$



Reflectăm!

Proprietățile relației de inegalitate:

1. Oricare ar fi numerele reale a, b, c , dacă $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$.
2. Oricare ar fi numerele reale a, b, c , dacă $a \leq b$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot c$ dacă $c > 0$ și $a \cdot c \geq b \cdot c$ dacă $c < 0$.
3. Oricare ar fi numerele reale a, b, c , cu $c \neq 0$, dacă $a \leq b$, atunci $a:c \leq b:c$ dacă $c > 0$ și $a:c \geq b:c$ dacă $c < 0$.
4. Oricare ar fi numerele reale a, b, c, d , dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a + c \leq b + d$.

Proprietățile sunt valabile și pentru inegalitățile: $<, >$ și $\geq$.



Ne amintim!

Inecuația este o inegalitate între două expresii care conțin atât mărimi cunoscute, cât și necunoscute și care este verificată, de regulă, numai pentru anumite valori ale necunoscutelor. Valorile necunoscutelor pentru care inegalitatea este adevărată se numesc **soluții** ale inecuației.

O inecuație este formată din doi membri într-o relație de tipul $<$ (sau $>, \leq, \geq$): *membrul stâng* $< (>, \leq, \geq)$ *membrul drept*.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina valorile necunoscutei, dintr-o mulțime dată, pentru care inegalitatea este adevărată. Mulțimea soluțiilor unei inecuații se notează cu S .

Rezolvarea inecuațiilor presupune aplicarea de transformări prin echivalență asupra relațiilor de inegalitate, folosind proprietățile relației de inegalitate.



Descoperiți!

Rezolvați inecuația $3x - 12 \leq 0$			
în $\mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale)	în $\mathbb{Z}$ (mulțimea numerelor întregi)	în $\mathbb{Q}$ (mulțimea numerelor raționale)	în $\mathbb{R}$ (mulțimea numerelor reale)
$3x - 12 \leq 0 \mid +12$ (adunare în ambii membri cu 12)			
$3x \leq 12$	$3x \leq 12$	$3x \leq 12$	$3x \leq 12$
$3x \leq 12 \mid : 3 > 0$ (împărțirea ambilor membri la 3 care, fiind pozitiv, păstrează sensul inegalității)			
$x \leq 4$	$x \leq 4$	$x \leq 4$	$x \leq 4$
Soluția este formată din...			
...toate numerele naturale mai mici sau egale cu 4.	...toate numerele întregi mai mici sau egale cu 4.	...toate numerele raționale mai mici sau egale cu 4.	...toate numerele reale mai mici sau egale cu 4.
$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$	$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 4\}$	$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 4\}$	$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$	$S = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$	Nu avem posibilitatea de a descrie altfel mulțimea soluțiilor!	Mulțimea soluțiilor respectă descrierea unui interval, deci $S = (-\infty, 4]$

Rețineți!

Mulțimea soluțiilor inecuației conține toate valorile care îndeplinesc simultan condițiile:

- valorile verifică relația de inegalitate;
- valorile aparțin mulțimii de numere în care se caută soluțiile (precizată în enunț, de regulă).

În cazul rezolvării inecuațiilor în mulțimea numerelor reale, mulțimea soluțiilor poate fi exprimată prin intervale.

Exersăm împreună!

1. Rezolvați ecuațiile următoare, în mulțimile precizate:

- a) $x + 3 = 0$, în $\mathbb{Z}$; b) $4x - 2 = 0$, în $\mathbb{Q}$; c) $5 - 2x = 0$, în $\mathbb{N}$;
d) $0,5x + \frac{1}{3} = 0$, în $\mathbb{R}$; e) $x\sqrt{2} + \sqrt{8} = 0$, în $\mathbb{R}$; f) $\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 0$, în $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

- a) $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \in \mathbb{Z}$; e) $x\sqrt{2} + \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{R}$.

2. Rezolvați inecuațiile următoare, în mulțimile precizate:

- a) $x + 3 > 0$, în $\mathbb{Z}$; b) $4x - 2 \geq 0$, în $\mathbb{Q}$; c) $5 - 2x < 0$, în $\mathbb{N}$;
d) $0,5x + \frac{1}{3} \leq 0$, în $\mathbb{R}$; e) $x\sqrt{2} + \sqrt{8} < 0$, în $\mathbb{R}$; f) $\sqrt{3} - x\sqrt{2} \geq 0$, în $\mathbb{R}$.

Rezolvare: a) $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$; $S = \{-2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$;

e) $x\sqrt{2} + \sqrt{8} < 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} < -2\sqrt{2} \Leftrightarrow x < -2$; $S = (-\infty; -2)$.

3. Fără a aplica transformări ale inecuațiilor, ci doar ținând cont de mulțimile soluțiilor identificate la 2., precizați mulțimile soluțiilor inecuațiilor:

- a) $x + 3 \leq 0$, în $\mathbb{Z}$; b) $4x - 2 < 0$, în $\mathbb{Q}$; c) $5 - 2x \geq 0$, în $\mathbb{N}$;
d) $0,5x + \frac{1}{3} > 0$, în $\mathbb{R}$; e) $x\sqrt{2} + \sqrt{8} \geq 0$, în $\mathbb{R}$; f) $\sqrt{3} - x\sqrt{2} < 0$, în $\mathbb{R}$.

Rezolvare: a) Dacă inecuația $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$, deci $S = \{-2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$, atunci inecuația $x + 3 \leq 0$ are soluția $S = \{\dots, -4, -3\}$.

e) Dacă inecuația $x\sqrt{2} + \sqrt{8} < 0$ are soluția $S = (-\infty; -2)$, atunci inecuația $x\sqrt{2} + \sqrt{8} \geq 0$ are soluția $S = [-2; +\infty)$.

Rețineți!

Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$			
Inecuația	$ax + b \geq 0$	$-b$	2 cazuri, după semnul coeficientului lui x
$ax + b \geq 0$	$ax \geq -b$	$ax \geq -b$	$l: a > 0$ $x \geq -\frac{b}{a}$ $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
			$l: a < 0$ $x \leq -\frac{b}{a}$ $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$

Inecuațiile de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$, se numesc *inecuații de gradul I* (întâi), denumirea fiind datorată faptului că necunoscuta x este prezentă la puterea 1 ($x = x^1$); a și b se numesc *coeficienți*, iar b se numește și *termen liber* (semnifică faptul că nu este înmulțit cu necunoscuta).



Reflectăm!

A identifica o soluție (prin observare, intuiție și probă) nu asigură rezolvarea completă a unei inecuații (la fel la ecuații); rezolvarea completă presupune identificarea completă a mulțimii soluțiilor.



Observații

Considerăm inecuația $2x + 5 > 0$ și numerele $-2, 0, 3, \frac{1}{4}, \sqrt{3}$. Toate cele 5 valori verifică relația de inegalitate, însă:

– în cazul rezolvării inecuației în $\mathbb{N}$, vom accepta ca soluții doar pe 0 și 3, deci mulțimea soluțiilor conține aceste două valori ca elemente, dar poate conține și alte valori numere naturale; în fapt $S = \mathbb{N}$;

– în cazul rezolvării inecuației în $\mathbb{Z}$, vom accepta ca soluții doar pe $-2, 0$ și 3, deci mulțimea soluțiilor conține aceste trei valori ca elemente, dar poate conține și alte valori numere întregi; în fapt $S = \mathbb{Z} \cup \{-2, -1\}$;

– în cazul rezolvării inecuației în $\mathbb{Q}$, vom accepta ca soluții doar pe $-2, 0, 3$ și $\frac{1}{3}$, deci mulțimea soluțiilor conține aceste 4 valori ca elemente, dar poate conține și alte valori numere raționale; în fapt $S = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right) \cap \mathbb{Q}$ (adică toate numerele raționale din intervalul de numere reale obținut);

– în cazul rezolvării inecuației în $\mathbb{R}$, vom accepta ca soluții toate cele cinci valori, dar mulțimea soluțiilor poate conține și alte valori numere reale; în fapt $S = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.



Activitate în perechi

> Colaborați în pereche și explicați strategia folosită pentru a scrie câte o inecuație pentru fiecare dintre cazurile următoare:

- a) inecuația admite numărul 0 ca element al mulțimii soluțiilor;
b) inecuația admite intervalul $(-\infty; 4)$ ca mulțime a soluțiilor;
c) numărul -2 nu este element al mulțimii soluțiilor inecuației.

> Rezolvați inecuațiile $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ și $ax + b > 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \neq 0$, după modelul alăturat. Ce se întâmplă dacă $a = 0$?

**Acum știm,
deci putem rezolva!**

Rezolvați inecuațiile următoare în mulțimea numerelor reale:

a) $3 + 2x \geq 5$; b) $2x - 3 \leq -3x + 7$;

c) $(x - 1) + 2(x - 1) - 3(1 - x) < 6$.

Rezolvare: c) $(x - 1) + 2(x - 1) - 3(1 - x) < 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 + 2x - 2 - 3 + 3x < 6 \Leftrightarrow 6x - 6 < 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x < 12 \Leftrightarrow x < 2$; $S = (-\infty, 2)$.

**Reflectăm!**

Rezolvăm $(x - 1) + 2(x - 1) - 3(1 - x) < 6$ prin altă metodă:

$(x - 1) + 2(x - 1) - 3(1 - x) < 6 \Leftrightarrow (x - 1) +$

$+ 2(x - 1) + 3(x - 1) < 6$. Notăm $x - 1 = y$ și re-

zolvăm inecuația $y + 2y + 3y < 6 \Leftrightarrow 6y < 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y < 1$. Revenim la necunoscuta x și ob-

ținem $x - 1 < 1 \Leftrightarrow x < 2$ și $x \in \mathbb{R}$, rezultă că

mulțimea soluțiilor inecuației inițiale este $S = (-\infty, 2)$.

Metoda prin care se utilizează o notație suplimentară față de necunoscuta inițială este o metodă algebrică, bazată pe necunoscute auxiliare (secundare) și pe substituție (înlocuire). În cazul de față, necunoscuta inițială (principală) este x , necunoscuta auxiliară este y , unde $y = x - 1$, care înlocuiește peste tot în inecuația inițială expresia $x - 1$.

**Acum știm,
deci putem rezolva!**

Folosind notația $x - 3 \stackrel{\text{not}}{=} m$, rezolvați inecuația $x - 3 + 2(x - 3) - 2 \leq 5(x - 3) + 1$ în $\mathbb{R}$, prin metoda algebrică.

Atenție! Necunoscuta principală este x , deci rezolvarea presupune determinarea soluțiilor pentru x .

**Rețineți!**

Considerăm a un număr real, $a > 0$. În aceste condiții, a poate reprezenta o distanță. În imaginea următoare sunt evidențiate, într-un prim caz, toate punctele de pe axă cu proprietatea că au distanța față de origine mai mică sau egală cu a , corespunzând tuturor numerelor reale x cu proprietatea că $|x| \leq a$ și, în alt caz, toate punctele de pe axă cu proprietatea că au distanța mai mare decât a , corespunzând tuturor numerelor reale x cu proprietatea că $|x| > a$.

**Observații**

■ Pentru inecuația $5x + 2 \leq 0$ scădem din ambii membri 2, deci $5x + 2 - 2 \leq 0 - 2$, și obținem $5x \leq -2$.

■ Pentru inecuația $5x - 2 \leq 0$ adunăm în ambii membri 2, așadar $5x - 2 + 2 \leq 0 + 2$, și obținem $5x \leq 2$.

În ambele cazuri, rezolvarea inecuației continuă prin împărțirea ambilor membri la 5, care este pozitiv, deci nu se schimbă sensul inegalității.

**Exersăm împreună!**

1. Rezolvați inecuațiile următoare în mulțimea numerelor reale:

a) $2x + 8 \geq 0$; b) $2x + 5 \leq 0$; c) $4x + 22 > 0$; d) $x + \sqrt{7} < 0$.

Rezolvare: $2x + 8 \geq 0 \mid -8 \Leftrightarrow 2x \geq -8 \mid :2 \Leftrightarrow x \geq -4$; $S = [-4; +\infty)$.

2. Efectuați proba sau utilizați altă strategie prin care să verificați că valorile menționate sunt soluții ale inecuațiilor date (în $\mathbb{R}$):

a) $x = 0$ pentru $2017x + 0, (47) > 0$; b) $x = 1$ pentru $3x - \sqrt{10} > 0$.

Rezolvare: a) Înlocuim în inecuația $2017x + 0, (47) > 0$ pe x cu 0 și obținem $0, (47) > 0$, adevărat; $x = 0$ este soluție a inecuației $2017x + 0, (47) > 0$.

3. Completați, pentru a obține o afirmație adevărată:

Dacă inecuația $4x - 3 \geq 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$, atunci inecuația $4x - 3 < 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor

Rezolvare: Dacă inecuația $4x - 3 \geq 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$, atunci inecuația $4x - 3 < 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$.

**Observații**

■ Inecuația $3 + 2x \geq 5$ poate fi adusă la forma $ax + b \geq 0$ folosind:

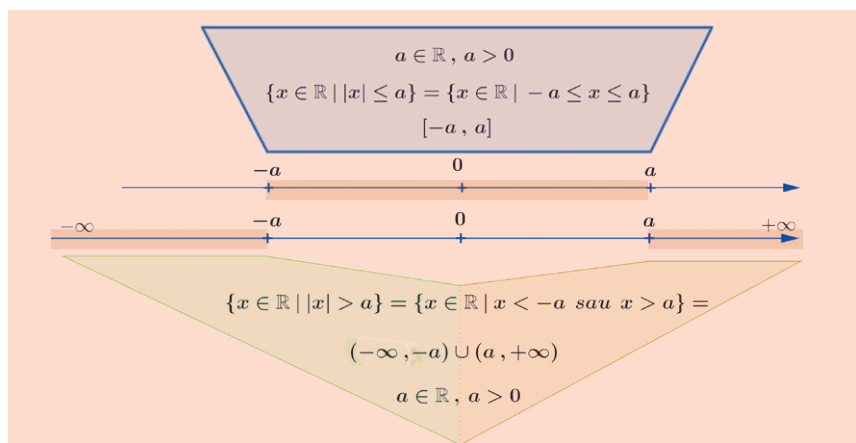
• proprietatea de comutativitate a adunării, $3 + 2x = 2x + 3$, deci inecuația se rescrie: $2x + 3 \geq 5$;

• scăderea cu 5 din ambii membri, $2x + 3 - 5 \geq 5 - 5$, de unde $2x - 2 \geq 0$.

■ Inecuația $2x - 3 \leq -3x + 7$ poate fi adusă la forma $ax + b \leq 0$ folosind:

• adunarea cu $3x$ în ambii membri, $2x - 3 + 3x \leq -3x + 7 + 3x$ și reducerea termenilor asemenea, $(2x + 3x) - 3 \leq (-3x + 3x) + 7$, obținând $5x - 3 \leq 7$;

• scăderea cu 7 din ambii membri, $5x - 3 - 7 \leq 7 - 7$ și reducerea termenilor asemenea, obținându-se $5x - 10 \leq 0$.



$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a; a), a > 0;$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a; a], a > 0;$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty), a > 0;$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty), a > 0.$$

Exersăm împreună!

Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $|x| \leq 3$; b) $|x| < 6$; c) $|x| < -2$; d) $|x| > 1$; e) $|x| \geq 4$; f) $|x| \geq -2$.

Rezolvare. a) $|x| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3; 3]$; b) $|x| < 6 \Leftrightarrow x \in (-6; 6)$, $S = (-6; 6)$;

c) $|x| < -2$, modulul unui număr real este un număr pozitiv, deci $S = \emptyset$;

d) $|x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; e) $|x| \geq 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$;

f) $|x| \geq -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; un număr pozitiv este mai mare ca unul negativ, $S = \mathbb{R}$.

Rețineți!

În condițiile în care $x_0 \in \mathbb{R}$ este un număr real dat (cunoscut) și $x \in \mathbb{R}$ este necunoscută, în tabel sunt evidențiați pașii de rezolvare pentru inecuațiile următoare, precum și interpretarea pe axa numerelor:

Cazuri	$d \in \mathbb{R}, d \geq 0$ (rol de distanță)		$d \in \mathbb{R}, d > 0$ (rol de distanță)	
Inecuație	$ x - x_0 \leq d$	$ x + x_0 \leq d$	$ x - x_0 < d$	$ x + x_0 < d$
Pas 1	$-d \leq x - x_0 \leq d$	$-d \leq x + x_0 \leq d$	$-d < x - x_0 < d$	$-d < x + x_0 < d$
Pas 2	$x_0 - d \leq x \leq x_0 + d$	$-x_0 - d \leq x \leq -x_0 + d$	$x_0 - d < x < x_0 + d$	$-x_0 - d < x < -x_0 + d$
Pas 3	$S = [x_0 - d; x_0 + d]$	$S = [-x_0 - d; -x_0 + d]$	$S = (x_0 - d; x_0 + d)$	$S = (-x_0 - d; -x_0 + d)$
Observație	Dacă $d = 0$, $S = \{x_0\}$		Dacă $d \leq 0$, $S = \emptyset$	
	Dacă $d < 0$, $S = \emptyset$			
Notatii	$A(x)$ punct oarecare de pe axa numerelor, de abscisă x ; $B(x_0)$ punct fixat de pe axa numerelor, de abscisă x_0 ; $C(-x_0)$ punct fixat de pe axa numerelor, de abscisă $-x_0$;			
Interpretare geometrică în raport cu axa numerelor	$AB \leq d$	$AC \leq d$	$AB < d$	$AC < d$
	Toate punctele A situate la o distanță mai mică sau egală cu d față de B .	Toate punctele A situate la o distanță mai mică sau egală cu d față de C .	Toate punctele A situate la o distanță mai mică decât d față de B .	Toate punctele A situate la o distanță mai mică decât d față de C .

Acum știm, deci putem rezolva!

Ce interpretare geometrică, în raport cu axa numerelor reale, putem da scrierii $|x - 2| < 1$, unde $x \in \mathbb{R}$? Dar scrierii $|2x + 1| \leq 3$, unde $x \in \mathbb{R}$?

Rezolvare: $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, ceea ce corespunde intervalului (1, 3). Observăm că 2 corespunde mijlocului segmentului determinat de capetele de abscise 1 și 3. Astfel, pe axă, mulțimea soluțiilor reprezintă toate punctele aflate la distanță mai mică decât 1 față de numărul 2. Pentru cazul $|2x + 1| \leq 3$ putem împărți relația prin 2, $2 > 0$, ținând cont și de proprietățile modului, și obținem prin echivalență relația $|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}$, pe care o aducem la forma $|x - (-\frac{1}{2})| \leq \frac{3}{2}$. Soluțiile inecuației au ca reprezentare, pe axa numerelor, punctele aflate la distanță mai mică sau egală cu $\frac{3}{2}$ față de punctul de abscisă $-\frac{1}{2}$.

Cazuri	$d \in \mathbb{R}, d \geq 0$ (rol de distanță)		$d \in \mathbb{R}, d > 0$ (rol de distanță)	
Semnificația geometrică a mulțimii soluțiilor	În notațiile $M(x_0 - d), M'(x_0 + d), P(-x_0 - d)$ și $P'(-x_0 + d)$ obținem ca reprezentare pe axă a mulțimii soluțiilor:			
	segmentul $[MM']$ de lungime $2d$ ce admite punctul B drept mijloc, $MB = BM'$.	segmentul $[PP']$ de lungime $2d$ ce admite punctul C drept mijloc, $PC = CP'$.	segmentul (MM') de lungime $2d$ ce admite punctul B drept mijloc, $MB = BM'$.	segmentul (PP') de lungime $2d$ ce admite punctul C drept mijloc, $PC = CP'$.



Activitate pe grupe

Completați pașii de rezolvare a inecuațiilor în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$, precum și interpretarea geometrică reprezentând pe axă mulțimile soluțiilor: a) $|x - 4| \leq 2$; b) $|x + 2| \leq 4$; c) $|x - 1| < 5$; d) $|x + 5| < 1$.



Observații

La geometrie, punctul stă la baza oricărei construcții geometrice, este o noțiune primară (la fel ca numărul în aritmetică) și nu are dimensiune. Puteți explica astfel de ce segmentele $[MM']$ și (MM') au aceeași lungime, deși $[MM'] \neq (MM')$!



Reflectăm!

Andrei vrea să afle toate numerele reale care au proprietatea că, dacă la 3 adunăm dublul unui astfel de număr, rezultatul este cel puțin egal cu 5. El își amintește etapele de rezolvare a unei astfel de probleme și redactează astfel:

Pasul 1.

Identificarea cunoscutelor și necunoscutelor

Notez cu x numerele care trebuie să îndeplinească toate condițiile problemei.

Precizez ce tip de numere caut: $x \in \mathbb{R}$.

Pasul 2.

Scrierea relațiilor corespunzătoare datelor problemei

$3 + 2x \geq 5$, unde condiția *cel puțin egal cu 5* este echivalentă cu *mai mare sau egal cu 5*.

Pasul 3.

Încadrarea relațiilor într-un context teoretic învățat

Am de rezolvat în mulțimea numerelor reale inecuația $3 + 2x \geq 5$.

Cunosc faptul că pot aplica transformări ale relației adunând sau scăzând din ambii membri o aceeași valoare, respectiv înmulțind sau împărțind ambii membri printr-un același număr nenul, dar în acest caz ținând cont de semnul numărului.

Știm că soluțiile unei inecuații în mulțimea numerelor reale reprezintă o mulțime de tip interval.

Pasul 4.

Etapă de rezolvare (construcția soluțiilor)

$3 + 2x \geq 5 \quad | -3$ (scad din ambii membri 3, ca să separ cunoscutele de necunoscute)

$2x \geq 2 \quad | : 2$ (reduc termenii asemenea)

$x \geq 1$ și $x \in \mathbb{R}$ (împart ambii membri prin 2, mai mare ca 0, deci nu modifică sensul inegalității); $S = [1, +\infty)$

Pasul 5.

Etapă de verificare (proba)

Nu pot verifica fiecare număr care aparține mulțimii obținute în relația inițială, dar pot:

- fie să testez cu câteva numere, de exemplu capătul finit al intervalului, un alt număr din intervalul obținut și un număr care nu aparține intervalului;
- fie să mă folosesc de proprietatea că dublul oricărui număr mai mare sau egal cu 1 reprezintă un număr mai mare sau egal cu 2, la care, adăugând 3, obținem un număr mai mare sau egal cu 5, ceea ce îmi spune că valorile din interval verifică toate condițiile problemei.

Pasul 6.

Formularea răspunsului

Numerele reale care îndeplinesc condițiile date sunt toate numerele reale mai mari sau egale cu 1, adică orice număr real din intervalul $[1, +\infty)$.

Vă propunem să rezolvați următoarele exerciții individual, apoi explicând unui coleg strategia folosită.

Exersăm împreună!

1. Determinați toate numerele reale care au proprietatea că triplul unui astfel de număr din care se scade 5 reprezintă un număr cel mult egal cu 10.

Rezolvare: Notez cu x numerele care trebuie să îndeplinească toate condițiile problemei, $x \in \mathbb{R}$. Atunci, $3x - 5 \leq 10 \Leftrightarrow 3x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq 5$; $S = (-\infty; 5]$.

2. Determinați toate numerele reale care au proprietatea că sfertul unui astfel de număr la care se adună 3 reprezintă un număr mai mare decât 1.

Rezolvare: Notez cu x numerele care trebuie să îndeplinească toate condițiile problemei, $x \in \mathbb{R}$. Atunci, $\frac{x}{4} + 3 > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} > -2 \Leftrightarrow x > -8$; $S = (-8; +\infty)$.

3. Determinați toate numerele reale mai mari sau egale cu 1 care au proprietatea că dublul unui astfel de număr din care se scade 10 reprezintă un număr mai mic decât -2 .

Rezolvare: Notez cu x numerele care trebuie să îndeplinească toate condițiile problemei, $x \geq 1, x \in \mathbb{R}$. Atunci, $2x - 10 < -2 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$. Soluția inecuației este $x \in (-\infty; 4)$, dar condiția problemei este $x \in [1; +\infty)$.

Așadar, soluția problemei este $x \in [1; +\infty) \cap (-\infty; 4) = [1; 4)$.



Reflectăm!

Fie relația $\frac{3}{2x-1} \leq 0$. Ce condiții de bună definire trebuie să impunem?

Observăm că singura operație care necesită condiții prin care să asigurăm buna definire (*existența* sau faptul că are *sens matematic*) este operația de împărțire din cadrul raportului. Astfel, raportul $\frac{3}{2x-1}$ este bine definit dacă numitorul este diferit de 0, deci punem condiția $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Așadar, fracția (raportul) $\frac{3}{2x-1}$ este bine definită (are sens) pentru oricare $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.



Rețineți!

Etapele de rezolvare, în $\mathbb{R}$, a inecuațiilor de forma $\frac{a}{bx+c} < 0$ ($>$, $\leq$, $\geq$), unde $b \in \mathbb{R}^*$, $a, c \in \mathbb{R}$ sunt:

Inecuația	$\frac{a}{bx+c} < 0$ ($>$, $\leq$, $\geq$)
Pas 1.	Scrierea și, eventual, rezolvarea condiției de existență asupra numitorului: $bx + c \neq 0$
Pas 2.	Stabilirea semnului numărătorului sau dacă acesta este 0.
Pas 3.	Impunerea semnului numitorului astfel încât raportul semnelor numărătorului și numitorului să aibă ca rezultat o fracție ce îndeplinește condiția problemei.
Pas 4.	Scrierea mulțimii soluțiilor ca rezultat al intersecției mulțimilor rezultate la pașii anteriori.



Reflectăm!

➤ Produsul dintre două numere (expresii) este pozitiv dacă ambii factori ai produsului au același semn.

➤ Produsul dintre două numere (expresii) este negativ dacă factorii produsului au semne opuse.

➤ Raportul dintre două numere (expresii) este pozitiv dacă numărătorul și numitorul au același semn.

➤ Raportul dintre două numere (expresii) este negativ dacă numărătorul și numitorul au semne opuse.

➤ Un produs este 0 dacă cel puțin unul dintre factorii săi este 0.

➤ Un raport este 0 dacă numărătorul este 0.

➤ Într-un raport, numitorul nu poate fi 0.



Acum știm, deci putem rezolva!

Fie relația alăturată, $\frac{3}{2x-1} \leq 0$. Dacă x este o variabilă reală, care este mulțimea de valori ale lui x pentru care raportul este mai mic sau egal cu 0?

Enunțul implică rezolvarea unei inecuații pe mulțimea numerelor reale, cu particularitatea că membrul stâng este o fracție care trebuie să fie negativă sau egală cu 0. Cum numărătorul este 3, diferit de 0, rezultă că fracția nu poate fi egală cu 0. De asemenea, cum $3 > 0$ (pozitiv), pentru ca fracția să fie negativă, trebuie ca numitorul să fie de semn opus numărătorului, deci $2x - 1 < 0$. Am redus studiul la o inecuație de forma $ax + b < 0$.

$2x - 1 < 0$ | +1 echivalent cu $2x < 1$, de unde, prin împărțirea ambilor membri prin 2, $2 > 0$, rezultă $x < \frac{1}{2}$, adică $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$. Ținând cont că mulțimea de valori în care căutăm răspunsul, în urma impunerii condiției de existență, este $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, rezultă mulțimea soluțiilor $S = (-\infty; \frac{1}{2})$.



Observație

Se poate remarca faptul că putem corela condiția de existență (numitor diferit de 0) cu condiția de semn a numărătorului, astfel că impunerea doar a condiției $2x - 1 < 0$ le include pe cele menționate anterior (*optimizarea rezolvării*). Totuși, este recomandabil ca, într-o astfel de abordare, să faceți precizarea că rezolvarea ține cont de buna definire a fracțiilor, scriind condițiile de existență fără neapărat a le rezolva.



Activitate în perechi

➤ Identificați și explicați diferențele dintre inecuațiile $\frac{3}{2-5x} \leq 0$ și $\frac{2-5x}{3} \leq 0$, apoi rezolvați în $\mathbb{R}$ fiecare dintre inecuațiile date.

➤ Analizați și formulați o strategie de rezolvare a inecuației $\frac{x-3}{2} \leq 1$. Cum se modifică strategia de rezolvare în cazul inecuației $\frac{2}{x-3} \leq 1$?



Exersăm împreună!

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $\frac{1}{x-1} < 0$; b) $\frac{2}{x+3} \geq 0$; c) $\frac{3}{4x} \leq 0$; d) $\frac{-4}{2x+3} < 0$; e) $\frac{-5}{x+4} > 0$;
 f) $-\frac{6}{12x-18} \geq 0$; g) $\frac{7}{2-x} \leq 0$; h) $\frac{3^0-1}{3x+1} \geq 0$; i) $\frac{\sqrt{27}-3\sqrt{3}}{x} < 0$.

Rezolvare: a) $\frac{1}{x-1} < 0$. Cum $1 > 0$, fracția este negativă dacă $x-1 < 0$. Această condiție include și condiția de existență a fracției: $x-1 \neq 0$; $S = (-\infty; 1)$;

i) $\frac{\sqrt{27}-3\sqrt{3}}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{0}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < 0$, fals; $\emptyset$.

2. Precizați valoarea de adevăr a enunțului următor: Inecuația $\frac{-4}{2x-3} \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, este echivalentă cu inecuația $\frac{4}{2x-3} \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Argumentați.

Exersați

1. Efectuați proba sau utilizați altă strategie prin care să verificați că valorile menționate sunt soluții ale inecuațiilor date (în $\mathbb{R}$):

a) $x = 4$, pentru $5x - 2 \geq 3$; b) $x = 2$, pentru $2x - 4 > 0$; c) $x = -\frac{2}{3}$, pentru $\frac{4}{3}x + 0,2 \leq 0$; d) $x = \sqrt{5}$, pentru $x\sqrt{5} - 2,3 \leq 0$.

2. Completați, pentru a obține afirmații adevărate:

a) Dacă inecuația $3x - 2 < 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = (-\infty; \frac{2}{3})$, atunci inecuația $3x - 2 \geq 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor

b) Dacă inecuația $5 - 2x > 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = (-\infty; \frac{5}{2})$, atunci inecuația $5 - 2x \geq 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor

c) Dacă inecuația $4x - 8 \leq 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = (-\infty; 2]$, atunci inecuația $4x - 8 < 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor

d) Dacă inecuația $3 - 3x \geq 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor $S = (-\infty; 1]$, atunci inecuația $3 - 3x < 0$ admite în $\mathbb{R}$ mulțimea soluțiilor

3. Rezolvați inecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $10x - 5 \geq 0$; b) $2x - 9 \leq 0$; c) $4x - 12 > 0$; d) $x - \sqrt{8} < 0$;
 e) $\frac{1}{2}x + 3 \geq 0$; f) $5x + 0,2 < 0$; g) $0,3x + 1, 2x > 0$; h) $2x\sqrt{2} + \sqrt{6} \leq 0$.

4. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \frac{x-2}{3} \leq 1\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{2x-1}{5} < 3\}$; c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < \frac{3x+10}{2} \leq 5\}$.

Indicație: a) $-2 \leq \frac{x-2}{3} \leq 1 \mid \cdot 3 \Leftrightarrow -6 \leq x-2 \leq 3 \mid +2 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 5$; $A = [-4; 5]$.

5. Rezolvați inecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $\frac{-4}{x+3} \geq 0$; b) $\frac{1}{-3x-8} \leq 0$; c) $\frac{-2}{4x-6} > 0$; d) $-\frac{x}{2} + 5 < 0$.

6. Aduceți la forma $ax + b \geq 0$ sau echivalentă ($\leq, <, >$), unde $a \neq 0$, inecuațiile următoare, apoi rezolvați-le în mulțimea numerelor reale:

a) $4x + 1 < 3$; b) $2x + 6 \geq 3 - x$; c) $8x + 3 > 9x - 4$; d) $3(x + 1) \leq x + 3$; e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$;
 f) $2x - 1 < 2x + 3$; g) $4 - x \geq 5 - x$; h) $\frac{x-2}{3} \leq \frac{x}{3} + 7$; i) $3(1 - 2x) \geq 3(1 - x) - 3x$; j) $x\sqrt{8} + 1 < 2x\sqrt{2} + 2^0$.

7. Folosind notațiile date, rezolvați inecuațiile următoare, în $\mathbb{R}$, prin metoda algebrică:

a) $3(1 - x) - 4(x - 1) + 1 > 3x - 3$; notația $x - 1 = a$; b) $x + (-x) - 2(-x) \geq 3(-x) - (-x) - 2 \cdot [1 - (-x)]$; notația $-x = t$;
 c) $\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}(2x - 1) + 2 < 3(\frac{1}{6} - \frac{x}{3})$; notația $x - \frac{1}{2} = b$; d) $2 \cdot (3x - \sqrt{3}) + 2 \geq \sqrt{3}(x\sqrt{3} - 1) + \sqrt{3}$; notația $x\sqrt{3} - 1 = t$.

8. Activitate în pereche

Pornind de la inecuația în necunoscuta t , $t \in \mathbb{R}$, $3(t - 2) + 2 \cdot [-(3t + 1) - 2] + 1 \geq 2t - 5$, rezolvați inecuația corespunzătoare, în necunoscuta x , știind că $t \stackrel{\text{def}}{=} 2x + 1$. Ce strategie de rezolvare ați utilizat?

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile următoare și interpretați geometric în raport cu axa numerelor reale:

a) $|4x - 2| < 3$; b) $|2x + 5| \leq 1$; c) $|1 - 2x| < 4$; d) $|x\sqrt{2}| \leq 1$;
 e) $|4 - 2x| \geq 0$; f) $|3 - 5x| \leq 0$; g) $|1 - 4x| > 0$; h) $|-x\sqrt{5}| < 0$.

Recapitulare

Pentru exercițiile 1-4, completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

1. Scrierea mulțimii $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ sub formă de interval este

2. Numerele întregi din intervalul $[-4; 4]$ sunt

3. Suma dintre cel mai mic și cel mai mare element al intervalului $[-3; 5]$ este egală cu

4. Soluția, în mulțimea numerelor reale, a inecuației $3x - 5 \geq -2$ este intervalul

5. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2, (5) \in [2; 3]$; b) $(-4; 4] \subset [-4; 5]$; c) $(0; 5) \subset \mathbb{N}$;

d) $(0; 5) \subset \mathbb{R}$; e) $-2 \in (-3; -2]$; f) $2 \in [0; 4]$;

g) $\sqrt{5} \in [2; 3]$; h) $\pi \in (-3; 4)$; i) $(-3; 3) \subset [-3; 3]$;

j) $\{0; 3\} \subset [0; 3]$; k) $(-\infty; 3) \subset (-\infty; 4)$;

l) $\frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{5}{11 \cdot 16} \in (\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$.

6. Scrieți câte trei numere reale care aparțin intervalelor indicate: a) $(-1; 1)$; b) $[2; 3]$; c) $(3; +\infty)$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) $5^0 + 100 : 5^2 \in [-1; 5]$; b) $-1, 5 - 6^0 \in [-2; 4]$;

c) $10^{37} \notin (0; +\infty)$; d) $2 + 2^2 - 2^3 \in [-1; 9]$.

8. Reprezentați pe axa numerelor mulțimile de numere reale care satisfac relațiile:

a) $x \leq -4$; b) $x \geq 0$;

c) $x < 6$ și $x > -8$; d) $x \leq -4$ sau $x \geq 1$.

9. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$,

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$,

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 1 - \sqrt{2}\}$,

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| \geq 2\sqrt{3} - 5\}$.

10. Determinați:

a) cel mai mic număr întreg din intervalul $[-3; 2,5]$;

b) cel mai mare număr întreg din intervalul $[-4; 3\sqrt{3}]$;

c) numărul de numere întregi din intervalul $[-7; 6]$;

d) suma numerelor întregi din intervalul $(-5; 6)$;

e) suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr întreg din intervalul $(-3; 3]$;

f) diferența dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalul $[-\frac{23}{7}; 5)$.

11. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| \leq 5\}$.

a) Calculați suma numerelor întregi din intervalul A.

b) Dați un exemplu de număr irațional din intervalul B.

c) Efectuați: $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap \mathbb{Z}$, $A \cap B \cap \mathbb{N}$.

12. Calculați:

a) $(-\infty; 4] \cup (0; 5)$;

b) $(-10; 5) \cap [0; 2]$;

c) $[2; +\infty) \cap (3; 8)$;

d) $(-2; 5] \cap \{-2; 5\}$;

e) $[-3; 0] \cap [0; 8]$;

f) $(-1; 5] \cap (6; 12]$;

g) $(-\frac{9}{13}; \frac{6}{13}) \cap (-\frac{8}{13}; \frac{7}{13})$; h) $(-\frac{18}{25}; \frac{17}{18}) \cup [0; \frac{47}{13})$.

13. Fie $A = [-2; 5]$ și $B = (-5; 2]$.

Efectuați: $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap \mathbb{N}$, $A \cap B \cap \mathbb{Z}$.

14. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| \leq 7\}$ și

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{6x + 12}{6} < 7\}$. Calculați: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap B \cap \mathbb{Z}$.

15. Determinați cel mai mare număr real a și cel mai mic număr real b pentru care: $|x - 4| \leq 3$ și $x \in [a; b]$.

16. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0,5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| < 5\}$.

a) Scrieți mulțimile sub formă de intervale.

b) Determinați $\text{card}(B \cap \mathbb{Z})$.

c) Calculați $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cup C$.

17. Scrieți mulțimile sub formă de intervale și apoi efectuați $A \cap B$, $\text{card}(B \cap \mathbb{N})$, unde

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| \leq 8\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{2x + 3}{5} < 7\}$.

18. Fie mulțimile $A = [a; b]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x < d\}$, unde a este a 2025-a cifră a numărului 1,23(45), b este cel mai mic multiplu de două cifre al numărului a, c este soluția ecuației $\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = 1$ și d este cel mai mare număr întreg care verifică inecuația $\frac{-4}{2x-9} \geq 0$.

Determinați mulțimile A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \mathbb{Z}$, $B \cap \mathbb{N}$ și $A \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 6| \leq 15\}$.

19. Reprezentați pe axă punctele $M(-4)$, $N(3)$ și $P(5)$. Calculați lungimea segmentelor $[MN]$, $[NP]$ și $[MP]$. Dacă A este intervalul reprezentat pe desen de $[MN]$, B este intervalul reprezentat de (NP) , C este

intervalul reprezentat de (NP) , iar D este intervalul reprezentat de $[PM]$, determinați $A \cup B$, $B \cap C$, $C \cup D$, $A \cap D$, $(B \cup C) \cap D$, $(A \cap C) \cup (B \cap D)$ și $(A \cup D) \cap \mathbb{Z}_+$.

20. Determinați reuniunea și intersecția mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq \frac{2x-7}{3} \leq 1\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |3-4x| \leq 9\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-6)^2} < 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{8x+3}{4x-5} \leq 2\}$.

21. Verificați dacă:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \in [0, 5; 1]$; b) $\frac{2+5\sqrt{3}}{2} \in (4, 5; 6)$;

c) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{2023 \cdot 2025} \in (0; 1)$.

22. Calculați reuniunea și intersecția mulțimilor

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-4}{15-3x} \geq 0\}$ și $B = [a; b]$, unde perechea $(a; b)$ verifică expresia $\sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(6-b)^2} = 0$.

23. Dacă n este număr natural, scrieți sub formă de intervale mulțimile:

a) $(-\infty; n) \cup [n; +\infty)$;
b) $(-\infty; n] \cap (n; n+2)$; c) $[n+1; n+3) \cup (n+2; +\infty)$;
d) $(-n; n) \cap (-n^2; n^2)$; e) $(n; n+1) \cap (n; n+2)$.

24. Determinați numere naturale a, b , $a < b$, pentru care:

a) $(a; b) \cap \mathbb{N} = \{4\}$; b) $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{-5\}$;

c) $(a; b) \cap \mathbb{N} = \{1; 2\}$; d) $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{-2; -1\}$.

25. Arătați că, dacă numerele reale x și y verifică relația $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$, atunci $x \in [-3; 7]$ și $y \in [-6; 4]$.

26. a) Arătați că $a = \sqrt{(x-10)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \in \mathbb{N}$, pentru oricare $x \in (-2; 10)$.

b) Arătați că $a = \sqrt{(x-10)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \in \mathbb{N}$, pentru oricare $x \in (-2; 10)$.

Indicație: a) $a = \sqrt{(x-10)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = |x-10| + |x+2| = 10 - x + x + 2 = 12$ pentru $x \in (-2; 10)$.

27. a) Știind că $(a-3)^2 + (b+6)^2 = 16$, arătați că $a > b$.

b) Știind că $(a+4)^2 + (b+20)^2 = 25$, arătați că $a > b$.

Indicație: a) Dacă $(a-3)^2 + (b+6)^2 = 16$, atunci $(a-3)^2 \leq 16$ și $(b+6)^2 \leq 16$. Obținem $|a-3| \leq 4$ și $|b+6| \leq 4$, de unde $-1 \leq a \leq 7$ și $-10 \leq b \leq -2$.

28. Fie intervalul $I_n = [2 + \frac{5}{n}; 18 - \frac{5}{n}]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați intervalele $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$.

b) Calculați $I_2 \cap \mathbb{N}, I_5 \cap \mathbb{N}$.

c) Demonstrați că $I_n \subset I_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Test de autoevaluare

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-2; 4]$ este:

a) -2 ; b) -1 ; c) 0 ; d) 4 .

2. Scrisă sub formă de interval, mulțimea

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$ este:

a) $(-2; 3]$; b) $(-2; 3)$; c) $[-2; 3]$; d) $[-2; 3)$.

3. Intervalul $(-\infty; 0]$ este egal cu mulțimea:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

4. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $2x + 4 \geq -2$ este:

a) $(-\infty; 3]$; b) $(-\infty; -3]$; c) $[-3; +\infty)$; d) $[3; +\infty)$.

5. Numărul de numere întregi din intervalul $[-3; 3)$ este:

a) 5 ; b) 6 ; c) 7 ; d) 8 .

6. Reuniunea mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x + 2 < 6\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 6\}$ este:

a) $[-6; 6]$; b) $[-5; 4]$; c) $[-5; 6]$; d) $[-6; 4]$.

7. Suma modulelor numerelor întregi din intervalul $[-2; \sqrt{5})$ este egală cu:

a) -2 ; b) 0 ; c) 6 ; d) 10 .

8. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 9| \leq 6\}$ este egală cu:

a) $[-5; -1]$; b) $[1; 5]$; c) $(1; 5)$; d) $[-6; 6]$.

9. Soluția inecuației $\frac{2-3x}{3x+6} \leq -1$ este:

a) $[-2; +\infty)$; b) $(-\infty; -2)$; c) $(-2; +\infty)$; d) $(-\infty; -2]$.

Punctaj: 1p din oficiu; fiecare problemă 1p.

Temp de lucru: 35 de minute.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Am progresat în învățare prin parcurgerea acestui set de lecții	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitit înainte și după test pentru a îmbunătăți performanța

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare

Teste de evaluare

TEST 1

1. Reprezentați pe axa numerelor următoarele intervale:

a) $(-3; 4)$; b) $(-\infty; 0]$; c) $(2; +\infty)$.

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 8\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 8\}$.

3. Efectuați operațiile cu mulțimi:

a) $(-2; 4) \cup \{0; 1; 2; 3; 4\}$; b) $[-7; -2] \cap \mathbb{N}$;

c) $(-2; 3) \cup [-1; 5]$; d) $(4; 9) \cap [5; 7]$;

e) $[-1; 2) \cap [-5; -1]$; f) $(-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $1 - 3x \leq 7$; b) $3x - 5 \geq 2(x + 2) - 8$;

c) $|x + 3| \leq 7$; d) $\frac{2x-1}{4} - \frac{3x+2}{2} \geq 1$.

5. Determinați numerele reale a și b pentru care:

a) $[a; 1] \cup [-1; b] = [-6; 5]$; b) $[-6; a) \cap (b; 6] = (-3; 2)$.

Punctaj. 1p din oficiu, 1. 1,5p; 2. 1,5p; 3. 3p; 4. 2p; 5. 1p.

Timp de lucru: 50 de minute.

TEST 2

1. Reprezentați pe axa numerelor următoarele mulțimi:

a) $(-1; 1) \cup [2; 3]$; b) $(-8; 0] \cap \mathbb{N}$; c) $(-2; +\infty) \cap \mathbb{Z}$.

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \text{ și } x \leq 4\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ sau } x \geq 5\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 3\}$.

3. Efectuați operațiile cu mulțimi:

a) $(-2; 4) \cap \{0; 1; 2; 3; 4\}$; b) $[-7; -2] \cap (-7; -2)$;

c) $(-5; 1) \cup [-1; 5]$; d) $(4; 9) \cap [6; 7]$;

e) $[-1; 2) \cap [-5; -1] \cap \mathbb{N}$;

f) $(-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \cup [-6; 0]$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $\frac{1-3x}{-2} \leq 4$; b) $\frac{-5}{2x+1} \geq 0$; c) $|-2x+3| \leq 2$;

d) $\frac{x-1}{2} + \frac{1-x}{3} + \frac{2x-2}{5} \leq \frac{17}{30}$.

5. Determinați numerele întregi a și b pentru care:

a) $[a; b] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x + 3 \leq 4\}$ și $\{-6; 1\} \subset [a; b]$;

b) $[a; b] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 1\}$ și $3 \in [a; b]$.

Punctaj. 1p din oficiu, 1. 1,5p; 2. 1,5p; 3. 3p; 4. 2p; 5. 1p.

Timp de lucru: 50 de minute.

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. Folosiți semnele $\in$ (aparține) sau $\notin$ (nu aparține) pentru a completa enunțurile următoare, astfel încât să reprezinte afirmații adevărate:

a) $1 \dots \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3\}$;

b) $-3 \dots \{(-3)^0, (-3)^1, (-3)^2\}$;

c) $\frac{9}{2} \dots \{1; 1, 5; 2; 2, 5; 3; 3, 5; 4; 4, 5; 5\}$;

d) $0, 1(3) \dots \left\{\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{1}{15}, \frac{4}{45}, \frac{5}{45}\right\}$;

e) $\sqrt{2} \dots \{1; 1, 4; 1, 41; 1, 42; 1, 5; 2\}$.

2. În fiecare caz, dați exemplu de element al mulțimii:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 4\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x - 1 = x - (-3)\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2(1 - x) \leq -5\}$.

3. Se consideră intervalele de numere reale $I = [2; 5]$, $J = [2; 5)$, $K = (-\infty; 2]$ și $L = [2; +\infty)$.

a) Stabiliți valoarea de adevăr a enunțurilor următoare:

i. $\sqrt{10} \in I$; ii. $\frac{4\sqrt{6}}{3} \in J$; iii. $(-2)^{2019} \in K$; iv. $(-2)^{2019} \in L$.

b) Reprezentați intervalele date.

c) Folosind eventual reprezentările pe axă, efectuați următoarele operații cu intervale:

i. $I \cup J$; $J \cup K$; $I \cup L$; ii. $I \cap J$; $I \cap K$; $I \cap L$; $J \cap K$; $J \cap L$; $K \cap L$.

d) Rescrieți intervale ca mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor.

4. Precizați care dintre mulțimile următoare sunt intervale de numere reale, apoi pe cele care îndeplinesc condiția de interval scrieți-le sub formă de interval:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 8\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\}$;
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x \leq -\frac{1}{2}\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$;
 e) $E = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid -\infty < x < 3\}$; f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < +\infty\}$;
 g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq -1\}$; h) $H = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 2\}$.

5. Rezolvați inecuațiile în mulțimea numerelor reale:

- a) $3x - 2 \leq x + 7$; b) $-2(1 - 2x) < 3x + \frac{1}{2}$;
 c) $\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x-1}{4} + 2$; d) $0, 3x + 0, 1 \geq 0$;
 e) $\frac{x-2}{2} + 2x - 1 > \frac{1-x}{5} + 0, 5$; f) $x + 1 < \frac{2(x+2)}{3} - \frac{3(2-x)}{2}$;
 g) $|2x - \sqrt{2}| \leq 2 + \sqrt{2}$; h) $|x - 5| \geq 3$.

6. Rezolvați inecuațiile în mulțimea numerelor reale, asigurându-vă că operațiile matematice implicate sunt bine definite:

- a) $\frac{1}{x+2} < 3$; b) $\frac{2(x+2)}{3(x+2)} < 2$;
 c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+1} < \frac{3}{x+1}$; d) $|\frac{1}{x}| + 2 < |\frac{5}{x}|$.

7. Dați exemplu de interval închis de numere reale care are proprietatea că produsul valorilor de la capete este egal cu -288 , capetele fiind exprimate prin numere întregi. Comparați exemplele la nivelul clasei. Explicați de ce pot fi mai multe răspunsuri. Câte intervale distincte îndeplinesc condiția problemei? Explicați strategia de rezolvare.

8. Dați exemplu de interval:

- a) în care cel mai mare element natural este 5;
 b) deschis, care conține exact 10 numere întregi, nu toate pozitive;
 c) închis, care are proprietatea că media geometrică a capetelor sale este egală cu 6;
 d) care conține orice număr întreg mai mare decât 5;
 e) care conține orice număr natural cel mult egal cu 5;
 f) care este inclus în intervalul $[2, 3]$;
 g) care este inclus în intervalul $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$;
 h) care are capetele egale;
 i) care nu conține pe 3, dar conține pe 4.

9. Se consideră egalitatea următoare:

$[a, a+2) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < 8 - a\}$. Determinați valoarea reală a numărului a . Explicați raționamentul folosit.

Activitate pe grupe

Activitate pe 10 grupe de elevi:

Se consideră numerele reale a, b, c și d , cu proprietatea că $a < b$ și $c < d$, precum și intervalele $I_1 = [a; b]$, $I_2 = (a; b)$, $I_3 = [a; b)$ și $I_4 = (a; b]$, respectiv $J_1 = [c; d]$, $J_2 = (c; d)$, $J_3 = [c; d)$ și $J_4 = (c; d]$. Cele 10 grupe de elevi vor primi spre studiu următoarele perechi de intervale:

G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
I_1, J_1	I_1, J_2	I_1, J_3	I_1, J_4	I_2, J_2	I_2, J_3	I_2, J_4	I_3, J_3	I_3, J_4	I_4, J_4

În funcție de ordinea valorilor a, b, c și d , inclusiv considerând că unele dintre ele pot fi și egale, fiecare grupă va studia rezultatul operațiilor de reuniune și intersecție pentru perechea de intervale repartizată.

Pentru a veni în sprijinul vostru, evidențiem cazurile ordonării celor 4 numere:

$a < b < c < d$	$a < b = c < d$	$a < c < b < d$	$a = c < b < d$	$c < a < b < d$	$a < b < c = d$
		$a < c < b = d$	$a = c < b = d$	$c < a < b = d$	
		$a < c < d < b$	$a = c < d < b$	$c < a < d < b$	
				$c < a = d < b$	$c < d < a < b$

Formulați concluzii privind:

- tipurile de rezultate ale reuniunii: un singur interval, două intervale;
- tipurile de rezultate ale intersecțiilor: mulțimea vidă, mulțime formată dintr-un punct, interval cu capete distincte;

Prezentați rezultatele la nivelul clasei.

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

*Tot ce e gândire corectă este
sau matematică,
sau susceptibilă de
matematizare.*



„Învățând matematică, înveți să gândești.”

Grigore C. Moisil (1906–1973)



Operații cu numere reale reprezentate prin litere



Ne amintim!

A. La cumpărături, Andreea a pus în coș 2 kg de mere și 3 borcane cu iaurt. Se gândește ce sumă de bani ar fi necesară pentru a achita produsele, însă trebuie să se întoarcă la rafturile cu produse să afle prețurile sau să folosească un cititor de coduri de bare!

Ce știm (cunoscute):

Numărul kilogramelor de mere: 2

Numărul borcanelor de iaurt: 3

Ce nu știm și putem nota prin trei litere:

Prețul unui kilogram de mere – x (lei)

Prețul unui borcan de iaurt – y (lei)

Suma totală de plată – s (lei)

Ce relații putem scrie între cunoscute și necunoscute?

$$s = 2x + 3y$$

B. Fie punctele distincte A , B și C pe o dreaptă, astfel încât C să se afle între A și B . Pe o altă dreaptă, Andrei are de construit un segment a cărui lungime este suma dintre dublul lungimii segmentului AB și triplul lungimii segmentului BC . Cum va proceda?

Ce știm:

Ce reprezintă dublul (de două ori)

Ce reprezintă triplul (de trei ori)

Ce nu știm:

Lungimea segmentului AB : x (cm)

Lungimea segmentului BC : y (cm)

Lungimea întregului segment de construit: l (cm)

Ce relații putem scrie?

$$l = 2x + 3y$$

Observații

Utilizăm litere, de regulă litere mici ale alfabetului, pentru a nota necunoscutele dintr-o problemă (litere diferite pentru necunoscute diferite).

În cazurile evidențiate anterior, literele *ascund* numere pe care, din datele problemelor, nu le cunoaștem inițial.

Definiție

O *expresie algebrică* este o scriere ce conține numere și litere (necunoscute) legate între ele prin simboluri ce corespund operațiilor matematice (adunare, înmulțire etc.). Numerele reprezintă *coeficienții* expresiei și literele reprezintă *partea literală* a expresiei.

Exersăm împreună!

În scrierea $2x + 3y$ putem efectua calculul numai când știm valorile ce corespund celor două necunoscute, x și y !

Calculați $E(1; 2)$ și $E(-3; -4)$ pentru $E(x, y) = 2x + 3y$.

Rezolvare: Atribuim necunoscutei x valoarea 1 și necunoscutei y valoarea 2, deci $E(1; 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$. Efectuați calculul pentru $E(-3; -4)$!



Activitate în perechi

În cadrul perechii, alegeți fiecare câte una dintre problemele **A.** și **B.** Asociați valori corespunzătoare realității sau posibilității de reprezentare prin desen pe foaia caietului pentru necunoscutele x și y și determinați s , respectiv l .



Reflectăm!

O scriere ca cea alăturată se mai numește expresie algebrică și se poate nota $E(x, y) = 2x + 3y$, evidențindu-se în paranteză necunoscutele care intervin în calcul. Putem atribui (putem da, putem asocia) valori necunoscutelor dintr-o expresie și astfel să calculăm valoarea acesteia.

Exersăm împreună!

➤ Care sunt coeficienții și care este partea literală a expresiilor:

a) $E(x) = 12x^5$; b) $E(x, y) = 4x^2y^3$; c) $E(a, b, c) = a^4bc^6$; d) $E(x) = 20$?

Rezolvare: c) Pentru $E(a, b, c) = a^4bc^6$ coeficientul este 1 și partea literală este a^4bc^6 , implicând necunoscutele a, b și c ;

d) $E(x) = 20$, așadar coeficientul este 20 și partea literală este x^0 .

➤ Ana are cu 1 leu mai mult decât Maria. Ce sumă are fiecare fată, dacă dublul sumei Anei împreună cu triplul sumei Mariei reprezintă 52 de lei?

Rezolvare: Notând cu x suma de bani a Mariei, suma de bani a Anei este $x + 1$. Rezolvăm ecuația: $2(x + 1) + 3x = 52 \Leftrightarrow 2x + 2 + 3x = 52 \Leftrightarrow 2x + 3x = 50 \Leftrightarrow 5x = 50 \Leftrightarrow x = 10$. Așadar Ana are 11 lei și Maria are 10 lei.

Termenii $2x$ și $3x$ se numesc *termeni asemenea* (au aceeași necunoscută la aceeași putere), între aceștia putându-se efectua calcul de tip adunare sau scădere, denumit și *reducerea termenilor asemenea*.

Definiție

Doi termeni ai unei expresii algebrice se numesc *termeni asemenea* dacă au aceeași parte literală.



Exemple!

Termenii $3a^2$ și a^2 sunt asemenea. La fel și termenii $5ab$ și ba ! Termenii $2x$ și $2y$ nu sunt asemenea. La fel și termenii $2x$ și $2x^2$!

Exemple de reducere a termenilor asemenea:

$3a^2 + a^2 = (3 + 1)a^2 = 4a^2$; $5ab - ba = 5ab + (-1)ab = 4ab$. Am folosit proprietățile operațiilor studiate.



Exemple!

➤ $E(x) = 5x^3$ este o expresie algebrică formată dintr-un termen cu coeficientul 5 și partea literală x^3 . Această expresie depinde de o singură necunoscută: x .

➤ $E(x, y) = 2x + 3y$ este o expresie algebrică (care depinde de două necunoscute) formată din doi termeni, primul termen, $2x$, are coeficientul 2 și partea literală x , iar al doilea termen, $3y$, are coeficientul 3 și partea literală y .

➤ $E(x) = 4x + 8x - 5x$ este o expresie algebrică formată din trei termeni asemenea. Putem efectua calculele: $E(x) = x(4 + 8 - 5) = 7x$.



Reflectăm!

Am folosit în anii trecuți expresii algebrice?

➤ Știm că $2 + 3 = 3 + 2$ sau $5 + 6 = 6 + 5$. Adunarea numerelor este comutativă pentru orice numere reale. Exprimăm această proprietate astfel: $a + b = b + a$, oricare $a, b \in \mathbb{R}$.

➤ Aria unui dreptunghi o exprimăm pe scurt $A = L \cdot l$. De exemplu, dacă $L = 5$ cm și $l = 4$ cm, aria dreptunghiului este $A = 5 \cdot 4 = 20$ cm². Scrie și tu astfel de relații care să reprezinte calcul cu numere exprimate prin litere.

Citiți cu atenție informațiile din tabelul următor și formulați concluzii privind exemplele de calcul cu numere reprezentate prin litere. Prin aceste exemple v-ați reamintit reguli și proprietăți ale calculului numeric și ați putut observa că regulile și proprietățile operațiilor cu numere se pot aplica și calculului cu numere reprezentate prin litere.

Calcul numeric	Exemple de calcul cu numere reprezentate prin litere	Observații
$3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = (2 + 3) \cdot 7 = 5 \cdot 7$; $3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = (3 - 2) \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7$; $3 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = (3 - 3) \cdot 7 = 0 \cdot 7 = 0$;	$ax + bx = bx + ax = (a + b)x$; $ax - bx = (a - b)x$; $ax - ax = (a - a)x = 0 \cdot x = 0$;	comutativitatea adunării, factor comun, reducerea termenilor asemenea
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$; $5^3 \cdot 5^5 = 5^{3+5}$; $5^3 : 5^5 = 5^{3-5} = 5^{-2}$; $(5^3)^7 = 5^{3 \cdot 7} = 5^{21}$.	$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{de } n \text{ ori}}$; $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$; $x^n : x^m = x^{n-m}$; $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$; $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$; $(x : y)^n = x^n : y^n$, $y \neq 0$.	ridicarea la putere, putere, proprietăți ale calculului cu puteri
$3^5 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$; $(4 \cdot 3^5) \cdot (5 \cdot 3^3) = (4 \cdot 5) \cdot (3^3 \cdot 3^5) = 20 \cdot 3^{3+5} = 20 \cdot 3^8$.	$x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$; $ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b) \cdot (x^n \cdot x^m) = abx^{n+m}$; $ab^3 \cdot a^2bc = (a \cdot a^2) \cdot (b^3 \cdot b) \cdot c = a^3b^4c$.	comutativitatea înmulțirii, efectuarea înmulțirii între numere și între puteri de aceeași bază
$4^3 : 4^2 = 4^{3-2} = 4^1 = 4$; $(25 \cdot 4^3) : (5 \cdot 4^2) = (25 : 5) \cdot (4^3 : 4^2) = 5 \cdot 4^1$.	$ay^n : (by^m) = (a : b) \cdot (y^n : y^m) = \frac{a}{b}y^{n-m}$, $y \neq 0$, $b \neq 0$	împărțirea numerelor și puterilor de aceeași bază



Reflectăm!

Expresia $ay^n : (by^m)$ diferă de expresia $ay^n : by^m$. Explicați, cu ajutorul proprietăților și regulilor de calcul studiate!



Activitate pe grupe

Expresiile care conțin numere și litere se utilizează atât în diferite domenii de conținut matematic, în studiul unor noțiuni din științe, cât și în cotidian. Observați exemplele următoare și formulați altele pe care să le validați la nivelul grupului, apoi să le prezentați celorlalte grupe:

- Notăția uzuală pentru un număr natural impar este $2n + 1$, unde n este un număr natural oarecare; pentru $n = 6$, valoarea numărului impar este $2n + 1 = 2 \cdot 6 + 1 = 13$.
- Notăția uzuală pentru aria unui pătrat este l^2 , unde l reprezintă orice număr real mai mare decât 0 (l – lungimea laturii pătratului); pentru $l = \sqrt{5}$, aria pătratului este egală cu $l^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$.

- Distanța d parcursă de o bicicletă electrică ce se deplasează cu viteză constantă de 3 m/s depinde de timpul de deplasare, t (exprimat în secunde), relația după care putem determina distanța fiind $d = 3t$; pentru $t = 300 \text{ s}$ obținem distanța $d = 900 \text{ m}$, adică, în 5 minute (!) se parcurge o distanță de aproximativ 1 kilometru.

- Concentrația procentuală, C , a unei soluții saline (sărate) este raportul procentual dintre cantitatea de sare (dizolvat), m_{sare} și suma cantităților de apă $m_{\text{apă}}$ și sare, deci se exprimă prin relația $\frac{m_{\text{sare}}}{m_{\text{apă}} + m_{\text{sare}}} \cdot 100$ (ambele cantități exprimate în aceeași unitate de măsură, de regulă în grame); pentru o cantitate de 90 g de apă și 10 g de sare, concentrația soluției saline este $\frac{m_{\text{sare}}}{m_{\text{apă}} + m_{\text{sare}}} \cdot 100 = \frac{10}{90 + 10} \cdot 100 = 10\%$.



Activitate pe grupe

Calculați valorile expresiilor, după model. Identificați caracteristici ale rezultatelor, atât pe model, cât și în zona de exersare. Validați concluziile la nivelul grupei și prezentați-le întregii clase:

Model: $E(a) = 2a - 3$; $E(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$; $E(\sqrt{2} - 1) = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) - 3 = 2\sqrt{2} - 5$.

a) Pentru expresia $E(x) = x^2 - x$ calculați: $E(1)$; $E(-1)$; $E(\sqrt{3})$; $E(0,25)$; $E(0)$.

b) Pentru expresia $E(a,b) = a^2 - 2ab + b^2 - 1$ calculați: $E(0;1)$; $E(-2;2)$; $E(2;-2)$; $E(\sqrt{12};\sqrt{18})$; $E(-3;-\frac{1}{3})$.



Exersăm împreună!

- $3^2 \cdot (2^2 - 5 \cdot 3^4) = 3^2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 2)^2 - 5 \cdot 3^{2+4} = 6^2 - 5 \cdot 3^6$;
- $x^2 \cdot (y^2 - 5 \cdot x^4) = x^2 \cdot y^2 - 5 \cdot x^2 \cdot x^4 = (x \cdot y)^2 - 5 \cdot x^{2+4} = (xy)^2 - 5x^6$;
- $(4^3 - 2 \cdot 4^2) : (-4^2) = 4^3 : (-4^2) - 2 \cdot 4^2 : (-4^2) = -4^1 + 2 \cdot 4^0 = -4 + 2 = -2$;
- $(a^3 - 2 \cdot a^2) : (-a^2) = a^3 : (-a^2) - 2 \cdot a^2 : (-a^2) = -a^1 + 2 \cdot a^0 = -a + 2 = 2 - a, a \neq 0$.



Rețineți!

➤ Într-o expresie algebrică cu numere și litere, literele reprezintă necunoscute. Prin litere diferite notăm necunoscute diferite.

➤ Necunoscutele pot fi înlocuite cu valori – numere; în acest caz putem calcula valoarea expresiei prin particularizarea necunoscutelor.

➤ Regulile de calcul și proprietățile operațiilor cu numere se aplică și calculului cu numere exprimate prin litere, acordând atenție bunei definiri a operațiilor ce intervin în calcul.



Exersăm împreună!

Identificarea termenilor asemenea și reducerea acestora		
expresia	termeni asemenea	forma redusă
$2x + 3x - 4$	$2x$ și $3x$	$5x - 4$
$a + b + 5a - 3b$	a și $5a$, respectiv b și $-3b$	$6a - 2b$
$mn + m + p - 3m$	m și $-3m$	$mn - 2m + p$
$y^2 + 2y - 3 + y$	$2y$ și y	$y^2 + 3y - 3$
$ab + 3a - 4ab + 2a + 5b = \underline{ab} + \underline{3a} - \underline{4ab} + \underline{2a} + 5b = -3ab + 5a + 5b$		
$\underline{3x^2} + \underline{2x} - \underline{7} + \underline{4x} - \underline{2x^2} - \underline{5x} - \underline{8} = x^2 + x - 15$		

Înmulțirea, împărțirea unor...		
...expresii algebrice formate dintr-un singur termen	$2a \cdot 3a = 6a^2$	Am înmulțit/împărțit coeficienții între ei și fiecare literă, respectând regulile operațiilor cu puteri
	$3x \cdot 5x^2 = 15x^3$	
	$3a^2b \cdot (-2ab^3) = -6a^3b^4$	
	$12a^3 : (3a^2) = 4a$	
	$10x^2y^2 : (5xy) = 2xy$	
...expresii algebrice formate din mai mulți termeni	$5(a + b) = 5a + 5b$	Am desfăcut parantezele (distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere) și am redus termenii asemenea
	$3x \cdot (2x - 4) = 3x \cdot 2x - 3x \cdot 4 = 6x^2 - 12x$	
	$-4a \cdot (3a + 2) = -12a^2 - 8a$	
	$(a + 2)(a - 3) = a \cdot (a - 3) + 2 \cdot (a - 3) = a^2 - \underline{3a} + \underline{2a} - 6 = a^2 - a - 6$	

Exersați

1. Dați exemplu de o expresie:

- a) în necunoscuta x ; b) în necunoscutele a și b ; c) în două necunoscute, care să conțină termeni asemenea;
d) în necunoscuta y , care să conțină diverse puteri ale necunoscutei.

2. Considerăm expresia $E(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

- a) Determinați valoarea numerică a expresiei pentru $x = 1$ și $x = \sqrt{5}$.
b) Calculați produsul $E(\sqrt{3}) \cdot E(\sqrt{2})$.
c) Comparați scrierile $x^4 - 3x^2 + 2$ și $a^4 - 3a^2 + 2$. Ce putem afirma despre ele (prin ce se aseamănă/deosebesc)?
d) Identificați o legătură/asemănare între expresiile $E(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ și $F(t) = t^2 - 3t + 2$.

3. Considerăm expresia $E(x, y) = xy + 2x - 3y - 6$. Calculați:

- a) $E(1, 1)$; b) $E(-1, -2)$; c) $E(x, 2)$; d) $E(4, y)$.

4. Calculați (reducetei termenii asemenea):

- a) $4x - 3x + 2x$; b) $-5a - 7a + 10$; c) $0, 2x + 0, 4x - x$;
d) $3y + 4 - 2y - 2$; e) $3a - 2 - 5a + 4a + 5$; f) $3b - (-4b) - 5b$;
g) $4x + 6y - (3x - 2y) - x$; h) $5a - (4 - 2a) + (-7a + 2)$; i) $13x + (4 - 12x) - (2 + x)$.

5. Calculați (reducetei termenii asemenea):

- a) $5x + 2(x - 6) + 12$; b) $2(x + 3y) + 3(3x + y)$; c) $5(x - 2y) - 3(y - 2x)$;
d) $2(x - 1) - 5(x + 2) + 3x$; e) $4 - 3(1 - 2x) + 2(-4x - 5)$; f) $2x^2 + 4x - 5(3x - x^2)$;
g) $4(y - x) - 3(2x - 3y)$; h) $2(3x + y) - 5(x - 2y) - 2y$; i) $5 - (x + 7) + 2(1 + 2x)$.

6. Dacă $A = 2x + 3y$, $B = 4x - 3y$ și $C = x + y + 1$, calculați:

- a) $A + B$; b) $B - C$; c) $2A + 3C$;
d) $A - B + 2C$; e) $3A - 2B + C$; f) $2(A + B) - 12C$.

7. Calculați:

- a) $a^2 \cdot a^3$; b) $2x \cdot 3x^2$; c) $-5x \cdot (-3x)$;
d) $0, 5x^2y \cdot 4xy^2$; e) $25a^4 : a^2$; f) $15x^5 : (-3x^3)$;
g) $(-8x^3y^2) : (-2xy^2)$; h) $3x^2 \cdot 12x : (3x)^2$; i) $-28a^2b^3c^4 : (-2abc \cdot a^2b^2c)$.
j) $(a + 2)^5 : [(a + 2)^2]^2$; k) $8x^5 \cdot x^7 : 4x^2 : (x^7)^2$; l) $-18b^5c^3 : 9 : b^4 : c^2$.

8. Calculați:

- a) $x(3 - x) - 2x(x + 4)$; b) $2x^2 - 3x(x + 4) + 10x$;
c) $2(x^2 + 5x - 3) - x(2x + 10)$; d) $x(x^2 + 2x - 3) - 3x(x^2 + 6)$;
e) $x(x^2 - 3x - 4) - 2x(x^2 + 5)$; f) $3x^2(x + 5) - 2x(x^2 - 3x + 4) - x^3 + 8x$;
g) $(8x^4y^3 - 4x^3y^4) : (2x^3y^3) + (-x^4y^3 + x^3y^4) : (-xy)^3$; h) $x(x^2 + 2x - 3) - 3x(x^2 + 6) + 2x^2(x - 1)$.

9. Calculați:

- a) $(x + 2)(x - 3)$; b) $(2x - 1)(5 - x)$;
c) $(2x - 2)(x + 1) - 2x^2 + 4$; d) $(x + 3)(2x - 3) + x(1 - 2x)$;
e) $(x + 5)(3x - 4) + x(3 - 2x)$; f) $(6x + 1)(x - 2) - (x - 6)(6 - 3x)$;
g) $(x + 2)(2x - 1) - (x - 2)(1 + 2x) + (1 - 6x)$; h) $(3x + 1)(2x - 3) + (3x + 2)(1 - 2x) + 1$.

10. Se consideră expresia $E(x) = x(2x + 3) - 3(x^2 + 3x + 5) + (x + 2)(x - 3)$, unde x este număr real.

- a) Calculați $E(-3)$.
b) Demonstrați că $E(n)$ este divizibil cu 7, pentru orice număr întreg n .

11. Se consideră expresia $E(x) = 2x(x^2 - x + 1) - (x^2 + 1)(x - 2) - (x^3 + 3x + 1)$, unde x este număr real.

- a) Calculați $E(2)$. b) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, inecuația $|E(x)| \leq 3$.

12. Un pătrat are latura de a cm, iar un dreptunghi are lungimea cu x cm mai mare decât latura pătratului și lățimea cu x cm mai mică decât latura pătratului. Comparați perimetrele și ariile celor două figuri geometrice.

Formule de calcul prescurtat

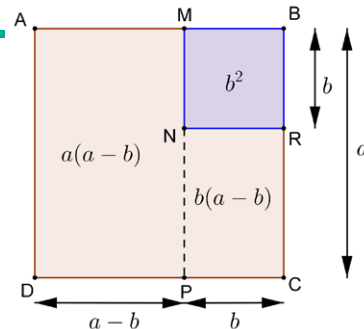


Reflectăm!

Considerăm două pătrate având laturile de lungimi a și b , $a \geq b$, ariile lor fiind egale cu a^2 , respectiv b^2 .

Expresia $a^2 - b^2$ reprezintă diferența dintre ariile pătratelor $ABCD$ și $MNRB$, adică suma ariilor dreptunghiurilor $AMPD$ și $NRCP$. Știind că $A_{ABCD} = a^2$, $A_{MNRB} = b^2$, $A_{AMPD} = a(a - b)$, $A_{NRCP} = b(a - b)$, putem scrie relațiile $A_{ABCD} - A_{MNRB} = A_{AMPD} + A_{NRCP}$, adică $a^2 - b^2 = a(a - b) + b(a - b)$.

Obținem formula de calcul prescurtat: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.



Exersăm împreună!

1. Verificați prin calcule formula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Rezolvare: $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Atenție! În acest caz verificarea este mai simplă dacă prelucrăm algebric membrul reprezentat de $(a - b)(a + b)$!

2. Calculați, aplicând formula de mai sus:

$(2x + 3y)(2x - 3y)$, $(3 + 2x)(3 - 2x)$, $(x - 3)(3 + x)$, $(\sqrt{5} - \sqrt{11})(\sqrt{5} + \sqrt{11})$, $101 \cdot 99$, $52 \cdot 48$.

Rezolvare: $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$; $(\sqrt{5} - \sqrt{11})(\sqrt{5} + \sqrt{11}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{11}^2 = 5 - 11 = -6$;

$101 \cdot 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 9999$; $52 \cdot 48 = (50 + 2)(50 - 2) = 2500 - 4 = 2496$ (observăm că formula poate ajuta la calcule cu numere).

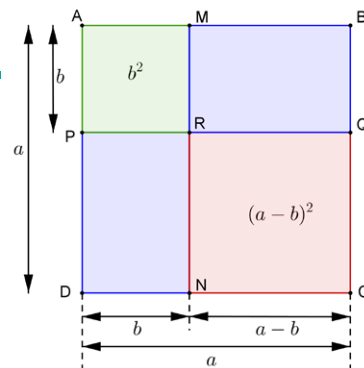


Reflectăm!

Pătratul $ABCD$ de latură a este împărțit de punctele M, N, P, Q în două pătrate de laturi $a - b$, respectiv b , având ariile $(a - b)^2$ și b^2 și dreptunghiurile $ADNM, ABQP$ de arii egale cu $a \cdot b$. Dacă $A_{ABCD} = a^2$, $A_{AMRP} = b^2$, $A_{NCQR} = (a - b)^2$ și $A_{ADNM} = A_{ABQP} = a \cdot b$, putem scrie: $A_{NCQR} = A_{ABCD} - A_{ABQP} - A_{ADNM} + A_{AMRP}$, adică $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$.

Obținem formula de calcul prescurtat: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Observăm: Dacă înlocuim b cu $-b$, obținem: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Verificați!



Exersăm împreună!

1. Verificați, prin calcul algebric, formulele: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ și $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Rezolvare: $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

2. Calculați: $(x + 2)^2$, $(2x - 3y)^2$, $(2abc - xy)^2$, $(\sqrt{10}x + 5y)^2$, $(\sqrt{10}x + 4)^2$, $(x - 3\sqrt{5})^2$, 101^2 , 99^2 .

Rezolvare: $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$; $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$; $101^2 = (100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$ (observăm că formula poate ajuta la calcule cu numere).

Rețineți!

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

oricare a și b numere reale.

Aplicație a formulei $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$: raționalizarea numitorului unei fracții

Ne amintim!

În clasa a VII-a am învățat raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$ și spuneam că raționalizarea numitorilor este o operație prin care, într-o fracție în care numitorul conține radical, amplificăm fracția cu scopul de a „elimina” radicalul de la numitor.

$${}^{\sqrt{b}}\frac{1}{a\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{a \cdot b}, \quad a, b \in \mathbb{Q}^*, \quad b > 0 \text{ și } \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Exemple:

$${}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$${}^{\sqrt{2}}\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Reflectăm!

Pentru a și b două numere reale, are loc formula

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Pentru $a, b \in \mathbb{Q}, b > 0$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, putem adapta și aplica formula

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

$${}^{a-\sqrt{b}}\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b} \text{ sau}$$

$${}^{a+\sqrt{b}}\frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$$

Proiect

Transformați fracțiile $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, a, b \in \mathbb{Q}_+, a \neq b, \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în fracții cu numitor rațional. Adăugați în portofoliul personal aceste transformări, împreună cu rezolvarea exercițiilor de mai jos. Discutați concluziile voastre cu colegii.

$$\checkmark {}^{\sqrt{3}+1}\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\checkmark {}^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

$$\checkmark {}^{3-2\sqrt{2}}\frac{1}{3+2\sqrt{2}} + {}^{3+2\sqrt{2}}\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} + \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6$$



Exersați

1. Calculați folosind formulele de calcul prescurtat, apoi verificați rezultatele folosind un calculator:

- a) 55^2 ; b) 81^2 ; c) 129^2 ; d) $45 \cdot 55$; e) $33 \cdot 27$; f) $105 \cdot 95$.

Indicație. $55^2 = (50 + 5)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 5 + 5^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$

2. Calculați, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(1 + \sqrt{2})^2$; b) $(\sqrt{7} + 2)^2$; c) $(2\sqrt{2} + 1)^2$; d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2$;
 e) $(\sqrt{3} - 2)^2$; f) $(3 - \sqrt{5})^2$; g) $(2\sqrt{3} - 3)^2$; h) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$;
 i) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$; j) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$; k) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$; l) $(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)$.

3. Calculați, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(x + 1)^2$; b) $(x + 2)^2$; c) $(3 + x)^2$; d) $(5 + x)^2$;
 e) $(2x + 1)^2$; f) $(2 + 3x)^2$; g) $(x + 2y)^2$; h) $(3y + 2x)^2$.

4. Calculați, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(x - 1)^2$; b) $(x - 3)^2$; c) $(2 - x)^2$; d) $(x - 5)^2$;
 e) $(2x - 2)^2$; f) $(3 - 2x)^2$; g) $(2x - y)^2$; h) $(2xy - 5)^2$.

5. Calculați, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(x - 1)(x + 1)$; b) $(x + 2)(x - 2)$; c) $(3 - x)(3 + x)$; d) $(2x - 1)(2x + 1)$;
 e) $(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$; f) $(x\sqrt{2} + 5)(x\sqrt{2} - 5)$; g) $(2x - y)(2x + y)$; h) $(2xy - 5)(2xy + 5)$.

6. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

- a) $(2x - \dots)^2 = \dots - 2 \cdot \dots \cdot \dots + 5^2$; b) $(\dots + \sqrt{3})^2 = a^2 + \dots + \dots$;
 c) $(a + \dots)(a - \dots) = \dots^2 - 2^2$; d) $(x - y)(\dots + \dots) = x^2 - y^2$.

7. Calculați:

- a) $(\sqrt{2} + 4)^2 + (2\sqrt{2} - 1)^2 - \sqrt{32}$; b) $(2\sqrt{3} + 1)^2 + (1 - 2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$;
 c) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - (3\sqrt{7} - 4)(3\sqrt{7} + 4) + (\sqrt{6} + 2)^2$; d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7} - 3)(2\sqrt{7} + 3) + (2 + \sqrt{15})^2$;
 e) $\left[\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \sqrt{2} \right)^2 \right] : (\sqrt{15})^{-2}$; f) $\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right)^2 - (\sqrt{55} + \sqrt{5})(\sqrt{55} - \sqrt{5})$.

8. Calculați:

- a) $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 + (x - 2)(x + 2)$; b) $(5x + 1)^2 - 2(5x + 1)(5x - 1) + (5x - 1)^2$;
 c) $(3x + 2)^2 - (5x - 2)^2 + (4x - 3)(4x + 3)$; d) $(4x - 1)^2 - (2 - 3x)(2 + 3x) - (5x - 2)^2$;
 e) $(2\sqrt{3}x - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{5}x - 3)(\sqrt{5}x + 3) - x(7x - 4\sqrt{15})$; f) $\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{3} \right)^2$;
 g) $2 \cdot (x + 1)^2 + (5x - 1) \cdot (x - 3) - (3x - 1)^2$; h) $(3x + 2)^2 - (5x - 2)^2 + (4x - 3) \cdot (4x + 3)$;
 i) $[2(x - 1) \cdot (6x + 5) - (3x - 2) \cdot (4x + 1)] \cdot [(8x - 3) \cdot (x + 1) - (2x - 3) \cdot (4x + 1)]$.

9. Calculați:

- a) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$;
 c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \cdot (5 - 2\sqrt{6})$; d) $\sqrt{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}$.

10. Știind că $x - \frac{1}{x} = 2$, $x \in \mathbb{R}^*$, calculați $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ și $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

11. Știind că $x - y = 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, calculați $(x - y)(x + y) - 2y$ și $x^2 - y(y + 2)$.

12. Se consideră expresia $E(x) = (2x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) - 7(x - 2)^2$, unde x este număr real.

a) Calculați $E(2)$.

b) Arătați că $E(n)$ este impar, pentru orice număr natural n .

Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$



Reflectăm!

Așa cum un număr natural se poate descompune în produs de factori, așa vom descompune și expresiile algebrice în produs de factori.

Descompunerea în factori a unei expresii algebrice înseamnă scrierea ei ca un produs dintre un număr și o altă expresie sau ca un produs de două sau mai multe expresii algebrice.

Metode de descompunere în factori a expresiilor:

- metoda factorului comun;
- metoda formulelor de calcul prescurtat;
- metode combinate.



Activitate pe grupe

Discutați la nivelul grupeii rezolvările cerințelor următoare. Asigurați-vă că toți membrii grupeii au înțeles toate rezolvările!

- Care este descompunerea în factori primi a fiecăruia dintre numerele 6; 15; 30; 11?
- Pentru fiecare caz în parte, exemplificați câte o pereche de numere reale care înmulțite dau rezultatul: 0,5; 0,6; $\sqrt{15}$.
- Ce dimensiuni poate avea un dreptunghi cu aria de: 20 cm², 50 cm², 3ab cm²?
- Ce dimensiuni poate avea un dreptunghi cu perimetrul de: 20 cm, 50 cm, 3ab cm?

Metoda factorului comun



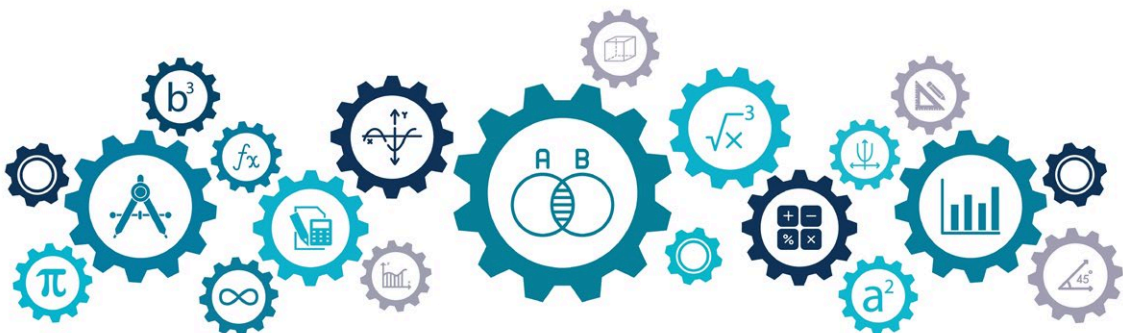
Ne amintim!

În formulele $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ și $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$ spunem că am dat factor comun pe a .



Exersăm împreună!

1. $3a + 3b = 3(a + b)$	Am scos factor comun pe 3.
2. $5x^2 - 15x = 5x \cdot x - 3 \cdot 5x = 5x(x - 3)$	Am identificat numărul cel mai mare care se poate scoate factor comun de la părțile numerice ale termenilor (5 la primul exemplu, respectiv 3 la al doilea și 4 la al treilea), iar de la partea literală am identificat necunoscuta comună cu exponentul cel mai mic.
3. $3x^4 + 6x^3 - 9x^2 = 3x^2(x^2 + 2x - 3)$	
4. $4x^2y + 8xy^2 = 4xy(x + 2y)$	
5. $6x(x + 2) + 3(x + 2) = 3(x + 2)(2x + 1)$	Am identificat factor comun pe 3 și paranteza $(x + 2)$.



Metoda formulelor de calcul prescurtat



Rețineți!

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ - membrul drept se numește *binom sumă la pătrat*;
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ - membrul drept se numește *binom diferență la pătrat*;
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ - membru stâng se numește *diferență de pătrate*.

Exersăm împreună!

1. $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$	Am aplicat prima formulă, după ce am identificat cei doi termeni ai binomului.
2. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$	
3. $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x - 1)^2$	Am aplicat a doua formulă, după ce am identificat cei doi termeni ai binomului.
4. $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$	
5. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$	Am aplicat a treia formulă, după ce am identificat cei doi termeni ai diferenței de pătrate.
6. $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5)$	
7. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$	Am aplicat prima formulă și apoi a treia formulă.

Observație. Identificarea termenilor care să ne conducă la aplicarea uneia dintre cele trei formule este un pas important în identificarea expresiilor la care putem aplica formulele.

Exersăm împreună!

1. $x^2 + x + 1 = x^2 + \dots + 1^2$ nu se poate descompune prin utilizarea directă a formulelor de calcul prescurtat, deoarece avem doar pătratele a^2 și b^2 și nu avem $2ab$ ($2ab$ trebuia să fie $2 \cdot x \cdot 1$!)
2. $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$, care nu poate fi continuată, sau $x^2 + 2x + 2 = x^2 + \dots + \sqrt{2}^2$, la care termenul lipsă ar trebui să fie $2 \cdot x \cdot \sqrt{2}$! Nu se poate descompune în factori folosind formulele.
3. $x^2 + 4$ nu poate fi descompusă nici prin prima sau a doua formulă (lipsește un termen), nici prin ultima (unde este diferența a două pătrate, nu suma!)

Metode combinate

Atunci când nu se identifică un factor comun la toți termenii sau termenii expresiei nu conduc spre aplicarea formulelor de calcul prescurtat, se recomandă *grupări convenabile de termeni* care să conducă la combinarea metodelor anterioare.

Exersăm împreună!

1. $ax + bx + ay + by = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$	Grupăm termenii doi câte doi, identificând astfel un factor comun.
2. $a^3 + a^2 + a + 1 = (a^3 + a^2) + (a + 1) = a^2(a + 1) + 1 \cdot (a + 1) = (a + 1)(a^2 + 1)$	
3. $xy + 2x + 2y + 4 = x(y + 2) + 2(y + 2) = (y + 2)(x + 2)$	
4. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = (x + y)^2 + 3(x + y) = (x + y)(x + y) + 3(x + y) = (x + y)(x + y + 3)$	Grupăm primii trei termeni și utilizăm formula de calcul prescurtat, iar din ultimii doi termeni scoatem factor comun pe 3.

5. $x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2 = (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 + y)(x + 1 - y)$	O grupă de trei termeni descompusă cu pătratul binomului sumă, urmată de aplicarea diferenței de pătrate.
6. $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 6x + 9 - 1 = (x + 3)^2 - 1^2 = (x + 3 + 1)(x + 3 - 1) = (x + 4)(x + 2)$	Transformăm 3 termeni în 4 termeni ($8 = 9 - 1$) și aplicăm ideea de la exercițiul anterior.
7. $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = x(x + 2) + 4(x + 2) = (x + 2)(x + 4)$	Transformăm 3 termeni în 4 termeni ($6x = 2x + 4x$) și grupăm câte doi termeni.
8. $x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5)$	Folosim aceeași tehnică ca la 7.
9. $x^2 - 4x - 5 = x^2 + x - 5x - 5 = x(x + 1) - 5(x + 1) = (x + 1)(x - 5)$	Realizați descompunerea propusă la exercițiul 11.
10. $x^2 + x - 2 = x^2 - x + 2x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$	Formați grupe și discutați ce asemănări găsiți între exercițiile 7-10 și exercițiul 11!
11. $x^2 + (a + b)x + a \cdot b = \dots$	Formulați concluzii și comparați-le cu cele ale celorlalte grupe.

Exersați

1. Descompuneți, folosind metoda factorului comun:

- a) $4x + 4a$; b) $5a - 10b$; c) $12x + 15z$; d) $ax + bx$; e) $0, 3x + 0, 6y$;
 f) $a\sqrt{3} + b\sqrt{3}$; g) $x\sqrt{2} + \sqrt{10}$; h) $10a + 15b - 25c$; i) $4xy - 8xz + 12xt$; j) $-7a - 14b$.

2. Descompuneți în factori expresiile:

- a) $4x^2 - 16xy$; b) $x^2 + 5x$; c) $2a^5 - 3a^3$; d) $5y^3 - 4y^4 + 3y^2$; e) $3x^3 + 6x^2 + 9x$;
 f) $4t^4 + 6t^6 - 10t$; g) $\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{6}$; h) $\frac{2xy}{3} + \frac{4xt}{3}$; i) $\frac{3x^2}{5} + \frac{6x^3}{5} - \frac{3x}{5}$; j) $-8xy - 12yz - 20yt$.

3. Descompuneți în factori expresiile:

- a) $3x(x + 2) - 4(x + 2)$; b) $x^3 + 3x^2 + xy$; c) $(x + 1)(x - 1) + (2 - x)(1 - x)$;
 d) $16a^2bc + 4ab^2c + 8abc^2$; e) $2x(3 - x) + 5(x - 3)$; f) $x(2x - 1) + (1 - 2x)^2$;
 g) $3(x - 2) - x(x - 2) - xy(x - 2)$; h) $(3 - x)^3 - 3(3 - x)^2 + 4x(3 - x)$; i) $(3 + x)(3 - x) - (x - 3)(2 + x)$.

4. Descompuneți expresiile, folosind formule de calcul prescurtat:

- a) $x^2 - 2xy + y^2$; b) $x^2 - 4x + 4$; c) $x^2 + 6x + 9$; d) $y^2 + 10y + 25$; e) $t^2 - 8t + 16$;
 f) $25 + 10x + x^2$; g) $4x^2 - 20x + 25$; h) $a^2 + 36 + 12a$; i) $49 + y^2 - 14y$; j) $9x^2 + 16y^2 - 24xy$.

5. Descompuneți expresiile, folosind formule de calcul prescurtat:

- a) $x^2 - 4$; b) $25 - a^2$; c) $t^2 - 81$; d) $9x^2 - 4$; e) $16x^2 - 25y^2$;
 f) $49 - 4x^2$; g) $\frac{x^2}{4} - 1$; h) $5 - a^2$; i) $x^2y^2 - 1$; j) $81x^4 - 256$.

6. Completați expresiile pentru a putea obține pătratul unui binom și descompuneți:

- a) $x^2 - 10x + \dots$; b) $16 + \dots + a^2$; c) $\dots + 12x + 36$; d) $4x^2 + \dots + 9$; e) $9x^2 - \dots + 4$;
 f) $x^2 + 81 + \dots$; g) $a^2 + 2\sqrt{2}a + \dots$; h) $5 - \dots + a^2$; i) $3x^2 + \dots + 2$; j) $5x^2 - \dots + 7$.

7. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $(x + 2)^2 - 9$; b) $x^4 - 1$; c) $25 - (x - 3)^2$; d) $(2x + 1)^2 - y^2$; e) $x^2 + 10x + 25 - y^2$;
 f) $(2x + 3)^2 - (x + 2)^2$; g) $16x^4 - 81$; h) $4x^2 - (x - 1)^2$; i) $x^4 + x^2 + 1$; j) $16 - x^2 + 4xy - 4y^2$.

8. Descompuneți expresiile în factori:

a) $ax + ay + 2x + 2y$;

b) $x^2 + 2x + xy + 2y$;

c) $a^2 - 3a + ax - 3x$;

d) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$;

e) $x^2 + 5x - xy - 5y$;

f) $4ax - 8ay + 3bx - 6by$;

g) $xy - 4x - 4y + 16$;

h) $x^2y^2 - x^2 + y^2 - 1$;

i) $a^3 - a^2 + 3a - 3$.

9. Descompuneți expresiile în factori:

a) $(x + y)^2 + 3x + 3y$;

b) $(x - 2)^2 - 5x + 10$;

c) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y$;

d) $x^2 - 2x + 1 + ax - a$;

e) $x^2 - 8x + 16 - y^2$;

f) $(x + 1)^3 - 4x - 4$;

g) $x^2 - 4 + 4y - y^2$;

h) $(x - 2)^2 - 2(x - 2) + 1$;

i) $4(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1$.

10. Descompuneți expresiile:

a) $x^2 + 7x + 12$;

b) $x^2 - 5x + 6$;

c) $x^2 + 11x + 30$;

d) $x^2 - 9x + 8$;

e) $x^2 - 4x - 21$;

f) $x^2 + x - 6$;

g) $x^2 - 6x - 7$;

h) $x^2 - 11x - 26$;

i) $x^2 - 6x - 27$;

j) $x^2 - 2x - 15$.

11. Descompuneți expresiile:

a) $x^2 + 13x - 14$;

b) $5x^3 + 20x^2 + 20x$;

c) $18x^3 - 9x^2 - 2x + 1$;

d) $x^3 + 5x^2 - 7x - 35$;

e) $-x^3 - x^2 + 9x + 9$;

f) $x^4 - 13x^2 + 36$;

g) $x^3 + 2x^2 - 15x$;

h) $x^3 + x^2 - 12x$;

i) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

12. Calculați diferența numerelor a și b , știind că suma lor este 11 și că diferența pătratelor lor este 55.13. Calculați $2a^2b + 2ab^2$, știind că $a + b = 6$ și $ab = 8$.14. Calculați $a^2 + b^2$, știind că $a + b = 12$ și $ab = 35$.15. Demonstrați că numărul $n = \sqrt{(a^2 + 5a)(a^2 + 5a + 6)} + 9$ este natural, pentru orice număr natural a .

Indicație: Notând $a^2 + 5a = x$, expresia devine $\sqrt{x(x + 6)} + 9$.

16. Arătați că $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) + 1$ este pătratul unui număr întreg, pentru orice valoare întreagă a lui x .17. Demonstrați că numărul $N = (n^2 - 4n)(n^2 - 4n + 8) + 16$ se poate scrie ca puterea a 4-a a unui număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.18. Arătați că, oricare ar fi numerele reale a și b , avem:

a) $a^2 + b^2 + 2a + 4b + 9 > 0$;

b) $a^2 + b^2 - 2a + 2b + 6 > 0$.

Indicație: a) $a^2 + b^2 + 2a + 4b + 9 = a^2 + 2a + 1 + b^2 + 4b + 4 + 4 = (a + 1)^2 + (b + 2)^2 + 4$.

19. Determinați numerele reale x și y , știind că:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$;

b) $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 8 = 0$;

c) $4x^2 + 3y^2 + 4x - 6\sqrt{3}y + 10 = 0$;

d) $2x^2 + y^2 - 10\sqrt{2}x + 8y + 41 = 0$.

Indicație: a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$, doar dacă fiecare termen este 0.

20. Determinați valoarea minimă a expresiilor următoare și precizați, în fiecare caz, pentru ce valoare reală a lui x se obține minimul expresiei (cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia).

a) $E = 16x^2 + 8x + 4$;

b) $9x^2 - 6x + 6$.

Indicație: a) $16x^2 + 8x + 4 = (4x + 1)^2 + 3$ și cum $(4x + 1)^2 \geq 0$ pentru orice număr real x , obținem $E = (4x + 1)^2 + 3 \geq 3$ pentru orice număr real x . Astfel, valoarea minimă a expresiei este 3 și se realizează atunci când $4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Recapitulare

1. Calculați:

- a) $4x^2 + 5x - 8 + x^2 - 1 - 7x$;
 b) $7x^2 - 2x - 5 - 3x^2 + 6x + 8$;
 c) $x^2 - 4x + 7 - 2x^3 + 5x - 3x^2 - 4 + 6x^3$;
 d) $\frac{3}{5}a + 2ay - \frac{7}{2}ay + 4a$;
 e) $13, 4x^2 - 5, 24 + 3, 61x + 4, 15 - 6, 71x^2 + 4, 9x$;
 f) $\frac{0,5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + x^2 + \frac{0,3}{4}x + 5$;
 g) $\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{5} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$;
 h) $3, (1)x^2 - 5, 2x + 4, 3(2) + 6, (3)x - 5, 6x^2 + 7, 1$.

2. Calculați:

- a) $2x + 3x - 2 + 4x - (5x + 4) + (3x + 2)$;
 b) $ab + 2 - (3ab - 5) + (4ab + 1) - ab - 2$;
 c) $3(4x - 6) - 4x(x + 3)$;
 d) $4x \cdot (x - 5) - 3 \cdot (x^2 + 3x - 1) + 2 \cdot (2x - 1)$;
 e) $(16x^3 - 5x^2 + 3x) : (0, 5x)$;
 f) $(6a^2x^3y^2 - 12a^4x^2y^3 - 9a^3x^3y^3) : (-3a^2x^2y^2)$;
 g) $(3a^4x^2 - 5a^3x^3 + 6a^2x^4) : (2a^4x^4)$;
 h) $7x^2(x - 2) - 5x(3x^2 - 6x - 4) + 4(2x^3 - 4x^2 - 5x + 3)$.

3. Calculați:

- a) $(2x^2 - 3x - 1)(x - 1)$;
 b) $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 2x) + \sqrt{6} \cdot (2\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}) - \sqrt{2} \cdot (8 - x\sqrt{6})$;
 c) $(x^4 + x^3 + x^2)(x - 1)$;
 d) $[-5x \cdot (8x^4 - 4x^3) - 10x \cdot (6x^2 - 4x)] : (-20x^2)$;
 e) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$;
 f) $[(3x^2 - 2x - 4) \cdot (x - 2) - (x^2 + 4x - 8) \cdot (x + 1)] : (8x)$;
 g) $[2x + 1 - (x + 2)][3x - 2 - (2x - 3)]$;
 h) $3\sqrt{7}(2\sqrt{3} - x) - 2\sqrt{3}(2x + 3\sqrt{7}) + 3\sqrt{7}x(2x + 1) - 6x^2\sqrt{7}$.

4. Calculați aria unui pătrat care are perimetrul egal cu $4ab$ metri, $a, b \in \mathbb{N}$.

5. Calculați, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(2x - 3)^2$; b) $(4x - 3)(4x + 3)$; c) $(4x - 3)^2$;
 d) $[0, (2) + 3x]^2$; e) $(\sqrt{3}x + \sqrt{5})^2$;
 f) $(2x - 5)(2x + 5)$; g) $(0, 3x - 7, 3)(0, 3x + 7, 3)$;
 h) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{3}{4}x + \frac{7}{6}\right)$; i) $(\sqrt{3}x + \sqrt{5})^2 - 10$.

6. Calculați, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(4x - 1)^2 - (3x + 1)(3x - 1) - (x^2 - 2x)^2$;
 b) $(2\sqrt{2}x - \sqrt{7})^2 - (\sqrt{6}x - 2)(\sqrt{6}x + 2) - 2x(x - 2\sqrt{14})$;
 c) $\left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{5}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{5}x\right)^2$;
 d) $(\sqrt{5}x + 3)^2 - (2\sqrt{5}x - \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5}x + \sqrt{3}) + (3\sqrt{5}x - 1)^2$;
 e) $[(6x - 1)(3x + 2) - (2x - 5)(9x + 1)][(x - 4)(x + 3) - (x + 4)(x - 5)]$.

7. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $7x(1 - 2x) - 5(1 - 2x)$;
 b) $32x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 4x^2$;
 c) $6a^4b^5c^3 - 9a^2b^4c^2 + 12a^3b^3c^4$;
 d) $(3 - 2x)(x - 3) - (x - 3)(1 - 4x)$;
 e) $(x - 3)(2x - 5) - (3 - x)(4 - 3x)$;
 f) $12x^3 - 8x^2 - 15x + 10$;
 g) $(2x - 3)^3 - 4x(2x - 3)^2 - 5(2x - 3)$;
 h) $(2 - x)^3 + 2x(2 - x)^2 - 5(x - 2)$.

8. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $16 - 40x + 25x^2$; b) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$;
 c) $81 - 4x^2$; d) $16x^2 - 3$;
 e) $(4x - 3)^2 - 25$; f) $25x^2 - (2x - 1)^2$;
 g) $(6x - 1)^2 - (4x - 3)^2$; h) $(7x - 4)^2 - (2x - 3)^2$;
 i) $9x^4 - 6\sqrt{2}x^2 + 2$.

9. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$; b) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6$;
 c) $x^2 - 10x + 16$; d) $x^2 - 6x - 16$;
 e) $9x^2 - 6x - 15$; f) $16x^2 - 8x - 24$;
 g) $x^2 - 3x - 28$; h) $6x^3 - 3x^2 - 10x + 5$;
 i) $4x^3 - 8x^2 - 140x$.

10. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) + 1$;
 b) $(x^2 - x + 2)(x^2 - x + 4) + 1$;
 c) $(x^2 - x)(x^2 - x + 5) - 6$;
 d) $(x^2 - x + 1)^2 + 2 \cdot (x^2 - x + 1) - 3$.

Indicație. Folosiți substituții/notații convenabile.

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare



Test de autoevaluare

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $2(3x - 2y) + 3y - (5x + y)$ este:
a) $x - 2y$; b) $11x - 8y$; c) x ; d) $11x$.
2. Rezultatul calculului $(8x^2 + 12x^2) : (2x + 3x)$ este:
a) $8x$; b) $4x$; c) $4x^2$; d) 8 .
3. Rezultatul calculului $4x(3x + 5) - (6x - 5)(2x - 1) + 3(5 - 9x) - 1$ este:
a) $9x - 9$; b) $9 - 23x$; c) $10x + 9$; d) $9(x + 1)$.
4. Fie expresia $E(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$. Pentru $x = 2$, valoarea expresiei este:
a) 32; b) 64; c) 0; d) -64.
5. Descompunerea în factori a expresiei $4x^3 - 20x^2$ este:
a) $4x(x + 5)(x - 5)$; b) $4x(x^2 - 5)$;
c) $4x(x - 1)^2$; d) $4x^2(x - 5)$.
6. Descompunerea în factori a expresiei $4x^2 - 12x + 9$ este:
a) $(2x - 3)^2$; b) $(2x - 3)(2x + 3)$;
c) $(2x + 3)^2$; d) $(2x - 9)(2x - 1)$.
7. Descompunerea în factori a expresiei $(x + 4)^2 - 25x^2$ este:
a) $(6x - 4)(4 - 4x)$; b) $8(1 - x)(3x + 2)$;
c) $(6x - 4)(4x + 4)$; d) $(x - 2)(2x - 1)$.
8. Forma descompusă a expresiei $x^3 - 2x^2 + x - 2$ este:
a) $(x^2 + 1)(x - 2)$; b) $(x + 1)^2 \cdot (x - 2)$;
c) $(x^2 + 2)(x - 1)$; d) $(x + 1)(x^2 - 2)$.
9. Valoarea minimă a expresiei $E(x) = 2x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ este:
a) 4; b) 3; c) 2; d) 1.

Punctaj: 1p fiecare exercițiu rezolvat corect. Din oficiu: 1p.

Timpe de lucru: 35 de minute.

Test de evaluare

SUBIECTUL I. Pe foaia de test scrieți numai rezultatele.

- 5p 1) Rezultatul calculului $2x + 3x - 5x + x$ este ...
5p 2) Rezultatul calculului $2x(3x + 1) - 6(x + 1)(x - 1)$ este ...
5p 3) Rezultatul calculului $(4x^3 + 8x^2) : (4x) - x(x + 2)$ este ...
5p 4) Descompunerea în factori a expresiei algebrice $9x^2 - 6x$ este ...
5p 5) Descompunerea în factori a expresiei algebrice $x^2 - 16$ este ...
5p 6) Descompunerea în factori a expresiei algebrice $x^2 + 4x + 4$ este ...

SUBIECTUL al II-lea. Scrieți rezolvările complete.

- 18p 1) Descompuneți:
a) $2x^3 - 8x^2 + 8x$; b) $2x^2 - 5x + 2$; c) $9x^3 - 9x$.
6p 2) Calculați $\sqrt{(4 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 5)^2} - 2(11 - \sqrt{3})$.
6p 3) Arătați că numărul $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 1$ este pătratul unui număr întreg, oricare ar fi cifra nenulă x din baza zece.

SUBIECTUL al III-lea. Scrieți rezolvările complete.

Fie expresia

$$E(x) = (2x - 1)(2x + 1) - (x - 2)^2 - (x - 1)(2x + 1) + 10.$$

- 10p a) Arătați că expresia poate fi adusă la forma $E(x) = x^2 + 5x + 6$.
10p b) Demonstrați că numărul $E(n)$ este par, oricare ar fi n număr natural.
10p c) Calculați $E(-3) + E(-2) + E(-1) + E(0)$.

Punctaj: Din oficiu: 10p. Punctajul final se împarte la 10.

Timpe de lucru: 50 de minute.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Am progresat în învățare prin parcurgerea acestui set de lecții	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitat înainte și după test pentru a îmbunătăți performanța

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. Calculați:

- a) $3a^2bc^3 \cdot (-4ab^3c^2)$; b) $5x + 3 - (4x - 5) + (x - 3)$;
 c) $3x - 4 + y - 2x - 2y + 5$; d) $(-18x^6y^2) : (-6x^4y)$;
 e) $6 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (2x + 5)$; f) $7a^5bc^3 \cdot (-5ab^6c^2)$;
 g) $3x - 9 + y - 7x - 5y + 1$;
 h) $4(x + 3) - (5x - 7) + x - 20$;
 i) $4 \cdot (x + 2) - 7 \cdot (2x + 5)$.

2. Calculați:

- a) $x \cdot (4x + x + x)$;
 b) $3x(2x + 5) - 2x(3x - 6)$;
 c) $x(2x - 1) + 4x(x - 5)$;
 d) $(x + 2)(x - 1) + 2(3 - x)$;
 e) $4x(x + 2) - 3x(2x + 5)$;
 f) $(3x - 1) \cdot (2x + 5)$;
 g) $(2x + 5)(x - 4) + 2(x + 10)$;
 h) $(2x - 1) \cdot (x + 2) - 2x(x + 1)$;
 i) $(x - 2)(x + 2) - 7 \cdot (2x + 5)$.

3. Calculați:

- a) $(x - 4)^2$; b) $(x + 7)^2$; c) $(2x - 5)^2$;
 d) $(3 - 2x)^2$; e) $(1 + 4x)^2$; f) $(2x + 3y)^2$;
 g) $(x + 4)(x - 4)$; h) $(2x - 1) \cdot (2x + 1)$;
 i) $(6 - 2x)(6 + 2x)$.

4. Descompuneți, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $x^2 - 12x + 36$; b) $9x^2 - 24x + 16$;
 c) $25x^2 + 10x + 1$; d) $3 - 2x\sqrt{3} + x^2$;
 e) $2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3$; f) $x^2 - 49$;
 g) $81x^2 - 16$; h) $x^2 - (16 + 8y + y^2)$;
 i) $(x + 5)^2 - (3 - 2x)^2$.

5. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $x^2 + 5x + 6$; b) $am + bn + an + bm$;
 c) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$; d) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$;
 e) $x^2 + 5x - 36$; f) $x^2 - 5x - 6$;

- g) $9(x - 2)^2 - 4x^2$; h) $x^2 - 7x - 8$;
 i) $25(x - 3)^2 - 4(3x + 1)^2$.

6. Fie expresia

$$E(x) = (3x - 1)^2 - x \cdot (4x - 5) - 5(x^2 - 2x + 2), x \in \mathbb{R}.$$

- a) Calculați $E(0)$, $E(-2)$ și $E(3)$.
 b) Arătați că $E(x) = 9x - 9$.
 c) Determinați numerele naturale n pentru care $E(n)$ se divide cu 18.
 d) Determinați numerele reale x pentru care $E(x) \leq 0$.

7. Se consideră expresia

$$E(x) = (x + 1)(1 - x) + (x + 2)^2 - 2(x + 2), x \in \mathbb{R}.$$

- a) Calculați $E(0)$, $E(-3)$ și $E(2)$.
 b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
 c) Determinați numărul real a pentru care $E(a) = -3$.
 d) Determinați numerele naturale n pentru care $E(n) \leq 8$.

8. Se consideră expresia

$$E(x) = (x + 3)^2 + 2(x - 4)(x + 3) + (x - 4)^2, \text{ unde } x \in \mathbb{R}.$$

- a) Calculați $E(0)$, $E(-3)$ și $E(2)$.
 b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
 c) Determinați numerele reale a pentru care $E(a) = 9$.
 d) Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{E(n)} \leq 7$.

9. Se consideră expresia $E(x) = (x - 3)^2 - (x - 1)(x + 4) + (x + 2)(x - 2) - x(x - 10)$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Arătați că $E(x) = x + 9$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 b) Determinați numerele naturale a pentru care $E(a) \leq 4\sqrt{10}$.
 c) Demonstrați că $A = E(-8) + E(-7) + E(-6) + \dots + E(40)$ este pătratul unui număr natural.

10. Dacă $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$, calculați $(x - y)^{2025} + (y - x)^{2025}$.

Fracții algebrice. Operații cu fracții algebrice



Ne amintim!

O pereche de numere reale, m și n , în care n este diferit de zero, scrisă sub forma $\frac{m}{n}$ se numește *fracție*.

Linia orizontală care desparte cele două numere se numește *linie de fracție*. Numărul n (de dedesubtul liniei de fracție) se numește *numitorul fracției* și numărul m (de deasupra liniei de fracție) se numește *numărătorul fracției*.

Definiție

Un raport în care termenii sunt expresii algebrice se numește *raport algebric* sau *fracție algebrică* sau *expresie algebrică rațională*.

Domeniul de definiție (numit și *domeniul maxim de definiție*) al unei fracții algebrice este mulțimea numerică în care iau valori necunoscutele exprimate prin litere, cu excepția acelor valori ale necunoscutelor care anulează numitorul.



Atenție!

Domeniul de definiție al unei fracții algebrice poate fi dat ca informație în cadrul unui exercițiu sau al unei probleme. Atunci când domeniul de definiție nu este precizat explicit, vom acorda atenție determinării acestuia prin impunerea condiției de tip *numitor diferit de 0*.

Exersăm împreună!

Fracția algebrică	$\frac{x+3}{x+4}$	$\frac{3x-2}{x-2}$	$\frac{2x-3}{x^2-4}$	$\frac{4}{x^2+1}$	$\frac{a+1}{a(b-1)}$
Condiția de existență	$x+4 \neq 0$	$x-2 \neq 0$	$(x-2)(x+2) \neq 0$	$x^2+1 \neq 0$	$a(b-1) \neq 0$
Fracția are sens pentru:	$x \neq -4$	$x \neq 2$	$x \neq 2$ și $x \neq -2$	Orice număr real	$a \neq 0$ și $b \neq 1$
Domeniul (maximal) de definiție	$x \in \mathbb{R} - \{-4\}$	$x \in \mathbb{R} - \{2\}$	$x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$	$x \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$ și $b \in \mathbb{R} - \{1\}$
Fracția nu are sens pentru:	$x = -4$	$x = 2$	$x \in \{-2; 2\}$	$\emptyset$	$a = 0$ sau $b = 1$



Exemple

✓ Exemple de fracții: $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{21}{17}, \frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{0,3}{1,4}$.

✓ Exemple de fracții algebrice:

a) $\frac{2x+5}{x-1}$; b) $\frac{2}{3x+6}$; c) $\frac{x-5}{2}$.

a) La fracția algebrică $\frac{2x+5}{x-1}$ numărătorul este reprezentat de expresia $2x+5$, iar numitorul este reprezentat de expresia $x-1$. Pentru aflarea domeniului de definiție punem condiția $x-1 \neq 0$. Domeniul de definiție este $\mathbb{R} - \{1\}$. Putem spune că fracția are sens (este bine definită) pentru $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ sau că fracția nu are sens pentru $x = 1$.

b) La fracția algebrică $\frac{2}{3x+6}$ numărătorul este 2, numitorul este $3x+6$. Pentru aflarea domeniului de definiție punem condiția $3x+6 \neq 0$ și obținem $\mathbb{R} - \{-2\}$. Putem spune că fracția are sens pentru $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ sau că fracția nu are sens pentru $x = -2$.

c) La fracția algebrică $\frac{x-5}{2}$ numărătorul este $x-5$, numitorul este 2. Deoarece numitorul este reprezentat de o valoare nenulă, nu este necesară impunerea de condiții, deci domeniul de definiție este $\mathbb{R}$. Putem spune că fracția are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rețineți!

O fracție algebrică, în care partea literală a expresiilor algebrice ce o formează conține doar necunoscuta x , *are sens* pentru orice număr real x pentru care numitorul este diferit de 0.

O fracție algebrică are sens pentru valorile necunoscute pentru care numitorul este diferit de 0.

O fracție algebrică, în care partea literală a expresiilor algebrice ce o formează conține doar necunoscuta x , *nu are sens* pentru valorile reale ale lui x pentru care numitorul este egal cu 0.

O fracție algebrică nu are sens pentru valorile necunoscute pentru care numitorul este egal cu 0.

Exersăm împreună!

Pentru fracția algebrică $E(x) = \frac{3x-2}{x^2+2}$, x număr real, calculați $E(2)$; $E(-3)$; $E(0)$.

Rezolvare: $E(2) = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2^2 + 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $E(-3) = \frac{3 \cdot (-3) - 2}{(-3)^2 + 2} = \frac{-11}{11} = -1$; $E(0) = \frac{3 \cdot 0 - 2}{0^2 + 2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Rețineți!

Pentru fiecare valoare număr real cu care înlocuim necunoscutele într-o fracție algebrică obținem o valoare a acesteia.

Astfel, în exercițiul de mai sus, -1 este valoarea pe care o ia expresia $E(x)$ pentru $x = 0$; înțelegem $E(0) = -1$.

Exersăm împreună!

Pentru fracția algebrică $E(x; y) = \frac{3x-4y}{x^2+2y^2}$, x, y numere reale nenule, calculați $E(2; 1)$; $E(-4; -3)$; $E(\sqrt{2}; \sqrt{8})$.

Rezolvare: Pentru $x = 2, y = 1$ obținem $E(2; 1) = \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 1}{2^2 + 2 \cdot 1^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $E(-4; -3) = \frac{3(-4) - 4(-3)}{(-4)^2 + 2(-3)^2} = \frac{-12 + 12}{16 + 18} = 0$;
 $E(\sqrt{2}; \sqrt{8}) = \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{8}}{2 + 2 \cdot 8} = \frac{-5\sqrt{2}}{18}$.

Rețineți!

Așa cum amplificăm o fracție ordinară cu un număr real, $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$, tot așa amplificăm o fracție algebrică cu un număr real sau cu o expresie algebrică nenulă: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3(x+1)}{3(x-1)} = \frac{3x+3}{3x-3}$; $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+x}{x^2-x}$.

A **amplifica** o fracție algebrică cu o expresie algebrică înseamnă a înmulți și numărătorul și numitorul cu expresia algebrică. Prin amplificarea unei fracții algebrice cu o expresie algebrică nenulă obținem o fracție egală cu fracția inițială.

Exersăm împreună!

Amplificați:

a) cu $2x$ fracția $\frac{1}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; b) cu $x-4$ fracția $\frac{x^2-x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$; c) cu $x-3$ fracția $\frac{x^2-x+3}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Rezolvare: a) $\frac{1}{x+1} = \frac{2x}{2x(x+1)} = \frac{2x}{2x^2+2x}$; b) $\frac{x^2-x}{x-2} = \frac{(x^2-x)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^3-5x^2+4x}{x^2-6x+8}$; c) $\frac{x^2-x+3}{x-3} = \frac{(x^2-x+3)(x-3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^3-4x^2+6x-9}{x^2-6x+9}$.

Discutați ce condiții noi de existență apar la fracțiile algebrice obținute după amplificare.



Așa cum simplificăm o fracție ordinară cu un număr real, $\frac{12}{15} = \frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$, tot așa simplificăm o fracție algebrică cu un număr real sau cu o expresie algebrică nenulă: $\frac{3(x+1)}{3(x-1)} = \frac{3(x+1):3}{3(x-1):3} = \frac{x+1}{x-1}$; $\frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x(x+1):x}{x(x-1):x} = \frac{x+1}{x-1}$.

A **simplifica** o fracție algebrică cu o expresie algebrică nenulă înseamnă a împărți și numărătorul și numitorul cu expresia algebrică.



✓ Simplificarea fracțiilor algebrice se poate face numai când numărătorul și numitorul sunt scrise sub formă de produse. Când expresiile de la numărătorul și numitorul fracției sunt sume sau diferențe, acestea trebuie descompuse în factori, iar apoi simplificarea se face prin factorii comuni. Frația simplificată printr-un factor nenul este echivalentă (egală) cu cea inițială. Dacă simplificarea se face printr-o expresie ce se poate anula, fracția simplificată poate diferi de fracția inițială ca domeniu de definiție! Identificați în exemplele date anterior o astfel de situație! Acordăm atenție ca factorul de simplificare să fie diferit de 0!

✓ Pentru determinarea **numitorului comun** trebuie să ne asigurăm că expresiile de la numitor sunt rescrise sub formă de produse de factori, folosind metodele de descompunere sau formule algebrice studiate. **Numitorul comun** se calculează astfel:

- descompunem numitorii fracțiilor;
- **numitorul comun** este produsul factorilor comuni și necomuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mare.

Exersăm împreună!

1. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{x}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{2x+4x^2}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$; c) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

Rezolvare: a) Observăm că x este factor și al expresiei de la numărător și al expresiei de la numitor (factor comun), deci $\frac{x}{x^3} = \frac{x:x}{x^3:x} = \frac{1}{x^2}$;

b) Pentru a simplifica $\frac{2x+4x^2}{x^2}$, descompunem mai întâi numărătorul fracției: $\frac{2x+4x^2}{x^2} = \frac{2x(1+2x)}{x^2} = \frac{2(1+2x)}{x}$; c) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}$.

2. Aduceți următoarele fracții algebrice la același numitor, prin operația de amplificarea:

a) $\frac{3-x}{x}$; $\frac{4x-3}{2x}$; $\frac{7-x}{5x^2}$; $\frac{x^2+1}{5}$, $x \in \mathbb{R}^*$;

b) $\frac{x+2}{x-1}$; $\frac{x-2}{x+1}$; $\frac{3x-1}{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

Rezolvare: a) Pentru a aduce fracțiile $\frac{3-x}{x}$; $\frac{4x-3}{2x}$; $\frac{7-x}{5x^2}$; $\frac{x^2+1}{5}$ la același numitor trebuie să aflăm numitorul comun. Un numitor comun al expresiilor x ; $2x$; $5x^2$; 5 este $10x^2$. Atunci: $\frac{10x}{10x^2} \cdot \frac{3-x}{x}$; $\frac{5x}{10x^2} \cdot \frac{4x-3}{2x}$; $\frac{2}{10x^2} \cdot \frac{7-x}{5}$; $\frac{2x^2}{10x^2} \cdot \frac{x^2+1}{5}$ și obținem $\frac{30x-10x^2}{10x^2}$; $\frac{20x^2-15x}{10x^2}$; $\frac{14-2x}{10x^2}$; $\frac{2x^4+2x^2}{10x^2}$.

b) Pentru a găsi numitorul comun al fracțiilor algebrice $\frac{x+2}{x-1}$; $\frac{x-2}{x+1}$; $\frac{3x-1}{x^2-1}$ trebuie să descompunem numitorul: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Numitorul comun este $(x-1)(x+1)$; $\frac{x+2}{x-1}$; $\frac{x-2}{x+1}$; $\frac{3x-1}{x^2-1}$. Obținem: $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-1}$; $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}$; $\frac{3x-1}{x^2-1}$.



Pentru problema de mai jos, redactați două soluții: una prin amplificarea fracțiilor, iar cealaltă prin simplificarea fracțiilor. Analizați, prin comparație, cele două rezolvări și precizați avantajele, respectiv dezavantajele fiecărei metode, din perspectivă proprie. Discutați la nivelul clasei concluziile trase de fiecare dintre voi.

Aduceți fracțiile la același numitor, după ce ați determinat domeniul de definiție:

a) $\frac{5}{x^2}$; $\frac{x+2}{x^3+2x^2}$; $\frac{6x^2}{x^4}$; $\frac{x^2-4}{x^3-2x^2}$; b) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}$; $\frac{x+1}{x^2+2x+1}$; $\frac{x^2-1}{x^4-2x^2+1}$.

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

Exersăm împreună!

Calculați: a) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{4}{6}$; b) $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{x+4}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$; c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

Rezolvare: a) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1+5-4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{x+4}{x-3} = \frac{2x+1+x+4}{x-3} = \frac{3x+5}{x-3}$; c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3-2+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Rețineți!

- Pentru adunarea fracțiilor cu același numitor, se adună numărătorii și se păstrează numitorul comun.
- Pentru adunarea fracțiilor de numitori diferiți, primul pas este aducerea fracțiilor la același numitor, prin amplificare sau prin simplificare!
- La adunarea/scăderea fracțiilor algebrice, după aducerea la același numitor acordăm atenție adunării/scăderii numărătorilor, inclusiv cu aplicarea corectă a regulii semnelor.
- Proprietățile și reguli ale adunării și scăderii numerelor reale pot fi utilizate și în cazul operațiilor cu expresii și fracții algebrice.

Exersăm împreună!

1. Verificați egalitățile:

Egalitatea	Numitor comun, condiții de existență a fracțiilor	Aducere la numitor comun și verificare
$\frac{x}{4} + \frac{x+1}{5} = \frac{9x+4}{20}$	pentru 4 și 5, numitor comun este 20	$\frac{5}{5} \frac{x}{4} + \frac{4}{4} \frac{x+1}{5} = \frac{5x+4(x+1)}{20} = \frac{5x+4x+4}{20} = \frac{9x+4}{20}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$	pentru x și $x+1$, numitor comun este $x(x+1)$, $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$	$\frac{x+1}{x+1} \frac{1}{x} - \frac{x}{x} \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x \cdot (x+1)}$
$\frac{x+4}{4x} - \frac{3}{2} - \frac{1}{x} = -\frac{5}{4}$	pentru 2, x și $4x = 2^2x$, numitor comun este $4x$, $x \in \mathbb{R}^*$	$\frac{x+4}{4x} - \frac{2x}{2} \frac{3}{2} - \frac{4}{4} \frac{1}{x} = \frac{x+4-6x-4}{4x} = \frac{-5x}{4x} = -\frac{5}{4}$
$\frac{4x-3}{x+4} - \frac{2x-11}{x+4} = 2$	același numitor, $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$	$\frac{4x-3}{x+4} - \frac{2x-11}{x+4} = \frac{4x-3-(2x-11)}{x+4} = \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = 2$
$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$	pentru $x-2$ și $x+2$, numitor comun este $(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$	$\frac{x+2}{x+2} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$
$\frac{3}{x+2} + \frac{x}{x-2} + \frac{6x-x^2}{x^2-4} = \frac{11x-6}{(x-2)(x+2)}$	descompunem $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, care este numitorul comun, $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$	$\frac{3}{x+2} + \frac{x}{x-2} + \frac{6x-x^2}{x^2-4} = \frac{x-2}{x-2} \frac{3}{x+2} + \frac{x+2}{x+2} \frac{x}{x-2} + \frac{6x-x^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{3(x-2)+x(x+2)+6x-x^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{11x-6}{(x-2)(x+2)}$

2. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

a) $\frac{2x-1}{x+2} + \dots = \frac{x-1}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$	$\frac{2x-1}{x+2} + \frac{?}{x+2} = \frac{x-1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{?}{x+2} = \frac{x-1}{x+2} - \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{?}{x+2} = \frac{-x}{x+2}$
b) $\frac{x+1}{2x} - \frac{3}{5} + \dots = \frac{8-x}{10x}$, $x \in \mathbb{R}^*$	$\frac{5x+5}{10x} - \frac{6x}{10x} + \frac{?}{10x} = \frac{8-x}{10x} \Leftrightarrow \frac{?}{10x} = \frac{8-x}{10x} - \frac{5x+5}{10x} + \frac{6x}{10x} \Leftrightarrow \frac{?}{10x} = \frac{3}{10x}$

Înmulțirea și împărțirea fracțiilor algebrice

Exersăm împreună!

Calculați: a) $-\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{5}$; b) $\frac{2x+1}{x} \cdot \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$; c) $\frac{1}{6} : \frac{4}{3}$; d) $\frac{x}{4} : \frac{2x}{5}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Rezolvare: a) $-\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{5} = -\frac{4}{3}$; b) $\frac{2x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{2x+1}{2}$; c) $\frac{1}{6} : \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$; d) $\frac{x}{4} : \frac{2x}{5} = \frac{x}{4} \cdot \frac{5}{2x} = \frac{5}{8}, x \neq 0$, unde fracția $\frac{5}{2x}$ este inversa fracției $\frac{2x}{5}$.

Rețineți!

- Pentru a înmulți două fracții algebrice, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei, folosind și regula semnelor, după caz.
- Când este posibil, descompunem în factori expresiile de la numitorii și numărătorii fracțiilor, simplificăm și apoi efectuăm înmulțirea.
- Împărțirea a două fracții este înmulțirea primei fracții cu inversa celei de a doua fracții.
- Proprietățile înmulțirii numerelor reale sunt valabile și la înmulțirea fracțiilor algebrice.

Exersăm împreună!

$\frac{5}{a} \cdot \frac{a^2}{7} = \frac{5}{a} \cdot \frac{a^2}{7} = \frac{5a}{7}, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{x}{4x+4} \cdot \frac{x+1}{5x} = \frac{x}{4(x+1)} \cdot \frac{x+1}{5x} = \frac{1}{20}, x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$
$\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{1} = \frac{x+1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$	$4ab : \frac{2a}{3} = \frac{4ab}{1} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{6b}{1} = 6b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$
$\frac{x+1}{x-2} : \frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$	$\frac{2x+1}{x} : \frac{4x+2}{x^2} = \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{x^2}{2(2x+1)} = \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; 0\}$
$\frac{2x+3}{9x^2+30x+25} : \frac{4x^2-9}{9x^2-25} = \frac{2x+3}{(3x+5)^2} \cdot \frac{(3x-5)(3x+5)}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{3x-5}{(3x+5)(2x-3)}, x \in \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$	
$\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} + x^2-1\right) \cdot \frac{x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x-1+x+1+x^2-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+2x-1)} = \frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R} - \{\pm 1; -1 \pm \sqrt{2}\}$	

Ridicarea la putere



Ne amintim

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}; a^n \cdot a^m = a^{n+m}, a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$

$a^n : a^m = a^{n-m}; (a^n)^m = a^{n \cdot m}; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exersăm împreună!

Calculați:

$\left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{x^3}{3^3} = \frac{x^3}{27}, x \in \mathbb{R}$	$\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 = \frac{(2x+1)^2}{x^2} = \frac{4x^2+4x+1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*$
$\left(\frac{2x}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x}{3}\right)^5 = \frac{32x^5}{243}, x \in \mathbb{R}$	$\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^5 : \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^3 = \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^2 = \frac{4x^2+4x+1}{9x^2}, x \in \mathbb{R}^*$
$\left[\left(\frac{8x+5}{6}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{8x+5}{6}\right)^8 = \frac{(8x+5)^8}{6^8}, x \in \mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{3x}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{3x}\right)^3\right]^4 : \left(\frac{1}{3x}\right)^5 = \left(\frac{1}{3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{12} : \left(\frac{1}{3x}\right)^5 = \left(\frac{1}{3x}\right)^9, x \in \mathbb{R}^*$

Expresii algebrice

Considerăm expresia: $E(x) = \left(\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{2-x} + \frac{2+7x}{x^2-4}\right) \cdot \left(x+1 + \frac{3-6x}{x+1}\right)$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 2\}$.

- Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.
- Pentru ce valori întregi ale lui x obținem $E(x) \in \mathbb{Z}$?
- Pentru ce valori reale ale lui x obținem $E(x) \geq 1$?
- Are sens produsul $E(1) \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \dots \cdot E(100)$? Argumentați.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } E(x) &= \left[\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{2+7x}{(x-2)(x+2)}\right] \cdot \left[\frac{(x+1)(x+1)+3-6x}{x+1}\right] = \left[\frac{(x-1)(x-2) - (x+1)(x+2) + 2+7x}{(x-2)(x+2)}\right] \cdot \left(\frac{x^2+2x+1+3-6x}{x+1}\right) = \\ &= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x+1} = \frac{x-2}{x+1}, x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 2\}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } E(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} \in \mathbb{Z}. \text{ Cum } x \in \mathbb{Z}, x+1 \mid x-2 \text{ și } x+1 \mid x+1, \text{ avem } x+1 \mid x+1 - (x-2) \Leftrightarrow x+1 \mid 3; x+1 \in \{-3; -1; 1; 3\}.$$

Obținem $x \in \{-4; -2; 0; 2\}$. Dar $x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 2\}$, așadar $x \in \{-4; 0\}$.

$$\text{c) } E(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x+1} \geq 0. \text{ Cum } -3 < 0, \text{ trebuie ca } x+1 \leq 0. \text{ Dar } x+1 \neq 0, \text{ așadar trebuie ca } x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1. \text{ Obținem } x \in (-\infty; -1). \text{ Cum domeniul de definiție este } x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 2\}, \text{ soluția inecuației este } x \in (-\infty; -1) - \{-2\}.$$

d) Cum produsul conține $E(2)$ și pentru $x = 2$ nu este definită expresia inițială, produsul respectiv nu are sens.

Observații

■ A aduce o expresie algebrică, care presupune calcul cu fracții, la forma cea mai simplă înseamnă a efectua calcule algebrice de tip factor comun, descompuneri, utilizarea de formule de calcul prescurtat, aduceri la același numitor, adunare, scădere, înmulțire, reducere de termeni asemenea.

În cazul exemplificat, forma cea mai simplă a expresiei $E(x) = \left(\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{2-x} + \frac{2+7x}{x^2-4}\right) \cdot \left(x+1 + \frac{3-6x}{x+1}\right)$ este $E(x) = \frac{x-2}{x+1}$, fiind echivalente pentru $x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 2\}$.

De regulă, înainte de a aduce o expresie de tipul dat la forma cea mai simplă, trebuie să avem în vedere precizarea domeniului de definiție al expresiei inițiale, forma simplificată putând ascunde valori pentru care fracția inițială nu se poate defini, dar fracția finală da!

■ La rezolvarea inecuației $\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{1}{1}$ nu putem implica proprietatea fundamentală a proporțiilor, bazată pe înmulțirea ambilor membri cu valori sau expresii, decât atunci când se cunoaște semnul acestora. Astfel, dacă numitorul este o expresie care variază ca semn (pentru anumite valori este pozitivă, pentru altele negativă sau 0), se procedează ca în exemplul dat, cu trecerea tuturor fracțiilor într-un singur membru, apoi aducerea la același numitor și cu studierea semnului fracției obținute. Reducem astfel problema la studiul semnului unei fracții (prin compararea sa cu 0).

Proiect

Rezolvați, pe grupe de elevi, problema de mai jos. Comparați rezultatele cu cele ale celorlalte grupe și analizați eventualele diferențe.

$$\text{Fie expresia: } E(x) = \left(\frac{x-3}{x+3} - \frac{2}{3-x} + \frac{1-x^2}{x^2-9}\right) \cdot \frac{4x-16}{x^2+6x+9}.$$

- Determinați domeniul maxim de definiție al lui $E(x)$.
- Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.
- Pentru ce valori întregi ale lui x , $E(x) \in \mathbb{Z}$?
- Pentru ce valori reale ale lui x , $E(x) \leq -1$?
- Care dintre răspunsurile la cerințele anterioare poate diferi și de ce?

Exersați

1. Determinați valorile necunoscutei x pentru care fracțiile următoare sunt bine definite:

a) $\frac{x+3}{x-1}$; b) $\frac{x-5}{x+3}$; c) $\frac{x-5}{x^2-16}$; d) $\frac{x+2}{x^2+1}$.

2. Calculați:

a) $F(-1)$ și $F(0)$ pentru $F(x) = \frac{x^2+2x-5}{x^2+3}$; b) $F(-2)$ și $F(-1)$ pentru $F(x) = \frac{x^2-3x+5}{x^2+1}$.

3. Amplificați și apoi determinați domeniile de definiție ale fracțiilor obținute:

a) $\frac{x^2}{x-1}$ cu $2x$; b) $\frac{2x-3}{x+2}$ cu $x-1$; c) $\frac{2x-1}{x+1}$ cu x^2 ; d) $\frac{x+2}{3x-1}$ cu $x+2$; e) $\frac{2x-3}{3x+1}$ cu $3x-1$;

f) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}$ cu $x+1$; g) $\frac{x^2-x+3}{x^2+x-2}$ cu $2x$; h) $\frac{x+1}{x-1}$ cu x^2+x+1 ; i) $\frac{2}{5}$ cu x^2+x+1 .

4. Simplificați fracțiile, după ce determinați domeniul de definiție pentru fiecare caz:

a) $\frac{15x^3y^2}{20x^2y^3}$; b) $\frac{16x^2y^3}{20xy^2}$; c) $\frac{12x^4y^3}{18x^2y^2}$; d) $\frac{8xy^3}{12x^2y^2}$; e) $\frac{9x^2y}{12xy^3}$; f) $\frac{4x-4}{6x-6}$;
g) $\frac{x^2-x}{2x-2}$; h) $\frac{3x+6}{2x^2+4x}$; i) $\frac{3x^2+3x}{2x+2}$; j) $\frac{4x-8}{x^2-2x}$; k) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; l) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$.

5. Simplificați fracțiile, după ce determinați domeniul de definiție pentru fiecare caz:

a) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; b) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$; c) $\frac{x^3+10x^2+25x}{50-2x^2}$; d) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; e) $\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$; f) $\frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}$;
g) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; h) $\frac{(2x-3)^2-x^2}{3x^2-9x}$; i) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}$; j) $\frac{x^4+x^3+3x^2}{2x^3+2x^2+6x}$; k) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-4x-5}$; l) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-4}$.

6. Determinați domeniul de definiție al fracțiilor următoare, apoi aduceți la același numitor:

a) $\frac{3}{x}$, $\frac{5x}{x^2+x}$, $\frac{1}{x^2-x}$, $\frac{x+3}{x^2-1}$; b) $\frac{30x-10x^2}{10x^2}$, $\frac{20x+20}{10x(x+1)}$, $\frac{14-4x}{2x}$, $\frac{x^2-9}{x^2-3x}$; c) $\frac{x+2}{x-1}$, $\frac{x-2}{x+1}$, $\frac{3x-1}{x^2-1}$; d) $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{3}{x^2-x}$, $\frac{x}{x^2-4}$.

A fost util faptul că înainte de aducerea la același numitor s-a realizat determinarea domeniilor de definiție? Explicați.

7. Calculați, după ce găsiți domeniul de definiție pentru fiecare exercițiu:

a) $\frac{x}{5} + \frac{3x}{5}$; b) $\frac{x+1}{2x} - \frac{x}{3} + \frac{2x+3}{6x}$; c) $\frac{x-1}{6x} + \frac{3x+1}{3} - \frac{x+4}{4x}$; d) $\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{x+2}{2x} + \frac{x-3}{3}$;
e) $\frac{x}{7} + \frac{3-x}{7}$; f) $\frac{x-1}{5x} - \frac{x^2+1}{2x^2} - \frac{x+1}{x^2}$; g) $\frac{x-2}{6x} - \frac{x+1}{9} - \frac{2-x}{3x^2}$; h) $\frac{4x+3}{3(x+1)} + \frac{-2}{5(x+1)}$;
i) $\frac{-1}{x(x+1)} + \frac{x-1}{x+1}$; j) $\frac{5}{x+1} + \frac{11}{2x+2} - \frac{4}{3x+3}$; k) $\frac{x}{x+10} + \frac{10}{x-10} + \frac{20x}{x^2-100}$; l) $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{x^2-4}$.

8. Calculați, după ce găsiți domeniul de definiție pentru fiecare exercițiu:

a) $\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-1}$; b) $\frac{1}{x-3} + \frac{x+6}{x^2-3x} + \frac{x-3}{x^2}$; c) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-4x+4} + \frac{x+1}{x^2+4x+4}$;
d) $\frac{x+1}{5x-x^2} - \frac{x}{x^2-25}$; e) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-7x+10} - \frac{3x}{x-2} - 2$; f) $\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{2x-2}{x+2} + \frac{8-4x}{x^2+x-2}$;
g) $\frac{x+2}{9-12x+4x^2} - \frac{x-1}{2x^2-x-3}$; h) $\frac{3x^2-2x-1}{x^3-x} - \frac{3x+6}{4x^2+12x+8}$; i) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-8x+15} - \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} + \frac{1-x}{3-x}$.

9. Calculați, după ce găsiți domeniul de definiție pentru fiecare exercițiu:

a) $\frac{6}{10} \cdot \frac{a}{4}$; b) $\frac{2a}{3} \cdot \frac{4b}{5}$; c) $\frac{x^2}{3} \cdot \frac{4y}{a}$; d) $15 \cdot \frac{2xy^2}{3a}$; e) $\frac{3(x+1)}{4x} \cdot \frac{x^3}{x+1}$; f) $\frac{6}{10} : \frac{a}{4}$;
g) $\frac{2a}{3} : \frac{4b}{5}$; h) $\frac{x^2}{3} : \frac{4y}{a}$; i) $15 : \frac{2xy^2}{3a}$; j) $\frac{3(x+1)}{4x} : \frac{x^3}{x+1}$; k) $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{2}$; l) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{2x-1}$.

10. Calculați, după ce găsiți domeniul de definiție pentru fiecare exercițiu:

a) $\frac{2x+3}{2x-3} \cdot \frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$; b) $\left(\frac{x-2}{x} + \frac{x}{x-2} - 1\right) \cdot \frac{x^2}{x^2-2x+4}$; c) $\frac{2x+3}{2x-3} : \frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$;
d) $\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) : \frac{4x}{x^2-2x+1}$; e) $\frac{1}{x^2-1} \cdot \left(1 + \frac{x-1}{x}\right) : \left(\frac{x+1}{x} - 1\right)$; f) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right) : \frac{2x-1}{4x^2-1}$;
g) $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{3}{2}$; h) $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right)$; i) $\left(\frac{2+x}{x}\right)^5 \cdot \left(\frac{2+x}{x}\right)^3 : \left(\frac{2+x}{x}\right)^8$.

11. Calculați, după ce găsiți domeniul de definiție pentru fiecare exercițiu:

- a) $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x^2 + x}{2x + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - 1}\right)$;
 b) $\left(\frac{x+1}{x} + \frac{2x+2}{x^2-x}\right) : \frac{2x+2}{x^2-x}$;
 c) $\left(\frac{3x}{1-3x} + \frac{2x}{3x+1}\right) : \frac{6x^2+10x}{1-6x+9x^2}$;
 d) $\left(\frac{3x}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1}\right) : \frac{1}{x-1}$;
 e) $\left(\frac{2x}{2x+3} - \frac{12x+27}{9-4x^2} - \frac{3x}{2x-3}\right) : \frac{x-3}{2x-3}$;
 f) $\left(\frac{1-x}{4x-3} + \frac{x+1}{4x+3} - \frac{x-2}{16x^2-9}\right) \cdot \left(4 - \frac{5}{x+2}\right)$;
 g) $\left(\frac{2x}{2x+1} - \frac{4x^2}{4x^2+4x+1}\right) : \left(\frac{2x}{4x^2-1} + \frac{1}{1-2x}\right)$;
 h) $x^2 + x + 2 + \frac{x+1}{x-2} : \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right)$;
 i) $\frac{x+6}{x+2} + \frac{x-2}{2x+1} \cdot \left(\frac{x-3}{x+2} - \frac{x+1}{x-2}\right)$;
 j) $\left(\frac{1}{x} + \frac{x^4-1}{x^2+2x+1} : \frac{x^3+x}{x+1} + x\right) : \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$;
 k) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{(x-1)^2-4} \cdot \left(1 + \frac{4x+x^2}{x+4}\right)$.

12. Verificați dacă $\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x$, $x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$.

13. Verificați dacă $F(x) = \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{2x-10}$ depinde de x , unde $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1; 5\}$.

14. Verificați dacă $\frac{x^2-4x+4}{x-2} : \frac{x^2-4}{4x+8} \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

15. Fie $E(x) = \left(\frac{x+1}{x^2-2x} + \frac{x}{x^2-4} - \frac{x+1}{x^2+2x}\right) : \frac{x^2+5x+6}{x^3-4x^2+4x}$, cu $x \in \mathbb{R} - \{-3; -2; 0; 2\}$.

a) Arătați că $x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x-2)^2$ și $x^2 + 5x + 6 = (x+2) \cdot (x+3)$.

b) Arătați că $E(x) = \frac{x-2}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-3; -2; 0; 2\}$.

c) Dacă $F(x) = E(x) \cdot (x+3)$, calculați: $F(3) + F(4) + \dots + F(2016)$.

16. Considerăm $E(x) = \left(\frac{7x-1}{x^2-1} + \frac{x-2}{x+1} + \frac{x+2}{1-x}\right) \cdot \left(x+3 + \frac{4}{x-1}\right)$.

a) Determinați domeniul maxim de definiție al lui $E(x)$.

b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Pentru ce valori întregi ale lui x , $E(x) \in \mathbb{Z}$?

d) Pentru ce valori reale ale lui x , $2E(x) \leq 2$?

17. Fie $E(x) = \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4}\right) : \frac{2x+6}{x^3-4x}$.

a) Determinați domeniul maxim de definiție al lui $E(x)$.

b) Arătați că $E(x) = \frac{x+2}{x+3}$, x aparținând domeniului maxim de definiție.

c) Rezolvați ecuația $E(x) = \frac{4}{5}$.

d) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

e) Determinați numerele reale x pentru care $E(x) \leq 1$.

Activitate practică

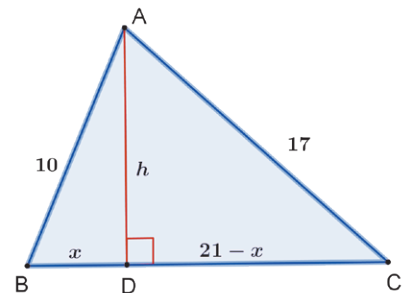
O aplicație în geometrie

Considerăm triunghiul ABC , $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 21$ cm și înălțimea AD , $D \in BC$. Calculați lungimea înălțimii.

Rezolvare: Cum $21^2 > 17^2 + 10^2$, rezultă că unghiul A este obtuz, deci unghiurile B și C sunt ascuțite. În concluzie, piciorul perpendicularei din A pe BC este interior segmentului BC .

Notăm cu x lungimea segmentului BD și cu h lungimea înălțimii AD . Din *teorema lui Pitagora* în cele două triunghiuri dreptunghice ABD și ACD obținem $\begin{cases} x^2 + h^2 = 100 \\ (21-x)^2 + h^2 = 289 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 100 \\ 441 - 42x + x^2 + h^2 = 289 \end{cases}$ și, înlocuind prima relație în a doua relație: $441 - 42x + 100 = 289$, deci $x = 6$ cm.

Reluând prima relație: $36 + h^2 = 100 \Rightarrow h = 8$ cm, unde am ținut cont că h este o distanță, deci nu poate avea valori negative.



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$,
unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Exersăm împreună!

Un teren în formă de dreptunghi are lungimea cu 5 m mai mare decât lățimea și aria egală cu 66 m^2 . Care sunt dimensiunile terenului?

Rezolvare: Notăm cu x lățimea terenului. Datele problemei se pot scrie astfel: $x(x + 5) = 66, x \in \mathbb{R}$. Ecuatia este echivalentă cu $x^2 + 5x - 66 = 0$, adică $(x - 6)(x + 11) = 0$ și are soluțiile 6 și -11 . Cum x este lățimea unui teren, atunci singura soluție valabilă este $x = 6 \text{ m}$ (lățimea terenului) și $6 + 5 = 11 \text{ m}$ (lungimea terenului).

Rețineți!

O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul al doilea**, cu coeficienți reali, în necunoscuta x .

Condiția $a \neq 0$ este necesară deoarece pentru $a = 0$ ecuația devine o ecuație de cel mult gradul I: $bx + c = 0$.

Numerele a, b, c se numesc **coeficienții ecuației**, c numindu-se și **termen liber** (valoare care nu este înmulțită cu necunoscuta). Valorile necunoscute pentru care egalitatea este adevărată se numesc **soluții** sau **rădăcini** ale ecuației. A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor, aceasta putând fi și mulțimea vidă!

Exersăm împreună!

1. Determinați coeficienții ecuațiilor de gradul al doilea (în cazul în care avem ecuații de gradul al doilea):

Ecuatia	Coeficienții ecuației	Necunoscuta
$4x^2 - 5x + 6 = 0$	$a = 4, b = -5, c = 6$	x
$-y^2 + y - 3 = 0$	$a = -1, b = 1, c = -3$	y
$2x^2 - 3x = 0$	$a = 2, b = -3, c = 0$	x
$a^2 - 5 = 0$	$a = 1, b = 0, c = -5$	a
$\frac{3}{2x^2} - x + 1 = 0$	nu este ecuație de gradul al II-lea din cauza termenului $\frac{3}{2x^2}$	
$-4x^3 + 8x - 1 = 0$	nu este ecuație de gradul al II-lea din cauza termenului $-4x^3$	

2. Scrieți ecuațiile de gradul al II-lea în necunoscuta x , care au coeficienții:

Coeficienții ecuației	Ecuatia
$a = 3, b = 1, c = -4$	$3x^2 + x - 4 = 0$
$a = -2, b = 8, c = -1$	$-2x^2 + 8x - 1 = 0$
$a = -3, b = 21, c = 0$	$-3x^2 + 21x = 0$
$a = 8, b = 0, c = -2$	$8x^2 - 2 = 0$

3. Verificați dacă $x = 3$ este soluție a ecuațiilor:

Ecuția	Verificarea soluției
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$ relație adevărată, deci $x = 3$ este soluție
$4x^2 - 5x + 6 = 0$	$4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$ fals, deci $x = 3$ nu este soluție

4. Descompuneți expresiile asociate următoarelor ecuații și apoi determinați soluțiile acestora:

Ecuția	Descompunere	Soluții
$x^2 - 5x = 0$	$x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x - 5 = 0$	soluțiile sunt 0 și 5
$4x^2 - 36 = 0$	$4(x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0$ sau $x + 3 = 0$	soluțiile sunt 3 și -3
$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x^2 - 3x + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$	soluțiile sunt 3 și -1

Rețineți!

Etapele rezolvării ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

- Etape de identificare corectă a coeficienților $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$.
- Etape de calcul al discriminantului ecuației, $\Delta = b^2 - 4ac$ (obținerea valorii și evidențierea semnului acestuia).
- Etape de interpretare a semnului discriminantului și, după caz, calculul soluțiilor:

I. Dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ecuația are două soluții reale și distincte:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

II. Dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ecuația are două soluții reale egale:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \text{ (două soluții, o singură valoare!) }.$$

III. Dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, ecuația nu are soluții reale.



Observații

Am observat că ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ este echivalentă cu ecuația $(x - 2)(x + 1) = 0$. Se poate remarca avantajul major pe care îl aduce rescrierea unei ecuații de gradul al II-lea de la forma generală $ax^2 + bx + c = 0$ la o formă ce implică produs de factori egal cu 0! Aveți astfel o motivație importantă pentru a deține și exersa deprinderile de descompunere a unei expresii algebrice în factori.

Deoarece există cazuri în care prelucrarea algebrică a ecuației de gradul al II-lea nu permite descompunerea în factori, sau aceasta este dificilă, rezolvarea poate parcurge pașii prezentați în cele ce urmează.



Cazuri particulare

➤ Dacă $b = 0$, ecuația devine

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Dacă $-\frac{c}{a} > 0$, ecuația are două soluții reale:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Dacă $-\frac{c}{a} = 0$, ecuația are două soluții reale

egale: $x_1 = x_2 = 0$.

Dacă $-\frac{c}{a} < 0$, ecuația nu are soluții reale (mulțimea soluțiilor este mulțimea vidă).

➤ Dacă $b \neq 0$, $c = 0$ ecuația devine

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \text{ și are două}$$

soluții reale: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$.

În aceste cazuri, rezolvarea se poate realiza prin rescrierea ecuației folosind metode de descompunere, fără a apela în mod necesar la pașii anteriori.

Exersăm împreună!

Rezolvați ecuațiile:

Ecuția și coeficienții	Δ și discuție	Soluții
$x^2 - 5x + 6 = 0$ $a = 1, b = -5, c = 6$	$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$ $\Delta > 0$, două soluții reale distincte	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$
$x^2 - 6x + 9 = 0$ $a = 1, b = -6, c = 9$	$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$ $\Delta = 0$, două soluții reale egale	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = 3$
$-x^2 + x - 6 = 0$ $a = -1, b = 1, c = -6$	$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 24 = -23 < 0$ $\Delta < 0$, nu are soluții reale	$\emptyset$
$x^2 - 6x = 0$ $a = 1, b = -6, c = 0$	$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 0 = 36$ $\Delta > 0$, două soluții reale distincte	$x_1 = \frac{6 - \sqrt{36}}{2} = 0, x_2 = \frac{6 + \sqrt{36}}{2} = 6$
$2x^2 - 5 = 0$ $a = 2, b = 0, c = -5$	$\Delta = b^2 - 4ac = 0 + 40 = 40$ $\Delta > 0$, două soluții reale distincte	$x_1 = \frac{0 - \sqrt{40}}{4} = -\frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{0 + \sqrt{40}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Rețineți!

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0, \text{ unde } a \neq 0!$$

$$\text{Dacă } \Delta > 0, \text{ atunci ecuația devine: } a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

$$\text{Dacă } \Delta = 0, \text{ atunci } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

$$\text{Dacă } \Delta < 0, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \text{ este sumă strict pozitivă de pătrate și nu se descompune.}$$

Am găsit o nouă metodă de descompunere: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației atașate $ax^2 + bx + c = 0$ în cazul $\Delta \geq 0$.

Exersăm împreună!

1. Scrieți câte o ecuație de gradul al II-lea, cunoscând soluțiile în fiecare caz:

Soluțiile ecuației	Ecuația
$x_1 = 5, x_2 = -8$	$(x - 5)(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$
$x_1 = 3, x_2 = -3$	$(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$
$x_1 = 0, x_2 = 4$	$x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$

Observație. Cunoscându-se soluțiile unei ecuații de gradul al doilea, aceasta nu este unică: astfel, ecuațiile atașate expresiilor $(x - 5)(x + 8) = x^2 + 3x - 40$ și $2(x - 5)(x + 8) = 2x^2 + 6x - 80$ au aceleași soluții $x_1 = 5, x_2 = -8$! Mai general, oricare ar fi numărul real nenul a , ecuațiile de forma $a(x - 5)(x + 8) = 0$ admit soluțiile $x_1 = 5, x_2 = -8$.

2. Determinați soluțiile ecuațiilor și descompuneți expresiile atașate ecuațiilor.

Ecuația	Coeficienții ecuației	Soluțiile	Descompunerea expresiei atașate
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$a = 1, b = -5, c = 6$	$\Delta = 25 - 24 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$	$x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x - 2)(x - 3)$
$x^2 - 6x + 9 = 0$	$a = 1, b = -6, c = 9$	$\Delta = 36 - 36 = 0, x_1 = x_2 = 3$	$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	Notăm $x^2 = y$ și rezolvăm ecuația $y^2 - 5y + 4 = 0$ cu coeficienții $a = 1, b = -5, c = 4$	$\Delta = 25 - 16 = 9, y_1 = 1, y_2 = 4$	$y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4),$ $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) =$ $= (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

3. Descompuneți în produs de expresii de gradul al II-lea:

$$a) (x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x - 4) + 3; \quad b) (x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x + 2) - 3.$$

$$\text{Rezolvare: a) Notăm } x^2 + 2x = y \text{ și rezolvăm ecuația } y(y - 4) + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0; \text{ obținem } y_1 = 1, y_2 = 3;$$

$$y^2 - 4y + 3 = (y - 1)(y - 3) = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x - 3).$$

$$4. \text{ Simplificați fracțiile: a) } \frac{(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 3) + 1}{(x^2 + 3x + 1)^2 - 1}, \quad b) \frac{(x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 6) + 6}{(x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 4) + 2}.$$

$$\text{Rezolvare: a) Descompunem } (x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 3) + 1. \text{ Notăm } (x^2 + 3x + 1) = y \text{ și descompunem } y \cdot (y + 2) + 1 =$$

$$= y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2. \text{ Obținem } (x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1 + 1)^2 = (x^2 + 3x + 2)^2.$$

$$\text{Descompunem } (x^2 + 3x + 1)^2 - 1 = [(x^2 + 3x + 1) - 1][(x^2 + 3x + 1) + 1] = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2).$$

$$\frac{(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 3) + 1}{(x^2 + 3x + 1)^2 - 1} = \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)} = \frac{(x^2 + 3x + 2)}{(x^2 + 3x)} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{x(x + 3)}.$$

Exersați

1. Verificați dacă $x = -1$ este soluție a ecuațiilor:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - 2x + 1 = 0$; c) $x^2 + 8x + 16 = 0$; d) $(4x + 3)^2 + 8 = 0$.

2. Identificați coeficienții ecuațiilor:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$; b) $x^2 + 8x + 16 = 0$; c) $x^2 - 15 = 1$; d) $(4x + 3)^2 + 8 = 0$.

3. Care dintre următoarele ecuații sunt ecuații de gradul al II-lea?

a) $x^2 - 15 = 1$; b) $-(5x + 6)^2 - 4 = 0$; c) $\sqrt{x^2} + 2x + 1 = 0$; d) $\frac{2}{x} + x^2 + 3 = 0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $x^2 - 4x + 3 = 0$; b) $-3x^2 + 243 = 0$; c) $-4x^2 + 6x = 0$; d) $x^2 - 15 = 1$;

e) $3x^2 - 2x = 0$; f) $x^2 + 5x - 6 = 0$; g) $-4x^2 + 4x - 7 = 0$; h) $x^2 - 7x + 10 = 0$; i) $x^2 - 6x + 8 = 0$; j) $5x^2 - 45 = 0$;

k) $-(5x + 6)^2 - 4 = 0$; l) $x^2 - 5x + 9 = 0$; m) $3x^2 + 5x + 4 = 0$; n) $2x^2 + 7x + 5 = 0$; o) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

5. Scrieți câte o ecuație de gradul al II-lea pentru care se cunosc soluțiile:

a) $x_1 = -5, x_2 = 2$; b) $x_1 = -3, x_2 = 3$; c) $x_1 = 1, x_2 = 2$; d) $x_1 = 4, 5; x_2 = 2, 5$; e) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile, folosind descompunerea în factori:

a) $(x + 4)^2 - 25 = 0$; b) $5x^2 + 20x = 0$; c) $(x - 1)^2 - 4 = 0$; d) $-0,6x^2 + 3,6x = 0$.

7. Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $2x^2 + ax - 4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ are soluția -4 . Rezolvați apoi ecuația pentru valoarea determinată a lui a .

8. Descompuneți expresiile în factori:

a) $2x^2 + 9x + 10$; b) $x^2 - 5x + 4$; c) $7x^2 + x\sqrt{8} - 2$; d) $-6x^2 + x + 1$; e) $x^2\sqrt{10} - x\sqrt{24} - \sqrt{10}$; f) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$;
g) $(x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 5) + 9$; h) $(x^2 + 2x)^2 + 5(x^2 + 2x) + 6$; i) $(x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 4) + 6$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{x+11}{x+2} = x + 3, x \neq -2$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}, x \neq -1, x \neq 0$; c) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1}, x \neq \pm 1$.

10. Aduceți următoarele ecuații la forma $ax^2 + bx + c = 0$ și apoi rezolvați-le în $\mathbb{R}$:

a) $x(x + 3) = 4$; b) $(2x - 1)(-x + 3) = -7$; c) $(x - 4)^2 = 2x$;
d) $(3x - 1)^2 = (x + 3)^2$; e) $-2x(x + 3) = 6 + x$; f) $(5x - \sqrt{7})(5x + \sqrt{7}) = 18x$.

11. Determinați numerele reale x și y care au suma egală cu -3 și produsul egal cu -10 .

12. Determinați dimensiunile laturilor unui triunghi dreptunghic, știind că acestea sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive.

13. Calculați aria și perimetrul unui triunghi dreptunghic care are ipotenuza de 10 cm, știind că lungimea uneia dintre catete este cu 2 cm mai mică decât lungimea celeilalte catete.

14. Determinați valoarea numărului real m pentru care ecuația $x^2 - 5x = 2m + 1$ are soluții reale.

15. Determinați valorile întregi ale lui m pentru care soluțiile ecuației $x^2 + mx + 1 = 0$ sunt numere întregi.

Investigație

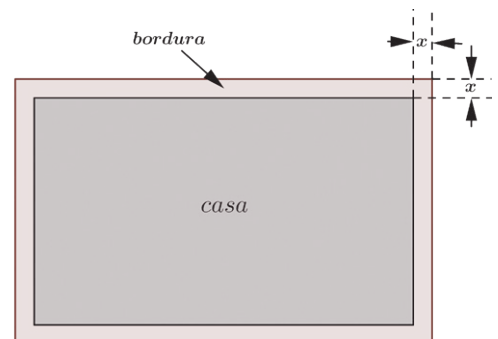
Amprenta la sol a unei clădiri are forma unui dreptunghi cu lungimea de 10 m și lățimea de 6 m. Proprietarul clădirii dorește să construiască o bordură de beton în jurul acesteia, care să aibă aceeași lățime pe toate laturile. Care este lățimea maximă a bordurii, dacă fondurile pe care le are proprietarul la dispoziție sunt suficiente pentru a acoperi o suprafață de 17 m^2 de bordură?

Rezolvare. Notăm cu x lățimea bordurii și calculăm aria suprafeței acesteia: $A_{\text{bordură}} = 2 \cdot 10 \cdot x + 2 \cdot 6 \cdot x + 4 \cdot x^2$.

Cum fondurile sunt suficiente pentru doar 17 m^2 de bordură, obținem ecuația: $4x^2 + 32x = 17 \Leftrightarrow 4x^2 + 32x - 17 = 0$;

$$\Delta = 32^2 + 4 \cdot 4 \cdot 17 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 36; x_1 = \frac{-32 - 36}{2 \cdot 4} < 0 \text{ și } x_2 = \frac{-32 + 36}{4 \cdot 2} = 0,5$$

deci fondurile îi sunt suficiente pentru o lățime a bordurii de maximum 0,5 m!



Recapitulare

1. Precizați valorile lui x pentru care fracțiile următoare sunt bine definite:

a) $\frac{4}{4x}$; b) $\frac{x}{x+1}$; c) $\frac{5x-4}{x^2+1}$; d) $\frac{x}{x^2-1}$; e) $\frac{x-4}{x^2+2x+1}$; f) $\frac{7x-5}{x^2-100}$.

2. Precizați valorile lui x pentru care fracțiile nu sunt definite:

a) $\frac{4}{5x}$; b) $\frac{3x-1}{2x}$; c) $\frac{x-4}{x+1}$; d) $\frac{2x-3}{x-2}$; e) $\frac{x+1}{x^2+1}$; f) $\frac{x^2+x}{2x+5}$;
g) $\frac{7x-1}{x^2}$; h) $\frac{x-5}{(x+1)(x-2)}$; i) $\frac{4x+1}{x^2-4x+4}$; j) $\frac{3x-7}{x^2-25}$.

3. Determinați valorile numerice ale rapoartelor:

a) $\frac{5}{x}$, pentru $x \in \{-1, 2\}$; b) $\frac{3}{x+1}$, pentru $x \in \{0, 2\}$;
c) $\frac{2x}{3x+1}$, pentru $x \in \{-1, 2\}$; d) $\frac{x-2}{x+2}$, pentru $x \in \{-1, 1\}$;
e) $\frac{2x+3}{x^2+1}$, pentru $x \in \{0, 1\}$; f) $\frac{x}{2-x}$, pentru $x \in \{-1, 0\}$;
g) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, pentru $x \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$;
h) $\frac{2x+1}{x+2}$, pentru $x \in \{-1, 0\}$.

4. Simplificați fracțiile, după ce determinați domeniul de definiție:

a) $\frac{2x^3}{4x^2}$; b) $\frac{ab^2}{3abc}$; c) $\frac{2x+2y}{2a}$; d) $\frac{27xy^4}{18y^5}$; e) $\frac{5a^2-a}{5a-1}$;
f) $\frac{x+3}{x^2-9}$; g) $\frac{9x^2+6x+1}{9x^2-1}$; h) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$;
i) $\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}$; j) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+7x+10}$; k) $\frac{2x^2+x}{4x+2}$;
l) $\frac{2x^4+2x^3+2x^2}{6x^3+6x^2+6x}$; m) $\frac{3x^4-15x^3+6x^2}{9x^3-45x^2+18x}$; n) $\frac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}x+3}$;
o) $\frac{4x^3-x}{4x^2+4x+1}$; p) $\frac{6x^3-12x^2+18x}{12x^4+12x^3}$; q) $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$;
r) $\frac{x^4+x^3-6x^2-4x+8}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$; s) $\frac{(2x-3)^2-x^2}{-x^3+3x^2-5x+3}$;
t) $\frac{x^3-x}{2x^3-4x^2+2x}$; u) $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2+3x+2}$;
v) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$; x) $\frac{x^4-x^3-x+1}{x-1}$.

5. Aduceți expresiile la forma cea mai simplă, după ce scrieți domeniul de definiție:

a) $\frac{3x+1}{x^2+x} - \frac{2}{x^2+3x+2}$; b) $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1-x}{1-2x+x^2}$;
c) $\frac{2x+4}{x^2-4} + \frac{5x+1}{2x-x^2}$;

d) $\frac{x}{2x-6} + \frac{x+1}{9-3x} + \frac{1}{9-x^2}$; e) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x^2-1}$;
f) $\frac{21}{2-4x} - \frac{10}{1-4x^2} - \frac{2}{2x^2-x}$; g) $\frac{4}{x+2} + \frac{3x}{2-x} - \frac{3x^2+4}{4-x^2}$;
h) $\left(\frac{x}{x+2} - \frac{4x^2+2}{x^2-4} + \frac{3x}{x-2}\right) \cdot \left(x - \frac{3x^2+2x-4}{4x-2}\right)$;
i) $\left(\frac{2x}{x+3} - \frac{3x^2-4x-1}{x^2-9} + \frac{x}{x-3}\right) \cdot \left(x - \frac{7x-9}{x+1}\right)$;
j) $\left(\frac{2x^2+2x}{x^2+2x+1} + \frac{3x^2-3x}{x^2-2x+1} - \frac{5x^2-2}{x^2-1}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x+2}\right)$;
k) $\left(\frac{2x}{x-5} + \frac{x}{x+5} - \frac{3x^2+4x-2}{x^2-25}\right) \cdot \left(x - \frac{12x-25}{x+2}\right)$.

6. Considerăm expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{3-x} + \frac{x^2+16}{x^2-9}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x-4}\right).$$

- a) Determinați valorile lui x pentru care $E(x)$ are sens.
b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.
c) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)$ este întreg.

7. Pentru fiecare caz în parte, scrieți o ecuație de gradul al doilea care să aibă soluțiile:

a) 4 și 5; b) 2 și 2; c) 1,5 și -1,5; d) $2 - \sqrt{5}$ și $2 + \sqrt{5}$.

8. Determinați un număr real pozitiv care să fie cu 2 mai mare decât inversul său.

9. Demonstrați că, pentru orice valoare reală a lui m , ecuația cu necunoscuta y de forma: $y^2 + 3m^2 = 4my$ are soluții reale. Care sunt acestea?

10. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 + 3x = 0$; b) $16x^2 = 25$;
c) $x^2\sqrt{3} + 2 = 0$; d) $x^2\sqrt{5} - \sqrt{20} = 0$;
e) $(2x-1)^2 - 49 = 0$; f) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
g) $-x^2 + 3x - 1 = 0$; h) $2x^2 + 3x - 1 = 0$;
i) $(x^2+1)(x^2-3) = -4$; j) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 1,4$.

11. Calculați diagonala unui dreptunghi, știind că perimetrul său este de 15 m, iar aria este de 14 m².

12. Stabiliți, în două moduri, dacă există două numere naturale consecutive al căror produs să fie 342.

13. Determinați două numere reale care au media geometrică 40 și media armonică 32.

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare

Test de autoevaluare

1. Calculați:

- a) $3x + 5x + 2 + 2(x - 2) - (6x - 2)$; b) $x(2x + 1) - 2x^2$;
c) $(8x^3 + 12x^2 + 6x) : (2x)$; d) $(x + 5)(2x - 3)$.

2. Calculați, aplicând formulele de calcul prescurtat:

- a) $(x + 1)^2$; b) $(2x + 1)(2x - 1)$;
c) $(6x - 4)^2$; d) $(2x + 3)^2 - (3x + 2)^2$.

3. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $4x^5 - 16x^3$; b) $x^2 + 10x + 9$;
c) $4x^2 + 18x + 18$; d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 18$.

4. Considerăm expresia

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} + \frac{-1}{x^2+3x+2} \right) : \frac{x-1}{x+1},$$

$x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; +1\}$.

- a) Arătați că $E(x) = \frac{2}{x-1}$.
b) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)$ este un număr întreg.
c) Rezolvați inecuația $E(x) \leq 0$.
d) Calculați
 $S = [E(2)]^{-1} + [E(3)]^{-1} + [E(4)]^{-1} + \dots + [E(n)]^{-1}, n \in \mathbb{N}$.

Punctaj: 1p din oficiu; 1. 2p; 2. 2p; 3. 2p; 4. 3p.

Timp de lucru: 50 de minute.

Test de evaluare

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

- a) $2x^2 + 11x + 12 = 0$; b) $x^2\sqrt{3} + 4x\sqrt{8} + 4\sqrt{32} = 0$;
c) $x^2 + 5x + 7 = 0$; d) $9x^2 - 27 = 0$.

2. Descompuneți expresiile în factori:

- a) $3x^3 - 12x^2 - 6x + 24$; b) $3x^3 - x^2 - 2x$;
c) $2x^3 + x^2 - 3x$; d) $x^4 - 5x^2 + 4$.

3. Simplificați fracțiile:

- a) $\frac{2x+8}{x^2+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-4; 0\}$; b) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$;
c) $\frac{x^2+6x+9}{x^3-x^2-9x+9}, x \in \mathbb{R} - \{-3; 1; 3\}$;
d) $\frac{(x^2+2x-2) \cdot (x^2+2x)-3}{(x^2+2x+2) \cdot (x^2+2x)+1}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

4. Considerăm expresia

$$E(x) = \left(\frac{2x}{x+3} - \frac{3x^2-4x-1}{x^2-9} - \frac{x}{3-x} \right) \cdot \left(x - \frac{7x-9}{x+1} \right),$$

x aparține domeniului maxim de definiție.

- a) Determinați domeniul de definiție al expresiei $E(x)$.
b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.
c) Calculați valoarea expresiei pentru $x = -2$ și pentru $x = 2\frac{3}{5}$.
d) Rezolvați inecuația $E(x) \geq 1$.

Punctaj: 1p din oficiu; 1. 2p; 2. 2p; 3. 2p; 4. 3p.

Timp de lucru: 50 de minute.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Am progresat în învățare prin parcurgerea acestui set de lecții	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitat înainte și după test pentru a îmbunătăți performanța

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. Amplificați cu 2 și apoi cu $3x$ următoarele fracții, după ce puneți condiții de existență pentru numitori:

- a) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; b) $\frac{x}{2}$; c) $\frac{x-1}{2}$; d) $\frac{x+2}{x-3}$;
 e) $\frac{2x+1}{x+5}$; f) $\frac{x^2-3x+1}{x+4}$; g) $\frac{x^2-x-1}{x+2}$; h) $\frac{2x^2+x-3}{x+3}$;
 i) $\frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$; j) $\frac{x^2-2x-2}{2x^2-x-1}$.

2. Simplificați următoarele fracții, după ce puneți condiții de existență:

- a) $\frac{16x^2y}{12xy^2}$; b) $\frac{15x^4y^5}{20x^3y^6}$; c) $\frac{x^2-64}{ax-8a}$; d) $\frac{5x^2-20}{x+2}$;
 e) $\frac{9x^3-x}{3x+1}$; f) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+4}$; g) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$;
 h) $\frac{2x^3-2x^2+2x}{4x^2-4x+4}$; i) $\frac{x^3-25x}{x^2+10x+25}$; j) $\frac{x^2-100}{x^2+20x+100}$;
 k) $\frac{x^3+x^2}{x^3}$; l) $\frac{2x^2-6x}{4x-12}$; m) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$;
 n) $\frac{2x^3+x^2}{4x+2}$; o) $\frac{x^2-12x+36}{x^2-36}$; p) $\frac{x^3-8}{x^3+2x^2+4x}$;
 q) $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^3-9x}$; r) $\frac{x^4+4x^3+x^2-8x-6}{x^4+5x^3+2x^2-10x-8}$.

3. Completați spațiile libere pentru a obține relații adevărate:

- a) $(x+1)^2 = x^2 + \dots + \dots$;
 b) $(x-1)^2 = \dots - 2x + \dots$;
 c) $(x+4)^2 = \dots + \dots + 16$;
 d) $(x-1)(x+1) = \dots - \dots$;
 e) $(2x-1)(2x+1) = \dots - \dots$;
 f) $(4x - \dots)(4x + \dots) = \dots - 9$;
 g) $(\dots - \dots)(\dots + \dots) = 25x^2 - 16$.

4. Calculați, după ce puneți condiții de existență:

- a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; b) $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2}$; c) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+1}{x-1}$;
 d) $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x}$; e) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x+3}$;
 f) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-2}$; g) $\frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$;
 h) $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-2} - \frac{2x}{x^2+4x+4}$; i) $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x+6} + \frac{x}{2x^2+12x+18}$;
 j) $\frac{x+1}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+4}$; k) $\frac{x+2}{x^2+3x+2} + \frac{x+4}{x^2+5x+4}$;
 l) $\frac{x^2-x}{x^2+1} - \frac{2x^2}{1-x+x^2-x^3}$; m) $\frac{5x+1}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x^2+2x+1}$;
 n) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1-x}{x-2}$; o) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{3}{x+3} + \frac{6x}{9-x^2}$;
 p) $\frac{5x+1}{x^2+4x} - \frac{2}{x+4} + \frac{3x+1}{x^2}$;
 q) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-5x+4}$;
 r) $\frac{1}{2x^2+2x} + \frac{1}{2x^2+3x+1} + \frac{5}{2x+1}$.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

- a) $x^2 + 11x - 12 = 0$; b) $x^2 + 11x + 10 = 0$; c) $x^2 + 7x = 0$;
 d) $x^2 + 10x + 25 = 0$; e) $x^2 - 12 = 0$; f) $x^2 + 11 = 0$;
 g) $x^2 + 11x + 31 = 0$; h) $x^2 + 5x + 7 = 0$; i) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

6. Considerăm expresia:

$$E(x) = \left(\frac{x-1}{x+2} - \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{4-x}{x^2-4x+4} \right) \left(1 - \frac{x+2}{x^2-3x+6} \right).$$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este bine definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Calculați $E(0)$, $E(-4,5)$, $E(6)$.

d) Determinați numerele întregi a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

e) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2-4}{x} \cdot E(x) = 2$.

f) Scrieți mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid |(x^2 + 3x + 2) \cdot E(x)| \leq 4\}$ sub formă de interval.

g) Rezolvați inecuația $E(x) > 0$.

7. a) Calculați valoarea maximă a raportului $\frac{x^2+2x+2}{-2}$ și precizați pentru ce valoare a lui x este atinsă.

b) Calculați valoarea maximă a raportului $\frac{x^2-2x+5}{-3}$ și precizați pentru ce valoare a lui x este atinsă.

c) Calculați valoarea minimă a raportului $\frac{4x^2-4x+5}{4}$ și precizați pentru ce valoare a lui x este atinsă.

d) Calculați valoarea minimă a raportului $\frac{x^2+6x+15}{3}$ și precizați pentru ce valoare a lui x este atinsă.

8. Simplificați fracțiile:

- a) $\frac{(x^2-2) \cdot (x^2-5) + 2}{(x^2-2) \cdot (x^2-1) - 2}$; b) $\frac{(x^2-2x+3) \cdot (x^2-2x-1) + 4}{(x^2-2x+3)^2 - 4}$;
 c) $\frac{(x^2+3) \cdot (x^2-1) + 4}{(x^2+3)^2 - 4}$; d) $\frac{(x^2+2x)^2 - 3 \cdot (x^2+2x) - 4}{x^3+2x^2+x}$;
 e) $\frac{(x^2-3x+1)^2 + 4 \cdot (x^2-3x+1) - 5}{x^3-9x}$.



Activitate practică

Observați figura alăturată și deduceți o formulă de calcul pentru $(a+b+c)^2$.

a		
b		
c		

FUNȚII

*Există geometrie în zumzetul
corzilor. Există muzică
în spațierea sferelor.*



„Universul este construit prin puterea cifrelor.”

Pitagora (circa. 580 î.H. – circa. 495 î.H)

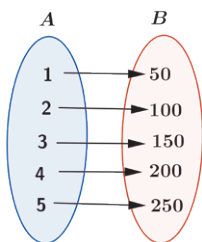
Funcții definite pe mulțimi finite



Reflectăm!

Discutați la nivelul clasei și stabiliți semnificația corectă a termenilor ce caracterizează deplasarea: *rectiliniu* și *uniform*. Dați exemple practice care să se asocieze unei deplasări de acest tip!

Pentru exemplul alăturat, avem mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{50, 100, 150, 200, 250\}$. Reprezentarea prin diagramă este evidențiată astfel:



Ce semnificație dăm săgeților? Contează sensul săgeții?



Exemple

Exemple de funcții:

➤ Dependența dintre lungimea laturii pătratului și aria acestuia definește o funcție $f: \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow \{1; 4; 9; 16\}$ cu ajutorul corespondențelor $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9, 4 \rightarrow 16$ și putem scrie $f(1) = 1$ (valoarea funcției în 1 este 1), $f(2) = 4$ (valoarea funcției în 2 este 4), $f(3) = 9$ și $f(4) = 16$. Pe caz general, putem spune că dependența este de tipul $x \rightarrow x^2$ (și înțelegem că lui x îi corespunde pătratul său), unde $x \in \{1; 2; 3; 4\}$.

➤ Dependența dintre zilele săptămânii și temperatura din ziua respectivă definește o funcție $f: \{\text{luni; marți; miercuri; joi; vineri; sâmbătă; duminică}\} \rightarrow \{25^\circ\text{C}; 24^\circ\text{C}; 29^\circ\text{C}; 30^\circ\text{C}\}$ cu următoarele asocieri *luni* $\rightarrow 25^\circ\text{C}$, *marți* $\rightarrow 24^\circ\text{C}$, *miercuri* $\rightarrow 25^\circ\text{C}$, *joi* $\rightarrow 25^\circ\text{C}$, *vineri* $\rightarrow 29^\circ\text{C}$, *sâmbătă* $\rightarrow 29^\circ\text{C}$, *duminică* $\rightarrow 30^\circ\text{C}$.

➤ O mașină se deplasează *rectiliniu* și *uniform* cu viteza de 50 km/h. Scrieți într-un tabel distanțele parcurse după 1, 2, 3, 4, respectiv 5 ore. Putem reprezenta datele din tabel printr-o diagramă?

Rezolvare: Dacă mașina se deplasează cu viteza de 50 km/h, atunci într-o oră se parcurge distanța de 50 km. Folosind proporționalitatea directă, putem afirma că:

1 oră 50 km; 2 ore 100 km 3 ore 150 km

Reprezentăm distanțele în tabel:

Timp	1 oră	2 ore	3 ore	4 ore	5 ore
Distanță	50 km	100 km	150 km	200 km	250 km



Rețineți!

Se numește **funcție** un triplet format din două mulțimi A și B nevide și o relație (*lege de corespondență*) f care asociază *fiecărui* element din mulțimea A *un singur* element din mulțimea B .

Scriem $f: A \rightarrow B$ și citim *f definit pe mulțimea A cu valori în mulțimea B*.

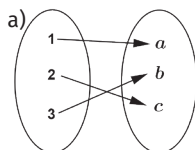
Mulțimea A se numește **mulțime de definiție** sau **domeniul de definiție** al funcției și mulțimea B se numește **mulțime în care funcția ia valori** sau **codomeniu**. Dacă $x \in A$, notăm prin $f(x)$ *valoarea (imaginea) funcției în punctul x*, adică valoarea din mulțimea B care corespunde lui x prin legea f . În condițiile date, $f(x) \in B$; $x \in A$ se mai numește *variabila funcției*.

Legea de corespondență poate fi prezentată *sintetic* – printr-un tabel sau printr-o diagramă – sau *analitic* – printr-o formulă.

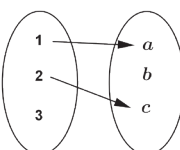
Exersăm împreună!

1. Care dintre următoarele diagrame reprezintă funcții? Pentru fiecare funcție scrieți domeniul de definiție și mulțimea în care funcția ia valori, apoi descrieți funcția sub formă de tabel.

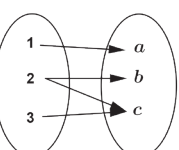
a)



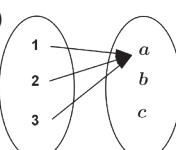
b)



c)



d)



Rezolvare: Diagramele de la punctele a) și d) reprezintă funcții, pentru că *fiecărui* element din prima mulțime îi corespunde *un singur* element din a doua mulțime. Diagrama de la punctul b) nu reprezintă o funcție, pentru că elementului 3 din prima mulțime nu îi corespunde niciun element din a doua mulțime. Diagrama de la punctul c) nu reprezintă o funcție, pentru că elementului 2 din prima mulțime îi corespund două elemente diferite din a doua mulțime. Pentru fiecare funcție, reprezentarea prin tabel este:

a)

x	1	2	3
f(x)	a	c	b

d)

x	1	2	3
g(x)	a	a	a

2. Care dintre următoarele tabele reprezintă funcții? Pentru fiecare funcție scrieți domeniul de definiție și o mulțime în care funcția ia valori (codomeniul). Descrieți funcția sub formă de diagramă.

a)

x	0	1	2	3	4
f(x)	2	3	4	5	6

b)

x	-2	0	2	4	6	8	10
g(x)	-2	0	2	4	6	8	10

c)

x	0	1	2	3	4
h(x)	1	3	-	27	81

d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
t(x)	3	2	1	0	1	2	3

Rezolvare: a) Tabelul reprezintă o funcție, pentru că fiecărui x din mulțimea $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ (domeniul de definiție) îi corespunde un singur element din mulțimea $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ (codomeniul). Observăm că o lege de corespondență care se poate asocia acestui tabel este $x \rightarrow x + 2$, oricare $x \in A$, și putem scrie $f(x) = x + 2$. Elementele de pe a doua linie, $f(x)$, sunt în ordine crescătoare, deci putem spune că funcția este crescătoare.

b) Tabelul reprezintă o funcție. Observăm că o lege de corespondență care se poate asocia acestui tabel este $g(x) = x$. Elementele de pe a doua linie, $g(x)$, sunt în ordine crescătoare, deci spunem că funcția este *crescătoare*.

c) Tabelul nu reprezintă o funcție, pentru că elementului $x = 2$ nu îi corespunde niciun element de pe a doua linie.

d) Tabelul reprezintă o funcție. Observăm că o lege de corespondență care se poate asocia acestui tabel este $h(x) = |x|$. Pentru că elementele de pe prima linie (x) sunt simetrice față de 0 (referindu-ne la poziția punctelor corespunzătoare pe axa numerelor) și imaginile perechilor de elemente simetrice de pe prima linie sunt egale, spunem că funcția este *pară*.

3. Pentru $f: \{-2; -1; 0; 3; 4\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$ completați enunțurile pentru a obține propoziții adevărate:

- Mulțimea de definiție, A , este
- Mulțimea în care funcția ia valori, B , este
- Legea de corespondență, f , este
- Reprezentarea funcției prin tabel este
- Reprezentarea funcției prin diagramă este
- Mulțimea valorilor funcției este ...
- Valoarea funcției pentru $x = 0$ este



Exemple

Exemple de corespondențe care nu sunt funcții:

➤ Fie A mulțimea localităților din România, B mulțimea cetățenilor țării și corespondența de la A la B de tipul „ x este localitatea natală a cetățeanului y ”. Această corespondență nu este o funcție deoarece există cel puțin o localitate x care este locul natal al mai multor cetățeni. Așadar, unui element din mulțimea A îi corespund cel puțin două elemente din B , ceea ce contrazice definiția funcției.

➤ Dacă avem mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ și corespondența $x \rightarrow x^2$, atunci $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 9$, $4 \rightarrow 16$. Elementului 4 din A ar trebui să îi corespundă elementul 16, care, însă, nu se găsește în mulțimea B . Deci, prin această corespondență nu este îndeplinită cerința ca fiecărui element din A să îi corespundă un element din B .



Observație

Termenii *funcție crescătoare* și *funcție pară* sunt utilizați în caracterizarea funcțiilor; în exemplele alăturate, caracterizarea a fost făcută ținând cont că, pe prima linie a tabelelor corespunzătoare funcțiilor, ordinea elementelor este crescătoare.



Reflectăm!

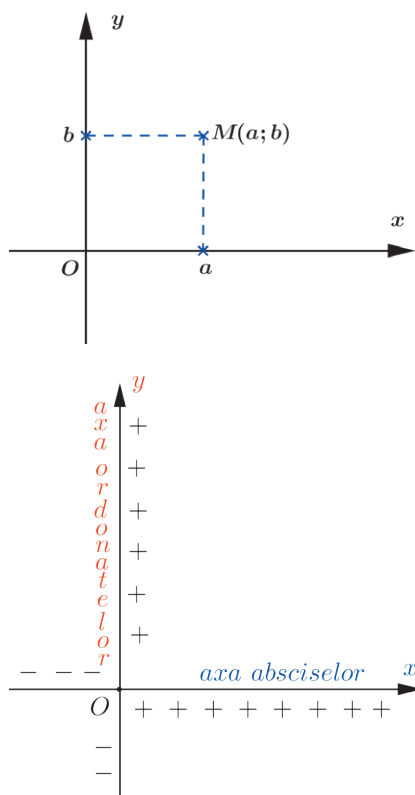
În exercițiul 3., funcția a fost descrisă inițial analitic, apoi prin tabel și diagrame. Discutați la nivelul clasei și formulați concluzii privind avantajele și dezavantajele reprezentării unei funcții prin cele 3 metode!

Observație

În exemplul alăturat, mulțimea în care funcția ia valori este $\mathbb{Z}$, iar mulțimea valorilor funcției este $\{-1; 0; 1; 4; 5\} \subset \mathbb{Z}$, adică mulțimea valorilor $f(a) \in \mathbb{Z}$, $a \in A$ (evidențiate clar în reprezentarea prin tabel sau diagramă).

Reflectăm!

Ce putem afirma despre modul în care se realizează corespondențele în cazul în care $\text{Im}f$ este egală cu mulțimea în care funcția ia valori? Dar în cazul în care $\text{Im}f$ este inclusă strict în mulțimea în care funcția ia valori? Sprijiniți-vă argumentarea cu exemplele date în diagramele a) și d) de la începutul lecției.



Reflectăm!

Formulați o concluzie, similară cu cea alăturată, privind paralela la Ox!
De câte puncte avem nevoie, minimum, pentru a construi (determina) o dreaptă?

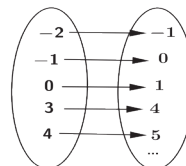
Rezolvare: a) $A = \{-2; -1; 0; 3; 4\}$;

b) $B = \mathbb{Z}$; c) $f(x) = x + 1$;

d) Reprezentarea funcției prin tabelul de valori este:

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	-1	0	1	4	5

e) Reprezentarea funcției prin diagramă este:



f) Mulțimea valorilor funcției este formată din valorile găsite în tabel: $\{-1; 0; 1; 4; 5\}$.

g) $f(0) = 1$.

Rețineți!

Mulțimea valorilor unei funcții $f: A \rightarrow B$ se numește **imaginea funcției** și se notează cu $\text{Im}f$; $\text{Im}f$ poate fi egală cu B sau inclusă în mulțimea B .

Graficul unei funcții

Ne amintim!

Se numește **sistem de axe ortogonale** o pereche de două axe perpendiculare care au originea comună. Un sistem de axe ortogonale se notează cu xOy și putem afirma că:

- O este originea sistemului de axe și originea fiecărei axe.
- Cele două axe au aceeași unitate de măsură.
- Ox este *axa absciselor* (axa orizontală) și are sensul pozitiv spre dreapta.
- Oy este *axa ordonatelor* (axa verticală) și are sensul pozitiv în sus.

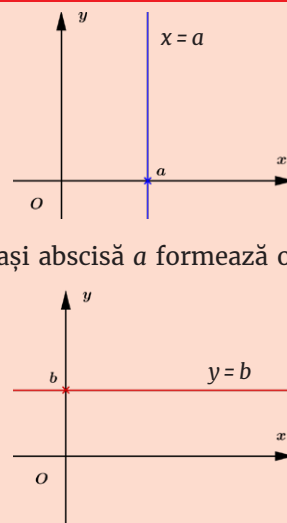
Oricărei perechi de numere reale $(a; b)$ îi corespunde un punct în plan, notat $M(a; b)$, și citim „punctul M de coordonate a și b ” sau „punctul M de abscisă a și de ordonată b ”.

Rețineți!

Caracterizarea algebrică a tuturor punctelor unei drepte paralele cu axa Oy este dată de ecuația $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ fixat, adică mulțimea punctelor este $\{M(a; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; în particular $Oy = \{M(0; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

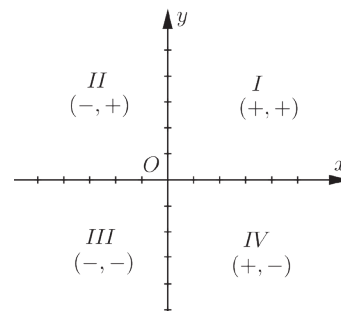
Toate punctele din planul în care s-a fixat sistemul de axe ortogonale xOy care au aceeași abscisă a formează o paralelă la axa Oy ce se construiește prin punctul de coordonate $(a, 0)$.

Caracterizarea algebrică a punctelor unei drepte paralele cu axa Ox este dată de ecuația $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ fixat, adică mulțimea punctelor este $\{M(x; b) \mid x \in \mathbb{R}\}$; în particular $Ox = \{M(x; 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.



Planul în care este reprezentat un sistem de axe ortogonale este împărțit (de cele două axe) în 4 cadrane:

- Punctele reprezentate în cadranul I au *ambele coordonate pozitive*.
- Punctele reprezentate în cadranul II au *abscisa negativă și ordonata pozitivă*.
- Punctele reprezentate în cadranul III au *ambele coordonate negative*.
- Punctele reprezentate în cadranul IV au *abscisa pozitivă și ordonata negativă*.
- Orice punct situat pe axa absciselor are ordonata egală cu 0. Orice punct situat pe axa ordonatelor are abscisa egală cu 0. Punctul de coordonate (0, 0) corespunde originii O.



Ne amintim!

➤ Se numește **produsul cartezian** a două mulțimi A și B mulțimea perechilor ordonate care au primul element din mulțimea A și al doilea element din mulțimea B; $A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}$.

➤ **Pereche ordonată** este o pereche (x, y) în care am fixat, pentru fiecare dintre cele două elemente, mulțimea din care face parte (conține ordinea în cadrul perechii).

Oricărei perechi de numere reale (a, b) îi corespunde un punct în plan, $M(a, b)$; citim **punctul M de coordonate a, b**.



Rețineți!

Graficul unei funcții $f : A \rightarrow B$, cu A și B mulțimi nevide de numere reale, este mulțimea $G_f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A, y = f(x) \in B\}$, adică mulțimea tuturor perechilor ce reprezintă corespondențele din cadrul funcției. Mai putem scrie $G_f = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A\}$.

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții $f : A \rightarrow B$ este formată din toate punctele $M(x; y)$, $x \in A$, $y = f(x) \in B$ reprezentate în sistemul xOy.



Reflectăm!

➤ Dacă domeniul de definiție al funcției $f : A \rightarrow B$ are $\text{card}A = n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci reprezentarea geometrică a graficului este formată din n puncte din plan.

➤ O pereche de coordonate asociată unui punct de pe reprezentarea geometrică a unei funcții trebuie să fie element al graficului funcției!

➤ Pentru a simplifica exprimarea, fără a pierde din sensul acesteia, putem folosi în loc de reprezentarea geometrică a graficului unei funcții și exprimările de tipul:

reprezentarea geometrică a funcției; reprezentarea grafică a funcției; desenul funcției.

Exersăm împreună!

1. Reprezentați grafic funcția $f: \{-2; -1; 0; 3; 4\} \rightarrow \mathbb{Z}$,

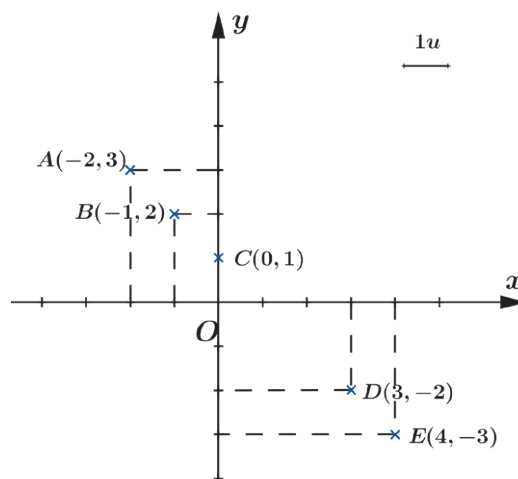
$f(x) = 1 - x$.

Rezolvare: Reprezentarea funcției prin tabel este:

x	-2	-1	0	3	4
f(x)	3	2	1	-2	-3

$G_f = \{(-2; 3), (-1; 2), (0; 1), (3; -2), (4; -3)\}$.

Reprezentarea geometrică a graficului funcției este formată din 5 puncte. Elementele de pe a doua linie – $f(x)$ – sunt în ordine descrescătoare, deci putem spune că funcția este *descrescătoare*.



2. Pentru funcția $f: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$, completați următoarele enunțuri:

a) Domeniul de definiție al funcției este:	$\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$
b) Imaginea funcției este:	$\{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$
c) Variabila funcției este notată cu:	x
d) Legea de corespondență a funcției este:	$f(x) = 2x + 1$
e) Valoarea funcției în $x = -1$ este:	$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$
f) $f(0) = \dots$	$f(0) = 1$
g) Funcția are valoarea 3 pentru $x = \dots$	$f(x) = 3 \Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$
h) Dacă $A(a; b) \in G_f \Rightarrow f(a) = \dots$ și $b = \dots$	$f(a) = b$ și $b = 2a + 1$
i) Dacă $A(-2; m) \in G_f \Rightarrow m = \dots$	$f(-2) = m \Rightarrow 2(-2) + 1 = m \Rightarrow m = -3$
j) Punctul de pe reprezentarea geometrică a graficului funcției care are abscisa egală cu 1 este $A(\dots; \dots)$.	$A(1; 3)$
k) Punctul de pe reprezentarea geometrică a graficului funcției care are ordonata egală cu -3 este $B(\dots; \dots)$.	$B(-2; -3)$

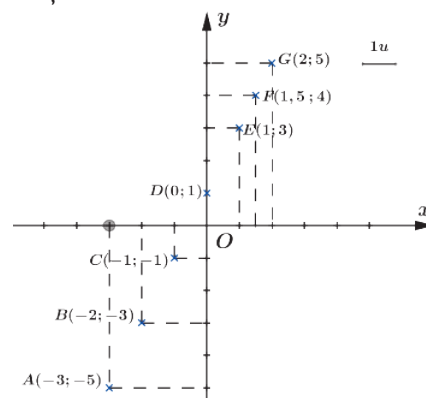
Reprezentarea geometrică a graficului funcției este:

3. Reprezentați prin tabel funcțiile $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ și $g: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$.

Rezolvare:

x	-1	0	1
$f(x)$	1	0	1

x	-1	0	1
$g(x)$	1	0	1



Reflectăm!

Ce ar însemna două funcții care *nu sunt egale*? Prin ce pot diferi? Discutați la nivelul clasei, analizând diferite situații și notați-vă concluziile care sprijină învățarea!

Observații

Dacă două funcții au același domeniu de definiție, același codomeniu și $f(x) = g(x)$ pentru orice x din domeniul de definiție, atunci funcțiile se numesc **funcții egale**. Scriem $f = g$.



Exersați

1. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate: O funcție $f: A \rightarrow B$ (se citește) este formată din două mulțimi nevide, A (numită) și B (numită), precum și o prin care se asociază din un element din

2. Considerăm funcția $f: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

- a) Domeniul de definiție al funcției este
 c) Legea de corespondență a funcției este
 e) Reprezentarea funcției printr-o diagramă este
 g) Graficul funcției este
 i) Studiați modul în care sunt distribuite punctele reprezentării grafice a funcției. Din lectura reprezentării grafice putem afirma că funcția este crescătoare?
- b) Mulțimea de valori a funcției este
 d) Reprezentarea funcției printr-un tabel este
 f) Imaginea funcției este
 h) Reprezentarea geometrică a graficului funcției este

3. Reprezentați cu ajutorul diagramelor funcțiile:

- a) $f: \{1; 2; 3\} \rightarrow \{1; 2; 3\}$, $f(x) = x$;
 c) $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \{1; 0; -1\}$, $f(x) = -x$;
 e) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$;
 g) $f: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5$;
- b) $f: \{1; 2; 3\} \rightarrow \{1; 2; 3\}$, $f(x) = x - 5$;
 d) $f: \{-1; 2; 3\} \rightarrow \{-2; 4; 6; 8\}$, $f(x) = 2x$;
 f) $f: \{-4; -2; 0; 2; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 1|$;
 h) $f: \{-1; 2; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. Pentru funcțiile următoare, reprezentate prin tabel, scrieți domeniul de definiție, Imf și o lege de corespondență:

a)

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	4	1	0	9	16

b)

x	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	2	0	-2	-4	-6	-8	-10

c)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0

d)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2

5. Considerăm mulțimile $A = \{0; 1\}$ și $B = \{a; b\}$.

- a) Definiți cu ajutorul diagramei toate funcțiile $f: A \rightarrow B$, analizând modurile de construire a corespondențelor.
 b) Dați exemple de corespondențe $x \rightarrow f(x)$, $x \in A$, $f(x) \in B$ care nu sunt funcții.

6. Dați câte un exemplu de mulțime în care funcția ia valori pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

- a) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow B$, $f(x) = x^2 - 2$;
 c) $f: \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 81\} \rightarrow B$, $f(x) = \sqrt{x}$;
 e) $f: \{-1; 1; 2; 3; 4\} \rightarrow B$, $f(x) = \frac{1}{x}$;
- b) $f: \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\} \rightarrow B$, $f(x) = (x + 1)^3$;
 d) $f: \{-4; -2; 0; 2; 4; 6\} \rightarrow B$, $f(x) = \frac{x}{2}$;

Comparați, în perechi, exemplele date. Explicați de ce pot fi mai multe exemple pentru o aceeași funcție. Dați apoi exemplu de mulțime care nu poate fi mulțimea în care funcția ia valori pentru una dintre funcții!

7. Stabiliți domeniul maxim de definiție pentru funcțiile:

- a) $f: A \rightarrow \{-7; -5; -1; 1; 5\}$, $f(x) = 2x - 1$;
 c) $f: A \rightarrow \{0; 4; 6; 9\}$, $f(x) = x^2$;
- b) $f: A \rightarrow \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $f(x) = 2 - x$;
 d) $f: A \rightarrow \{-3; -1; 1; 2\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;
- e) $f: A \rightarrow \{0; 1; 2; 3\}$, $f(x) = |x|$.

Comparați, în perechi, exemplele date. Explicați de ce nu pot fi mai multe exemple pentru o aceeași funcție.

Care dintre funcții este crescătoare și care este descrescătoare? Folosiți pentru răspuns diferite moduri de reprezentare a funcțiilor.

Dacă ne referim la domeniul de definiție, fără a mai impune condiția de domeniu maxim, identificați cel puțin două domenii de definiție pentru cazurile c) și e).

8. Stabiliți dacă următoarele funcții sunt egale:

- a) $f: \{1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$ și $g: \{1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x$;
 b) $f: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ și $g: \{-2; -1; 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$;
 c) $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ și $g: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x$;
 d) $f: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$ și $g: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4(x + 2)$.
 e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$ și $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = x^2$;
 f) $f: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$ și $g: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 2$, $g(1) = 6$, $g(2) = 10$.

9. Verificați dacă punctele aparțin graficului funcției:

a) $A(-3; -7)$, $B(-2; -3)$, $C(-1; -2)$, $D(0; -1)$, $f: \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$;

b) $M(1; -3)$, $N(2; -6)$, $P(3; 0)$, $f: \{1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x$.

10. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \{-1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$; b) $f: \{-1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$; c) $f: \{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

d) $f: \{-2; -1; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; e) $f: \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2$; f) $f: \{0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^x$.

Comparați, în pereche, reprezentările obținute. Identificați comportamente (caracterizări comune) între anumite reprezentări. Notați concluziile care vor sprijini propria învățare!

11. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x + 1$. Calculați:

a) $f(0) + f(1) + f(2)$; b) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100)$; c) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)$;

d) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2n)$; e) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(3n + 1)$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice număr natural n , $f(n)$ este restul împărțirii lui n la 5.

a) Calculați $f(1)$, $f(5)$, $f(11)$, $f(24)$, $f(100)$.

b) Există m și n numere naturale diferite pentru care $f(m) = f(n)$?

c) Există numere naturale n pentru care $f(n) = 3$? Dar pentru care $f(n) = 8$?

d) Calculați $f(1) + f(7) + f(12) + f(18) + f(24) + f(30)$.

e) Reprezentați în sistemul de axe xOy punctele funcției cu abscisa mai mare sau egală cu 0 și mai mică sau egală cu 7. Observați distribuția punctelor reprezentării grafice. Fără a calcula, puteți continua reprezentarea altor puncte ale funcției? Explicați de ce!

13. Considerăm funcția $f: \{0; 1; 2; 3; \dots; 199; 200\} \rightarrow B$, unde $f(n)$ este cifra unităților numărului n .

a) Determinați imaginea funcției.

b) Există numere naturale diferite (toate) m , n , p pentru care $f(m) = f(n) = f(p)$?

c) Care este probabilitatea ca, alegând un număr n din domeniul de definiție, să avem $f(n) = 5$?

14. Fie funcția $f: \{0; 1; 2; 3; \dots; 2000\} \rightarrow \{-1; 0; 1\}$.

a) Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare a sumei: $S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2000)$.

b) Dacă $P = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(2000) \neq 0$, arătați că suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2000)$ nu poate lua valoarea 0.

c) Modificați mulțimea în care funcția ia valori astfel încât $P = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(2000) \neq 0$, indiferent de legea de corespondență care ar fi asociată funcției.

15. Fie funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, unde $f(n)$ este egal cu suma divizorilor naturali ai lui n .

a) Calculați $f(2)$, $f(6)$, $f(16)$, $f(100)$. b) Pentru ce valori ale lui n , $f(n) = 7$?

c) Pentru ce tip de valori ale lui n , $f(n) = n + 1$?

Cum se modifică răspunsurile dacă $f(n)$ este egal cu suma divizorilor întregi ai lui n ?

Investigație

Considerăm mulțimea A a vârstei în ani, de la 1 an până la 18 ani inclusiv, și mulțimea B a valorilor înălțimii pe care o poate avea un om pe parcursul acestor vârste, măsurată în fiecare an în ziua de naștere și exprimată în centimetri. Considerăm funcția $f: A \rightarrow B$, definită de legea prin care $f(n)$ reprezintă înălțimea corespunzătoare omului în anul n (corespunzătoare măsurării cu ocazia zilei de naștere).

a) Precizați semnificația scrierii $f(14)$ și o valoare probabilă asociată acestei scrieri.

b) Precizați o vârstă n pentru care este probabil să fie realizată egalitatea $f(n) = 60$ cm.

c) În contextul dat, este posibilă o egalitate de tipul $f(2) = 2$?

d) În contextul dat, ce argumente am putea aduce pentru a afirma că funcția este crescătoare (valorile funcției cresc odată cu creșterea valorilor variabilei)?

e) Dacă domeniul de definiție s-ar extinde la întreaga viață a unui om (până la stadiul de vârstnic), am avea argumente pentru a afirma că funcția va fi nemonotonă (nici mereu crescătoare, nici mereu descrescătoare)?

f) Dacă extindem domeniul de definiție la întreaga viață (cu atingerea stadiului de vârstnic), ce argument avem pentru a afirma că facem referire la o altă funcție decât cea inițială?

Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $D \subset \mathbb{R}$, a și b sunt numere reale

Exersăm împreună!

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$. Calculați $f(-2)$; $f(-0,5)$; $f(0)$; $f(3)$.

Rezolvare: $f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$; $f(-0,5) = 2(-0,5) + 3 = 2$;
 $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$; $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$.

Rețineți!

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, se numește *funcție de gradul I*, pentru care x este variabilă, iar a și b sunt coeficienți.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = b$, cu $b \in \mathbb{R}$, f se numește *funcție constantă*.

Funcțiile de gradul întâi și funcțiile constante formează mulțimea (clasa) *funcțiilor liniare*.

Ne amintim!

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ și $a, b \in \mathbb{R}$ este mulțimea

$G_f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } y = f(x) \in \mathbb{R}\}$.

În acest caz, $G_f = \{(x; ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Rețineți!

Pentru orice funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, într-un sistem de axe ortogonale, **reprezentarea geometrică a graficului funcției** este o dreaptă.

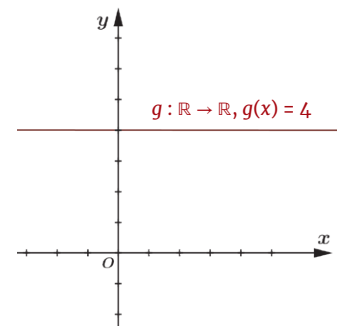
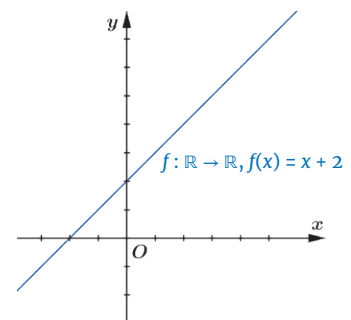
Pentru reprezentarea grafică a funcției de gradul I este suficient ca în sistemul de axe ortogonale să reprezentăm două puncte distincte, apoi să desenăm dreapta determinată de cele două puncte.

Pentru desenul funcției constante este suficient să reprezentăm un punct, apoi să construim prin punct paralela la Ox .

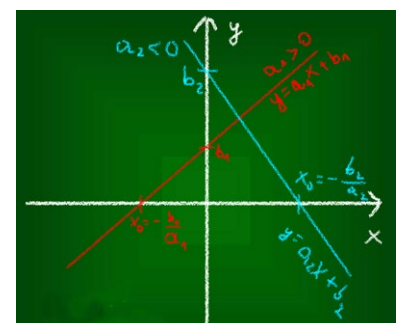


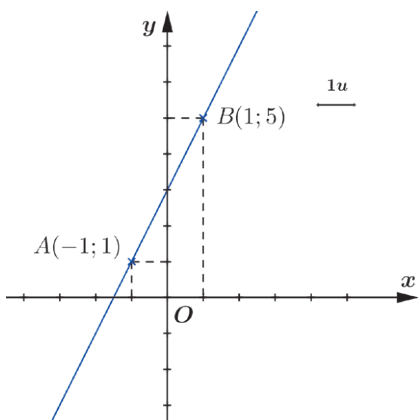
Reflectăm!

Imaginile următoare reprezintă exemple de desene: al unei funcții de gradul I, respectiv al unei funcții constante.



În baza desenelor acestor funcții vă puteți explica denumirea de *funcții liniare* date celor două categorii de funcții!





Exersăm împreună!

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$. Care sunt coeficienții funcției? Reprezentați grafic funcția.

Rezolvare: Coeficienții funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ sunt $a = 2, b = 3$.

Pentru reprezentarea grafică facem un tabel de valori în care luăm două valori din domeniul de definiție.

x	-1	1
$f(x)$		

 $\rightarrow$

x	-1	1
$f(x)$	1	

 $\rightarrow$

x	-1	1
$f(x)$	1	5

$A(-1; 1)$
$B(1; 5)$

Reprezentăm într-un sistem de axe de coordonate punctele $A(-1; 1), B(1; 5)$ și apoi construim dreapta determinată de ele. Reprezentarea geometrică a graficului funcției date este dreapta AB.



Activitate în perechi

În perechi, fiecare dintre voi alegeți alte două valori din domeniul de definiție și parcurgeți acești pași construind desenul funcției de la exemplu anterior. Comparați desenele între voi, precum și cu desenul de mai sus. Diferă? De ce?

Ce alte două puncte am putea reprezenta pentru a construi desenul funcției?

Cum orice dreaptă oblică în raport cu sistemul de axe intersectează atât axa Ox, cât și axa Oy, am putea folosi aceste puncte pentru reprezentarea grafică. Cum ați proceda? Explicați cu ajutorul unei funcții de gradul I alegerea voastră!



Rețineți!

Reprezentarea graficului funcției de gradul I, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și diferite de 0, cu ajutorul intersecțiilor cu axele de coordonate:

- Determinăm **intersecția cu axa absciselor**, Ox: $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$; rezolvăm ecuația $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ și obținem punctul $A(-\frac{b}{a}; 0)$.

- Determinăm **intersecția cu axa ordonatelor**, Oy: $x = 0 \Leftrightarrow f(0) = b$ și obținem punctul $B(0; b)$.

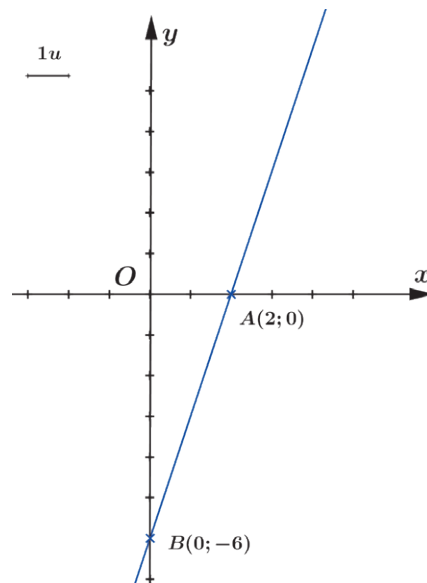
- Reprezentăm în sistemul de axe intersecțiile (numite și **tăieturi**) cu axele, apoi dreapta ce trece prin cele două puncte distincte.

- Obținem astfel reprezentarea geometrică a graficului funcției, aceasta fiind dreapta AB.

Exersăm împreună!

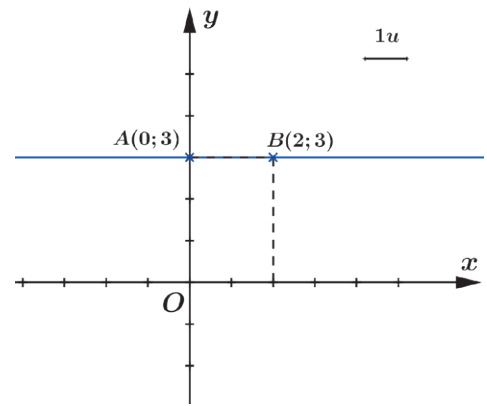
1. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$.

Intersecția cu axa absciselor Ox: $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.	Rezolvăm ecuația $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ și obținem punctul $A(2; 0)$.
Intersecția cu axa ordonatelor Oy: $x = 0$.	$f(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6$ și obținem punctul $B(0; -6)$.
Reprezentarea geometrică a graficului funcției date este dreapta AB.	



2. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$

Intersecția cu axa absciselor Ox : $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.	Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$ nu se intersectează cu axa Ox : $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ fals, pentru că $f(x) = 3$ oricare x real.
Intersecția cu axa ordonatelor Oy : $x = 0$.	$f(0) = 3$ și obținem punctul $A(0; 3)$.
Alegem un alt număr din domeniul de definiție, de exemplu $x = 2$.	$f(2) = 3$ și obținem punctul $B(2; 3)$.
Funcția este constantă, iar reprezentarea geometrică a graficului său este o dreaptă paralelă cu axa Ox .	

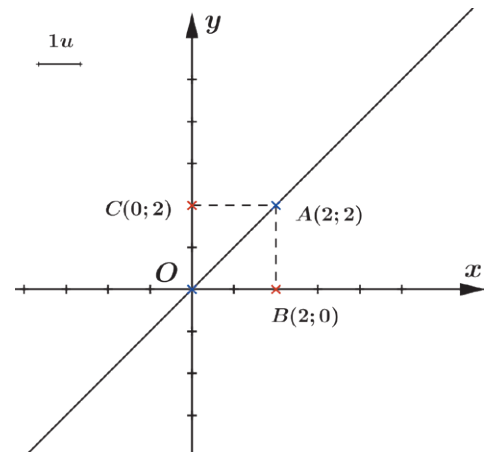


3. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$;

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ are particularitatea că intersecțiile cu cele două axe determină un același punct, originea sistemului de axe, $O(0; 0)$. Este cazul în care coeficientul b din forma generală este 0! Pentru reprezentarea geometrică a acestui tip de grafic mai alegem un număr real, de exemplu $x = 2$, pentru care $f(2) = 2$. Reprezentăm punctele $O(0; 0), A(2; 2)$.

Analizând reprezentarea geometrică a graficului funcției, putem spune că funcția este crescătoare și impară (adică simetrică față de originea axelor). De asemenea, funcția are o parte negativă (cea din cadranul III) și o parte pozitivă (cea din cadranul I).

În triunghiul dreptunghic AOB , catetele sunt egale, de lungime 2, deci triunghiul este dreptunghic isoscel. Obținem că $\angle AOB = \angle COA = 45^\circ$, așadar semidreapta OA este bisectoarea $\angle COB$.

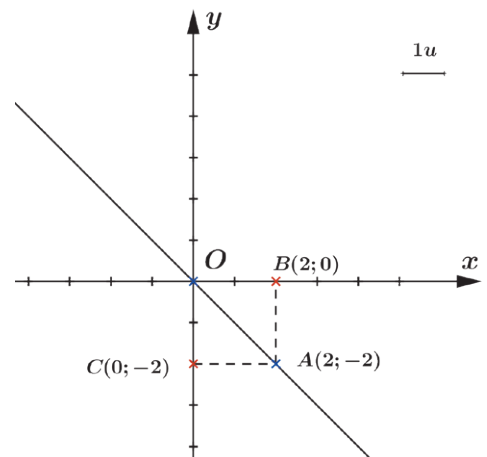


4. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x$ are aceeași particularitate ca exemplul anterior, intersecțiile cu cele două axe coincidând cu punctul $O(0; 0)$. Pentru reprezentarea geometrică a graficului putem alege $x = 2$, pentru care $f(2) = -2$. Reprezentăm punctele $O(0; 0), A(2; -2)$.

Analizând reprezentarea geometrică a graficului funcției putem spune că funcția este descrescătoare și impară (simetrică față de originea axelor). De asemenea, funcția are o parte negativă (cea din cadranul IV) și o parte pozitivă (cea din cadranul II).

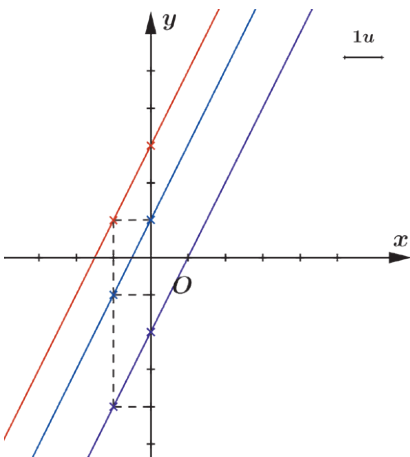
În triunghiul dreptunghic AOB catetele sunt egale, deci triunghiul este dreptunghic isoscel. Obținem că $\angle AOB = \angle COA = 45^\circ$, așadar semidreapta OA este bisectoarea $\angle COB$.



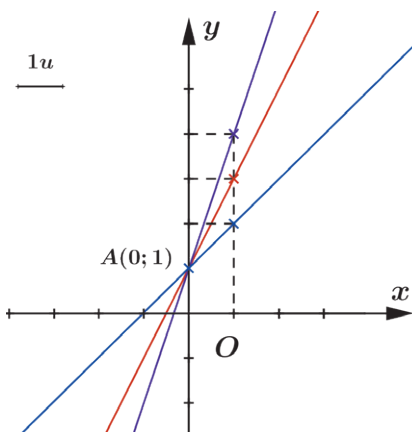


Activitate pe grupe

➤ Observați desenul următor, în care sunt reprezentate graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + b$ pentru $b = -2$, $b = 1$ și $b = 3$. Identificați care dintre drepte corespunde fiecărei valori a lui b . Realizați și voi diverse grafice pentru funcții liniare, în care coeficientul lui x rămâne același și termenul liber este diferit. Formulați concluzii și discutați-le la nivelul clasei.



➤ Observați desenul următor, în care sunt reprezentate graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$ pentru $a = 1$, $a = 2$ și $a = 3$. Identificați care dintre drepte corespunde fiecărei valori a lui a . Realizați și voi diverse grafice pentru funcții în care termenul liber rămâne același și coeficientul lui x este diferit. Formulați concluzii și discutați-le la nivelul clasei.



Observații

Reprezentarea geometrică a graficului funcției constante ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b$, cu $b \neq 0$) este o dreaptă paralelă cu axa Ox . În cazul $b = 0$, desenul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ este chiar axa Ox .

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții de gradul I, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ este o dreaptă oblică în raport cu sistemul de axe, intersectând în două puncte distincte axele de coordonate numai în cazul $b \neq 0$.

Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ este o dreaptă ce conține originea, împărțită de originea sistemului de axe în două semidrepte ce reprezintă bisectoarele unghiurilor formate de axe, corespunzătoare cadranelor I și III, și se numește **prima bisectoare (a unghiurilor determinate de axe)**.

Reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ are proprietăți similare pentru cadranele II și IV și se numește **a doua bisectoare (a unghiurilor determinate de axe)**.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ este crescătoare dacă $a > 0$ și descrescătoare dacă $a < 0$.

Exersăm împreună!

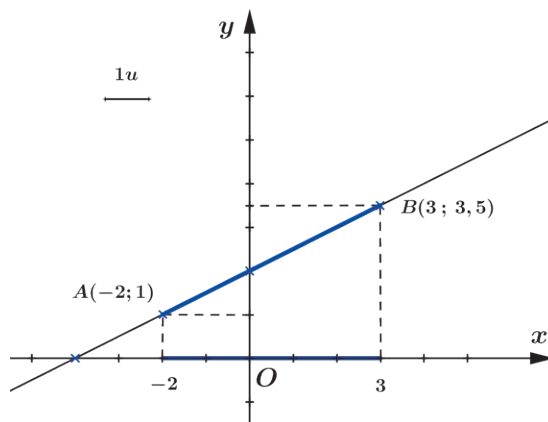
1. Reprezentați grafic: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ și $h: (-2; 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Rezolvare: Pentru f calculăm valorile funcției, putând alege orice două valori reale pentru x și calculând imaginile corespunzătoare: $f(-2) = 1$, $f(3) = 3,5$. Reprezentăm într-un sistem de axe de coordonate punctele $A(-2; 1)$, $B(3; 3,5)$ și construim dreapta AB .

Reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor g și h sunt părțile din dreapta AB corespunzătoare domeniilor lor de definiție. Pentru funcția g , reprezentarea geometrică a graficului este segmentul închis $[AB]$, iar pentru funcția h este segmentul deschis (AB) .

Observație. O altă metodă de reprezentare a funcțiilor $g: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ și $h: (-2; 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$ este:

- reprezentăm într-un sistem de axe de coordonate punctele $A(-2; 1)$, $B(3; 3,5)$;
- construim segmentul $[AB]$ pentru funcția g și segmentul (AB) pentru funcția h ;
- marcăm și pe desen capetele segmentului cu paranteze pătrate, respectiv rotunde.



2. Reprezentați grafic:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 2,$$

$$g: [-2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \text{ și}$$

$$h: (-\infty; -2) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

Rezolvare: Pentru f , calculăm valorile funcției în -2 și 3 , $f(-2) = 1$, $f(3) = 3,5$, apoi reprezentăm într-un sistem de axe de coordonate punctele $A(-2; 1)$, $B(3; 3,5)$ și construim dreapta AB .

Pentru funcția g reprezentarea geometrică a graficului este semidreapta închisă $[AB$, iar pentru funcția h este semidreapta deschisă $(AC$, unde C este un punct care are abscisa în domeniul de definiție, mai mică decât -2 . Corelați reprezentările cu tipul domeniului de definiție și cu reprezentarea acestuia pe axa Ox !

Observație. O altă metodă de reprezentare a funcțiilor $g: [-2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ și $h: (-\infty; -2) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$ este:

- reprezentăm într-un sistem de axe de coordonate punctele $A(-2; 1)$, $B(3; 3,5)$;
- construim semidreapta $[AB$ pentru funcția g ;
- construim semidreapta $(AC$ pentru funcția h , unde C este un punct care are abscisa în domeniul de definiție;
- marcăm și pe desen capetele semidreptei cu paranteze pătrate, respectiv rotunde în A .

Q Observații

Dacă domeniul de definiție al unei funcții este un interval cu capete numere reale, atunci reprezentarea geometrică a graficului funcției este un segment. Capetele segmentului au același tip de paranteze ca cele ale domeniului de definiție.

Dacă domeniul de definiție al unei funcții este un interval cu un capăt exprimat prin număr real și un capăt de tip ∞ , atunci reprezentarea geometrică a graficului funcției este o semidreaptă. Capetele segmentului au același tip de paranteze ca cele ale domeniului de definiție.

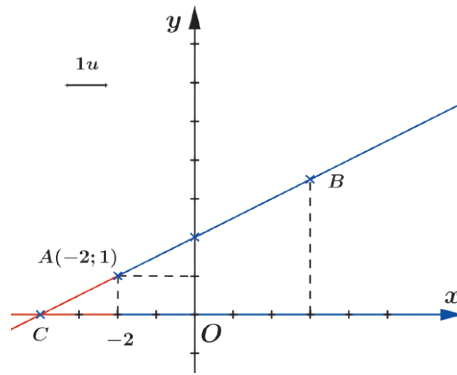
■ ■ ■ Exersăm împreună!

Reprezentați în același sistem de axe de coordonate funcțiile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1 \text{ și } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4 - 2x$$

și determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor grafice ale celor două funcții.

Rezolvare: Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ intersecțiile cu axele de coordonate sunt $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$, iar pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4 - 2x$ intersecțiile cu axele de coordonate sunt $C(0; 4)$, $D(2; 0)$. Punctul de intersecție al celor două drepte este $M(1; 2)$ și se poate determina construind proiecțiile lui M pe axele de coordonate și prin măsurare.



Atenție!

➤ Reprezentațiile geometrice ale graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, când a este fixat și b se modifică (variază), formează o mulțime (familie) de drepte paralele.

➤ Reprezentațiile geometrice ale graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, când b este fixat și a se modifică, constituie drepte care trec toate prin punctul $A(0; b)$; cu cât crește modulul lui a , cu atât dreptele se apropie de axa Oy .



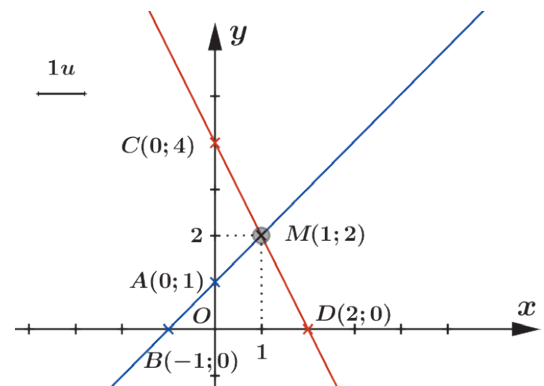
Reflectăm!

➤ Ați observat că, în raport cu sistemul de axe, desenul unei funcții liniare poate fi o dreaptă orizontală (paralelă sau coincidând cu axa Ox) sau oblică (neparalelă cu niciuna dintre axe)?

Discutați între voi și argumentați dacă există o funcție al cărei desen poate fi o dreaptă verticală (paralelă cu Oy sau chiar Oy). Utilizați eventual definiția funcției!

➤ Discutați la nivelul clasei ce etape ale construcției desenului parcurgem pentru reprezentarea geometrică a graficului funcției, dacă domeniul de definiție al acesteia este: a) $[a; b]$; b) $(a; b)$; c) $(a; +\infty)$; d) $(-\infty; a]$.

➤ Denumirile de funcție liniară și funcție de gradul I sunt date funcțiilor definite pe întreaga mulțime a numerelor reale. Când legea funcției este de tip liniar, dar domeniul de definiție este o submulțime a lui $\mathbb{R}$, diferită de $\mathbb{R}$, spunem că funcțiile sunt *restricții* ale funcțiilor liniare sau de gradul I. Dați exemplu de funcție de gradul I, apoi dați exemplu de o restricție a acestei funcții pe diferite intervale, precizând apoi tipul desenului acestor funcții (segment sau semidreaptă).

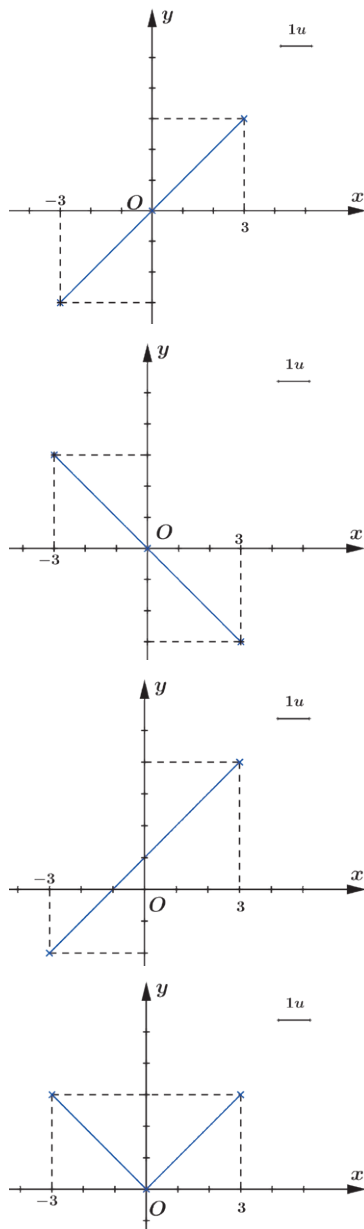




Activitate pe grupe

Se consideră funcțiile: $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$; $g: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x$; $h: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x + 1$ și $t: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = |x|$.

Se consideră și reprezentările grafice ale lor:



Discutați la nivelul grupeii strategiile prin care puteți asocia fiecare funcție cu desenul corespunzător. Notați-vă argumentele asupra cărora toți sunteți de acord.

Comparați între ele cele 4 desene și exprimați cât mai multe idei privind asemănările și deosebirile, referindu-vă și la caracterizările prezentate până acum. Identificați care dintre desene au proprietăți geometrice de simetrie.

Nu întotdeauna putem observa pe grafic coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte. Pentru a le calcula, rezolvăm sistemul de ecuații: $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$ sau ecuația $f(x) = g(x)$, admitând ca soluție acele valori care se află la intersecția domeniilor de definiție ale funcțiilor f și g .

Observații

O altă metodă de rezolvare a unui sistem de două ecuații cu două necunoscute este **metoda grafică**; aceasta se bazează pe desenele celor două funcții în același sistem de coordonate. Coordonatele punctului de intersecție al dreptelor ce corespund ecuațiilor sistemului $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = mx + n$, formează soluția sistemului.

Rezolvarea sistemelor de ecuații de tipul $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{cases}$ prin metoda grafică

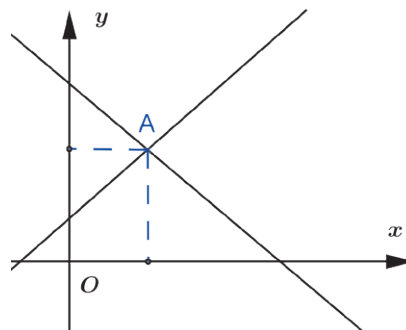
În cazul în care b și n sunt coeficienți diferiți de 0, cele două ecuații ale tipului de sistem evidențiat anterior pot fi scrise sub forma

$$(*) \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ y = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n} \end{cases}, \text{ care sunt relații}$$

prin care necunoscuta y se exprimă ca o *dependență funcțională* de x . Putem nota cele două dependențe astfel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{m}{n}x - \frac{p}{n}$.

Coordonatele punctului de intersecție al celor două reprezentări geometrice ale graficelor funcțiilor reprezintă soluția sistemului. Bazăm astfel rezolvarea sistemului pe rezolvarea ecuației $f(x) = g(x)$, echivalent cu egalarea membrilor dreپتي ai ecuațiilor sistemului (*).

Astfel, o nouă metodă de rezolvare a unui sistem de două ecuații cu două necunoscute reale este **metoda grafică**.



Observații

Dacă cele două drepte corespunzătoare dependențelor (*):

- sunt paralele, sistemul nu are soluții;
- se intersectează, sistemul are o singură soluție;
- coincid (se suprapun), sistemul are o infinitate de soluții.

Dacă nu se pot determina coordonatele punctului de intersecție prin construirea proiecțiilor acestuia pe axe, atunci putem rezolva sistemul de ecuații prin metoda reducerii sau a substituției.

Exersăm împreună!

1. Punctele $A(5; 6)$, $B(0; 2)$ aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$?

Rezolvare: $A(5; 6) \in G_f$ dacă $f(5) = 6$; $f(5) = 5 + 1 = 6$ adevărat, deci $A(5; 6) \in G_f$. Cum $f(0) = 0 + 1 = 1 \neq 2$, atunci $B(0; 2) \notin G_f$. Am ținut cont că domeniul de definiție este $\mathbb{R}$.

2. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(2; 3) \in G_f, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + 1$.

Rezolvare: $A(2; 3) \in G_f$ dacă $f(2) = 3$; $2m + 1 = 3 \Rightarrow m = 1$. Evident, $2 \in \mathbb{R}$.

► Dacă domeniul de definiție sau codomeniul unei funcții sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, a verifica dacă punctul $M(\alpha, \beta)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: A \rightarrow B$ presupune trei condiții ce trebuie îndeplinite:

$\alpha \in A$; $\beta \in B$; $f(\alpha) = \beta$ reprezintă o egalitate adevărată.

Ce argumente se pot aduce pentru cazul $M(\alpha, \beta) \notin G_f$? Discutați la nivelul clasei! Verificați că ați înțeles și că argumentele date sunt corecte pe mai multe exemple de funcții.

3. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 5$. Determinați punctele de pe graficul funcției cu proprietatea:

a) au coordonatele egale;	$A(a; a) \in G_f$ dacă $f(a) = a$; $4a - 5 = a \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow A(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.
b) ordonata este dublul abscisei;	$B(a; 2a) \in G_f$ dacă $f(a) = 2a$; $4a - 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow B(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.
c) abscisa este opusul ordonatei;	$C(-a; a) \in G_f$ dacă $f(-a) = a$; $-4a - 5 = a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow C(1; -1)$.
d) media aritmetică a coordonatelor este 15.	$D(a; b) \in G_f$ dacă $f(a) = b$; $4a - 5 = b$. Dar $\frac{a+b}{2} = 15$, deci $D(7; 23)$.

4. Determinați funcția liniară al cărei grafic conține punctele $A(-2; 3)$, $B(1; 6)$.

Rezolvare: Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, al cărei grafic conține punctele $A(-2; 3)$, $B(1; 6)$, deci $f(-2) = -2a + b = 3$, $f(1) = a + b = 6$. Rezolvăm sistemul de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases} -2a + b = 3 \\ a + b = 6 \end{cases}$ și obținem $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$. Funcția este $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 5$.

► A determina o funcție de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ înseamnă a utiliza ipotezele pentru a identifica valorile coeficienților a și b .

5. Determinați funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care are loc relația $f(x + 1) = 4 - 2x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: În relația $f(x + 1) = 4 - 2x$ notăm $x + 1 = y$ și înlocuim x cu $y - 1$. Obținem $f(y - 1 + 1) = 4 - 2(y - 1) \Leftrightarrow f(y) = 4 - 2y + 2 \Leftrightarrow f(y) = 6 - 2y$. Pentru a obține $f(x)$, schimbăm din nou variabila din y în x : $f(x) = 6 - 2x$. Am ținut cont că domeniul de definiție este $\mathbb{R}$.

O altă metodă de determinare a funcției în condițiile exercițiului 5 este următoarea:

- atribuim două valori distincte expresiei ce reprezintă variabila funcției, $x + 1$, ca de exemplu $x + 1 = 0$ și $x + 1 = 1$; obținem $x = -1$ și $f(x + 1) = f(0) = 4 - 2 \cdot (-1) = 6$, respectiv $x = 0$ și $f(x + 1) = f(1) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$;

- știind că funcția este de tip liniar, căutăm valorile pentru coeficienții a și b pentru care relația $f(x) = ax + b$ este verificată de perechile $(0, 6)$ și $(1, 4)$. Obținem sistemul $\begin{cases} b = 6 \\ a + b = 4 \end{cases}$, de unde obținem $a = -2$, în concluzie legea funcției este $f(x) = 6 - 2x$.

6. Verificați dacă punctele $A(2, 3)$, $B(0; -1)$, $C(-2, -5)$ sunt coliniare.

Rezolvare: Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, al cărei grafic conține punctele $A(2, 3)$, $B(0; -1)$. Impunem $f(2) = a \cdot 2 + b = 3$ și $f(0) = a \cdot 0 + b = -1$. Deci $b = -1$ și $2a + (-1) = 3 \Rightarrow a = 2$, așadar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.

Verificăm dacă și cel de-al treilea punct aparține graficului funcției f determinate de celelalte două puncte: $f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$, adevărat, deci punctele sunt coliniare și aparțin dreptei ce corespunde desenului funcției f .

► A verifica faptul că trei puncte sunt coliniare este echivalent cu a verifica faptul că unul dintre ele este situat pe desenul funcției liniare determinate de celelalte două puncte.

7. Considerăm funcția: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - 2x$.

a) Găsiți punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate, A fiind la intersecția cu Oy și B la intersecția cu Ox: obținem $A(0; 4), B(2; 0)$.	
b) Reprezentați grafic funcția.	
c) Calculați aria, perimetrul triunghiului OAB și distanța de la punctul O la dreapta AB.	$OA = 4 \text{ u}, OB = 2 \text{ u}, AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \text{ u}; P_{\triangle OAB} = 6 + 2\sqrt{5} \text{ u},$ $A_{\triangle OAB} = 4 \text{ u}^2; OC = d(O, AB) = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ u}.$
d) Calculați $\text{tg}(\angle ABO)$ și $\sin(\angle BAO)$.	$\text{tg}(\angle ABO) = \frac{AO}{BO} = \frac{4}{2} = 2$ și $\sin(\angle BAO) = \frac{BO}{AB} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$
e) Calculați distanța de la punctul $M(-3; 0)$ la dreapta AB.	$MN \perp AB \Rightarrow MN \parallel OC; \triangle BOC \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{BO}{BM} = \frac{OC}{MN} \Rightarrow MN = 2\sqrt{5} \text{ u}$ sau $A_{\triangle AMB} = \frac{AO \cdot MB}{2} = \frac{MN \cdot AB}{2}.$

8. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2ax - 3a + 1$, unde a este număr real.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(a) = 0$: $f(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0$ și obținem $a = \frac{1}{2}, a = 1$.	
b) Pentru $a = 1$, reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy. Pentru $a = 1$ obținem funcția $f(x) = 2x - 3$.	
c) Dacă $a = 1$, iar M și N sunt proiecțiile punctelor $A(-1; f(-1))$ și, respectiv, $D(2; f(2))$ pe axa Ox a sistemului de axe ortogonale xOy, calculați aria patrulaterului convex cu vârfurile în punctele M, N, D, A, nu neapărat în această ordine.	$A(-1; -4)$ și $D(2; 2); A_{AMDN} = A_{AMN} + A_{DMN} = \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} = 9 \text{ u}^2.$ Putem calcula aria patrulaterului AMDN și cu ajutorul formulei ariei trapezului ($AM \perp Ox, DN \perp Ox \Rightarrow AM \parallel DN$) cu bazele de 2 u, 4 u și înălțimea $MN = 3 \text{ u}.$



Aplicații practice

➤ La fizică am învățat că un mobil care se deplasează rectiliniu și uniform va străbate un spațiu proporțional cu durata mișcării, după formula $s = vt$. În această formulă, v este o mărime constantă, iar timpul t este mărimea variabilă. Formula $s(t) = v \cdot t$ exprimă spațiul parcurs ca funcție de durata mișcării.

➤ Dacă considerăm o forță care acționează asupra unui resort, constatăm că alungirea l a resortului este proporțională cu mărimea F a forței ce acționează. Putem scrie $l(F) = k \cdot F$ (k este constanta specifică resortului), ceea ce exprimă alungirea ca funcție de forța care acționează.

➤ Considerăm o forță constantă de mărime F ce deplasează un corp. Lucrul mecanic efectuat va depinde de mărimea deplasării d . De câte ori este mai mare deplasarea, de atâtea ori este mai mare lucrul mecanic efectuat. Funcția care descrie dependența dintre lucrul mecanic efectuat și deplasare este $L(d) = F \cdot d$.

Exersați

- Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 5$, completați spațiile punctate pentru a obține afirmații adevărate:
 - Domeniul de definiție este
 - Mulțimea în care funcția ia valori este
 - Coeficienții legii de corespondență sunt ...
 - Valoarea funcției în $x = 2$ este ...
 - Valoarea lui x , pentru care valoarea funcției este 5 este ...
 - Valoarea lui a pentru care $A(2a; a) \in G_f$ este ...
 - Intersecțiile graficului funcției cu axele de coordonate sunt ... și ...
- Verificați dacă $A(3; 6), B(-1; 5), C(-2; 1), D(10; 12)$ aparțin reprezentării grafice a funcției $f: [-1; 25] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$.
- Determinați numerele reale a, b, c, d pentru care punctele $A(a; 5), B(-1; b), C(c; c), D(|d|; 2d)$ aparțin reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$.
- Determinați funcția liniară al cărei grafic conține punctele $A(4; -3), B(-3; 4)$.
- Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x - 5$. Determinați punctele ce aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției, cu proprietatea:
 - au coordonatele egale;
 - ordonata este egală cu dublul abscisei;
 - abscisa este opusul ordonatei;
 - media aritmetică a coordonatelor este 10.
- Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ știind că:
 - $A(1; 1) \in G_f, B(-1; -1) \in G_f$;
 - $A(1; -1) \in G_f, B(3; -1) \in G_f$;
 - $A(4; 1) \in G_f, B(-1; 3) \in G_f$;
 - $A(2; 3) \in G_f, B(-2; -3) \in G_f$.
 Pentru fiecare funcție găsiți precizați dacă funcția este crescătoare sau descrescătoare, în baza lecturii grafice sau proprietății coeficientului a .
- Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$, stabiliți dacă punctele $A(-1; -1)$ și $B(0; -2)$ aparțin reprezentării grafice. Reprezentați funcția într-un sistem de coordonate xOy . Care este soluția ecuației $f(x) = 0$?
- Reprezentați grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - 2x$, folosind punctele de intersecție ale reprezentării grafice cu axele de coordonate. Determinați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției și axele de coordonate. Care este mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) \geq 0$?
- Reprezentați grafic funcțiile:
 - $f: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$;
 - $f: (-4; 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x - 2$;
 - $f: [-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$;
 - $f: (-\infty; 4) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 5$.
- Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$ determinați punctul aparținând reprezentării grafice care are:
 - abscisa egală cu 3;
 - ordonata egală cu 6;
 - abscisa egală cu ordonata;
 - abscisa egală cu opusul ordonatei;
 - ordonata egală cu dublul abscisei;
 - ordonata egală cu triplul abscisei.
- Stabiliți dacă următoarele puncte sunt coliniare:
 - $A(-2; 2), B(2; 2), C(5; 2)$;
 - $A(1; 0), B(2; 1), C(5; 6)$;
 - $A(3; 0), B(2; 5), C(-1; 7)$;
 - $A(-2; 0), B(2; 4), C(5; 7)$.
- Considerăm funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + b$. Determinați funcțiile, știind că punctul de intersecție al graficelor celor două funcții este $A(2; 3)$. Trasați graficele celor două funcții în același sistem de axe de coordonate. Calculați aria triunghiului determinat de cele două reprezentări grafice și axa Ox .
- Trasați graficele funcțiilor următoare în același sistem de axe de coordonate și găsiți coordonatele punctului de intersecție al desenelor corespunzătoare perechilor de funcții:
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 6 - 3x$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4x + 4$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - 3x$.
 - Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate, cele două funcții.
 - Precizați coordonatele punctului de intersecție al celor două grafice.
 - Rezolvați inecuațiile $g(x) < 0, f(x) > 0$ și $f(x) \geq g(x)$.
- Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care are loc relația oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$:
 - $f(x + 1) = 3x - 5$;
 - $f(x - 2) = |x + 2|$;
 - $f(2x + \sqrt{2}) = 4x - 1$;
 - $f(1 - x) = |2x + 3|$;
 - $f(x + 4) = x^2 + 4$.

16. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(3x - 4)$.

- Determinați funcția g și trasați în același sistem de axe de coordonate graficele celor două funcții.
- Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor grafice ale celor două funcții.

17. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$ determinați:

- intersecțiile graficului cu axele de coordonate;
- aria triunghiului determinat de reprezentarea geometrică a graficului funcției și axele de coordonate;
- distanța de la originea axelor de coordonate la reprezentarea geometrică a graficului funcției;
- tangenta unghiului ascuțit dintre reprezentarea geometrică a graficului funcției și axa Ox ;
- mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) \leq 0$.

18. Fie punctele $A(4; 4)$, $B(5; 0)$, $C(-4; 0)$ și $D(0; 2)$.

- Determinați funcțiile liniare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției conține punctele A și B și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției conține punctele A și C .
- Verificați dacă punctele A , C și D sunt coliniare.
- Trasați în același sistem de axe de coordonate graficele funcțiilor f și g .
- Calculați aria $\triangle COD$, perimetrul patrulaterului $ABOD$ și distanța de la originea axelor de coordonate la dreapta AC .

19. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$.

- Calculați $f(0) + f(0,5) - f(1)$.
- Reprezentați grafic funcția f .
- Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(a) = a$.
- Determinați coordonatele punctul $M(a; b) \in G_f$ știind că $|a| = |b|$.

20. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + a + 4$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- Calculați $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.
- Determinați a , a număr real, știind că $f(1) \cdot f(-1) - 8 = 0$.
- Pentru $a = -1$, reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .
- Pentru $a = -1$, calculați distanța de la punctul $M(0; -5)$ la dreapta care reprezintă graficul funcției f .

21. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 4$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = b - x$, unde a și b sunt numere reale.

- Determinați numerele a și b , știind că punctul $D(3; -1)$ aparține reprezentărilor grafice ale celor două funcții.
- Pentru $a = 1$ și $b = 2$, reprezentați grafic funcțiile f și g în același sistem de axe de coordonate.
- Pentru $a = 1$ și $b = 2$, reprezentarea grafică a funcției f intersectează axele Ox și Oy în punctele A , respectiv B , iar reprezentarea grafică a funcției g intersectează axele Ox și Oy în punctele C , respectiv E . Demonstrați că dreapta BC este perpendiculară pe dreapta AE .

22. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - 2x$.

- Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de coordonate.
- Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = g(x)$.
- Graficul funcției f intersectează axele Ox și Oy în punctele P , respectiv Q , iar graficul funcției g intersectează axele Ox și Oy în punctele H , respectiv M . Demonstrați că dreapta QH este perpendiculară pe dreapta MP .

23. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b - 9$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2bx - a$, unde a și b sunt numere reale.

- Determinați numerele a și b , știind că punctul $A(2; 3)$ aparține reprezentărilor grafice ale celor două funcții.
- Pentru $a = 5$ și $b = 2$, reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de coordonate.
- Pentru $a = 5$ și $b = 2$, reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Oy în punctul B , iar reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Oy în punctul C . Calculați distanța de la punctul C la dreapta AB .

24. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale.

- Calculați valorile numerelor a și b , dacă $f(2) = 6$ și $f(3) = 8$.
- Pentru $a = 2$ și $b = 2$, reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .
- Fie punctele $M(0; 2)$, $N(-1; 0)$ și $P(c; 0)$. Determinați valoarea lui c astfel încât dreptele MN și MP să fie perpendiculare.

25. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$. Calculați $f(-2)$, $f(3)$, $f(0)$, $f(f(0))$ și reprezentați grafic funcția f .

Elemente de statistică. Indicatorii tendinței centrale

Frecvența

În urma susținerii unor teste pentru disciplinele Limba română și Matematică, rezultatele tuturor elevilor clasei a VIII-a A au fost următoarele:

- la disciplina Limba română: 7, 9, 6, 6, 8, 10, 7, 5, 8, 9, 9, 6, 8, 7, 10, 9, 8, 6, 8, 8, 7, 7, 9, 8, 7.
- la disciplina Matematică: 8, 8, 9, 7, 6, 10, 7, 10, 5, 9, 8, 6, 7, 7, 8, 10, 9, 6, 9, 7, 5, 8, 8, 7, 9.

Dirigintele clasei trebuie să prezinte părinților rezultatele elevilor în cadrul unei ședințe. Pentru aceasta, el și-a propus:

- să informeze individual fiecare părinte asupra notelor obținute de propriul copil, a punctelor tari și a aspectelor de îmbunătățit;
- să prezinte tuturor părinților anumite caracteristici ale rezultatelor obținute la nivelul disciplinelor și la nivelul întregii clase.

Rețineți!

Pentru prezentarea caracteristicilor, s-au extras din catalog și s-au înregistrat, în tabelele următoare, notele pentru fiecare dintre cele două discipline. Apoi s-au folosit anumite *elemente de statistică matematică*.

Pentru a putea identifica anumite caracteristici, numite *variabile statistice*, s-a ordonat crescător fiecare set de date, evidențiind pentru fiecare notă numărul de înregistrări (*frecvența* apariției unei aceleiași valori).

S-au consemnat aceste date în următoarele tabele:

- la disciplina Limba română:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. înregistrări					I	III	III I	III II	III	II
Frecvența	0	0	0	0	1	4	6	7	5	2

- la disciplina Matematică:

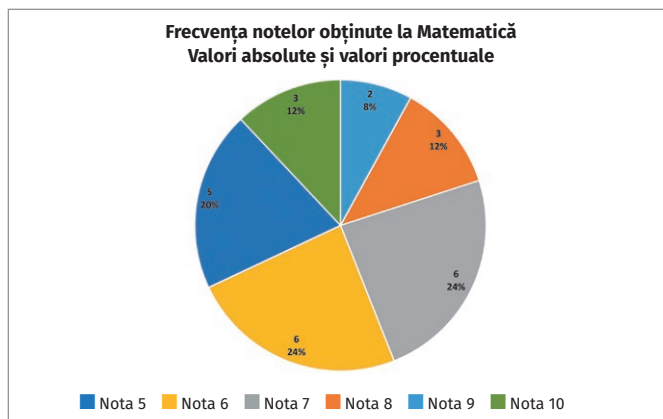
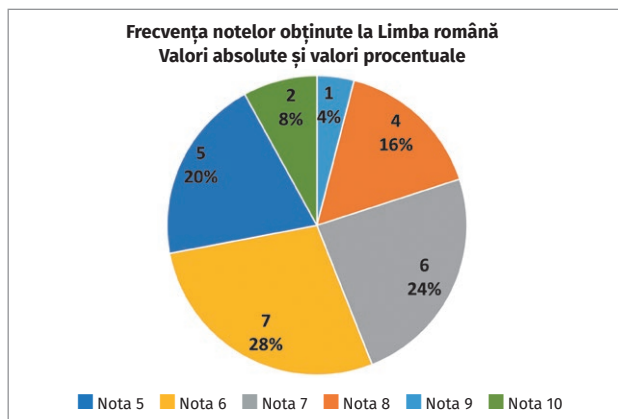
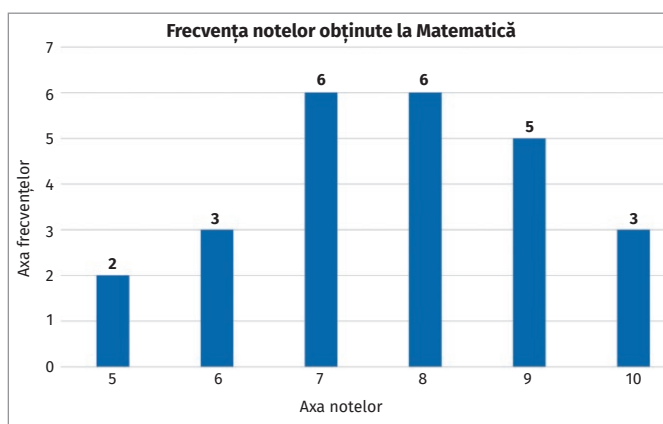
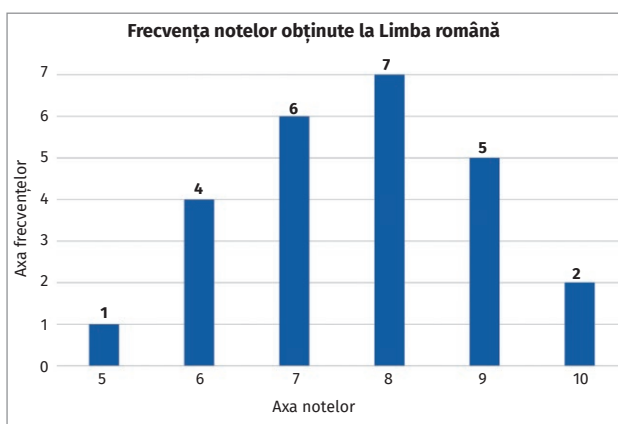
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. înregistrări					II	III	III I	III I	III	III
Frecvența	0	0	0	0	2	3	6	6	5	3

În baza organizării și sistematizării seturilor de date, s-a putut verifica simplu, prin adunarea frecvențelor, că notele au fost consemnate pentru toți cei 25 de elevi ai clasei: $1 + 4 + 6 + 7 + 5 + 2 = 25$ (suma frecvențelor notelor obținute la Limba română), respectiv $2 + 3 + 6 + 6 + 5 + 3 = 25$ (suma frecvențelor notelor obținute la Matematică).

Rețineți!

Totalul de 25 de elevi reprezintă, în acest caz, *populația statistică*. Atunci când populația statistică este mare (de exemplu toți cetățenii României), o analiză statistică pentru o anumită *caracteristică* se poate face pe un *eșantion* al acestei populații. Astfel, pentru caracteristica *note la test*, toți elevii unei școli formează o populație statistică, iar alegerea pe anumite criterii doar a unora dintre elevi pentru care să fie studiată caracteristica va reprezenta o analiză pe eșantion. Spunem că populația statistică este formată din *unități* sau *indivizi*. În cazul nostru, *unitatea* este un elev al clasei.

Pentru a se evidenția mai ușor frecvența notelor la fiecare disciplină, dirigintele a utilizat o reprezentare cu ajutorul *scalelor verticale a frecvențelor*, folosind o reprezentare cu ajutorul *barelor*, respectiv cu ajutorul *discurilor*:



Rețineți!

Valorile procentuale ale frecvențelor au fost calculate ca raportul dintre frecvențe (exprimate în valori absolute) și valoarea totală a frecvențelor. Astfel, pe reprezentarea cu ajutorul discului a frecvențelor notelor de la Limba română, valoarea procentuală a frecvenței notei 6 a fost calculată astfel: $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$.

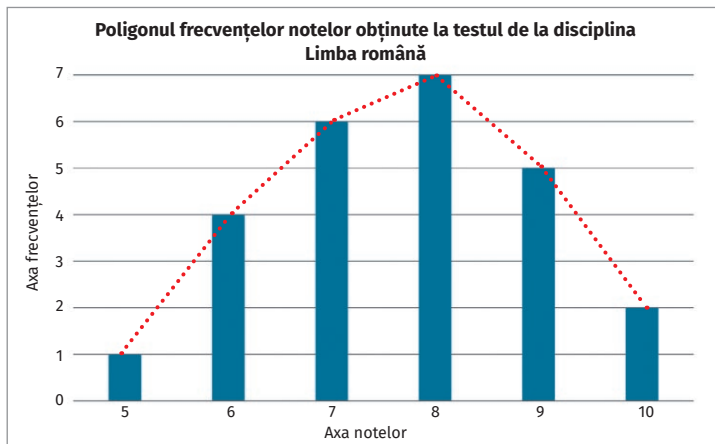


Reflectăm!

A aprecia o caracteristică măsurabilă a unui set de date (a unei populații) atât în valori absolute, cât și în valori relative (procentuale) permite o analiză mai bună a caracteristicii. A afirma că 4 elevi au luat nota 6 are o semnificație mai restrânsă decât afirmația că 4 elevi din 25, adică 16%, au luat nota 6.

Rețineți!

O altă modalitate de a prezenta grafic frecvențele este *poligonul frecvențelor*. Acesta se obține mai ușor în cazul în care frecvențele au fost deja reprezentate sub formă de bare:



Dirigintele s-a gândit că, pe parcursul prezentării, părinții vor fi interesați să primească informații nu numai despre câți elevi au obținut o anumită notă, ci și, de exemplu, câți elevi au obținut note mai mari sau egale cu 7, mai mici ca 8 sau totalul de note de 6, 7 și 8.

Rețineți!

Statistica se ocupă cu înregistrarea (organizarea), gruparea, reprezentarea și interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen și elaborarea unor previziuni referitoare la evoluția lui ulterioară.

Pentru analiza statistică a unui fenomen parcurgem următorii pași: culegerea și înregistrarea datelor, analiza și interpretarea datelor, formularea de concluzii.

Exemple de populații statistice: mulțimea elevilor unei clase, mulțimea orașelor din țară, mulțimea locuitorilor din țară. La ultimul exemplu, mulțimea fiind foarte mare, se lucrează, în general, cu eșantioane.

Caracteristica sau variabila statistică a populației reprezintă o trăsătură comună tuturor unităților (individurilor) populației. Caracteristica poate fi **cantitativă** (dacă se poate măsura) sau **calitativă** (în caz contrar).

Exemple de caracteristici: nota la testul de matematică, înălțimea, greutatea, vârsta (acestea sunt caracteristici cantitative) sau culoarea ochilor (caracteristică de tip calitativ).

Analiza și interpretarea datelor statistice se bazează pe o serie de indicatori, care caracterizează *tendința centrală*. Pentru a înțelege modul în care indicatorii statistici descriu tendința centrală a unui set de date, revenim la exemplul dirigintelui clasei a VIII-a A.

Astfel, pentru a completa informația despre rezultatele obținute de elevi la teste, dirigintele își propune să evidențieze indicatorii pentru Limba română, să explice elevilor ce reprezintă și cum se determină, apoi să-i lase să exerseze pentru setul de note de la Matematică.

Media caracteristicii x

Notând cu x caracteristica, primul indicator pe care îl folosește dirigintele este *media caracteristicii*, notată $\bar{x}$, medie care se calculează:

- fie ca medie aritmetică, folosind datele din tabelul inițial pentru notele de la Limba română:

$$\bar{x} = \frac{7 + 9 + 6 + 6 + 8 + 10 + 7 + 5 + 8 + 9 + 9 + 6 + 8 + 7 + 10 + 9 + 8 + 6 + 8 + 8 + 7 + 7 + 9 + 8 + 7}{25} = 7,68$$

- fie ca medie aritmetică ponderată, folosind valorile notelor și frecvența lor ca ponderi:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{1 + 4 + 5 + 7 + 5 + 2} = \frac{1092}{25} = 7,68.$$



Reflectăm!

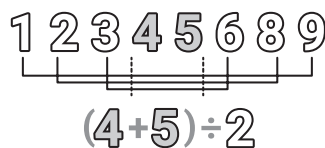
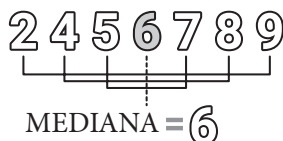
Cu cât este mai mare volumul de date statistice, cu atât mai important este ca, înainte de a trece la calculul indicatorilor statistici, să organizăm datele. Comparați cele două moduri de calcul al mediei! Exprimați cele două moduri de calcul la modul general, aducându-vă aminte de definițiile mediilor învățate.

Calculul mediei ne permite să avem o imagine de ansamblu a caracteristicii, față de o notă, care este o imagine punctuală (locală). În raport cu media clasei, un elev poate să-și de-a seama de calitatea performanței sale. Ce semnificație dăm unei note care se află deasupra mediei?

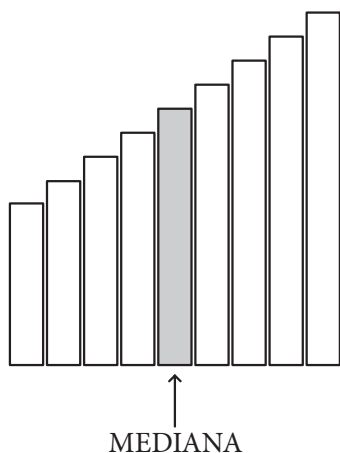


Reflectăm!

Ce strategie a folosit elevul pentru a identifica poziția de mijloc? Ce a permis să existe această poziție de mijloc?



$$\text{MEDIANA} = 4.5$$



Exersăm împreună!

În perechi, calculați în ambele moduri media notelor la testul la Matematică, folosind datele din tabelele de la începutul lecției. Comparați metodele de calcul și, apoi, media notelor la Matematică față de media notelor la Limba română. Formulați concluzii în raport cu cele două medii. Se puteau formula respectivele concluzii doar observând datele din tabele de valori?

Mediana caracteristicii cantitative x

Dirigintele roagă un elev să scrie toate notele obținute la testul de Limba română în ordine crescătoare, apoi îi cere să sublinieze poziția de mijloc a setului de numere:

5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10



Rețineți!

Într-o ordonare crescătoare a înregistrărilor unei caracteristici cantitative (măsurabile, numerice) x , valoarea ce ocupă poziția de mijloc într-un set de date ordonat, cu un număr impar de înregistrări, se numește *mediana* caracteristicii, notată $\tilde{x}$ (semnul $\sim$ se citește *tilda*).

Exersăm împreună!

Pentru exemplul anterior, $\tilde{x} = 8$. Mediana caracteristicii reprezintă tot o interpretare a tendinței centrale.

Observați setul următor de date, care este ordonat și conține 10 înregistrări (număr par):

4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10

Cum numărul de termeni este 10, pozițiile 5 și 6 din setul de date ordonat crescător se vor numi termeni de mijloc (mediani) și cu ajutorul lor se va calcula mediana caracteristicii ca media aritmetică a lor:

$$\tilde{x} = \frac{7+8}{2} = 7,5$$



Rețineți!

În cazul în care numărul de înregistrări este par, mediana caracteristicii se obține ca medie aritmetică a valorilor de mijloc ale setului de date (înregistrări) ordonate crescător.

Exersăm împreună!

Calculați mediana caracteristicii asociate rezultatelor obținute la Matematică, folosind înregistrările din tabelul de la începutul lecției. Putem folosi tabelul în care sunt evidențiate și frecvențele cumulate crescător pentru determinarea medianei? Explicați!

Modul sau dominanta caracteristicii x

Dirigintele clasei a VIII-a A s-a gândit că o întrebare posibilă pe care un părinte o poate formula este: care este nota sau care sunt notele care au fost cel mai des obținute?

Pentru aceasta, dirigintele a cerut altui elev să rescrie tabelul cu frecvențele notelor la Limba română și să sublinieze valoarea cea mai mare a frecvenței:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	0	0	0	0	1	4	6	7	5	2

Concluzia formulată în urma acestei cerințe este că nota 8 are cea mai mare frecvență.



Rețineți!

Modul sau dominanta caracteristicii reprezintă valoarea caracteristicii care are asociată cea mai mare frecvență.

Dacă există o singură valoare a caracteristicii cu o cea mai mare frecvență, spunem că respectiva caracteristică este **unimodală**.



Reflectăm!

Pot exista caracteristici bimodale sau multimodale. Ce particularitate are setul de frecvențe în aceste cazuri?



Exersăm împreună!

Calculați modul caracteristicii asociate rezultatelor obținute la Matematică, folosind înregistrările din tabelele de la începutul lecției.

Amplitudinea caracteristicii cantitative x

Observând tabelul notelor la testul de Limba română, putem observa că, deși notele ce se pot acorda reprezintă valori întregi de la 1 până la 10 inclusiv, în fapt înregistrările arată că notele pornesc de la 5 (cea mai mică notă, deci cea mai mică valoare a caracteristicii) și ajung la 10 (cea mai mare notă, deci cea mai mare valoare a caracteristicii).



Rețineți!

Se numește **amplitudinea** caracteristicii cantitative diferența dintre cea mai mare și cea mai mică dintre valorile caracteristicii (pentru care există înregistrări).



Reflectăm!

Pentru exemplu dat, amplitudinea este egală cu 5 și se calculează astfel: $10 - 5 = 5$. Informația pe care o oferă calcul amplitudinii este privitor la lărgimea intervalului de valori ale caracteristicii și, corelată cu media, oferă o imagine mai amplă asupra rezultatelor analizei statistice.

Pentru a înțelege importanța corelării mediei caracteristicii cu amplitudinea acesteia, calculați cei doi indicatori pentru următoarele seturi de date:

- 2; 1000;
- 499; 500; 500; 500; 501; 506.

Discutați la nivelul clasei și formulați concluzii care sprijină învățarea.



Exersăm împreună!

1. Următoarea serie de date arată prețul de vânzare (în lei) pentru 13 tricouri, la un magazin: 51, 60, 72, 35, 32, 57, 63, 61, 48, 33, 67, 54, 37.

- Calculați și interpretați indicatorii tendinței centrale.
- Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, justificând răspunsurile:

- 1) 25% dintre tricouri s-au vândut pentru un preț mai mic de 48 de lei;
- 2) jumătate dintre tricouri au un preț mai mic sau egal cu 54 de lei;
- 3) 25% dintre tricouri s-au vândut cu cel puțin 62 de lei;
- 4) 75% dintre tricouri s-au vândut cu un preț de cel puțin 36 de lei.

Rezolvare: a)

- Populația statistică este mulțimea tricourilor puse în vânzare la magazin.
- Unitatea statistică este un tricou pus în vânzare la magazin.
- Caracteristica, notată cu x , arată prețul de vânzare, în lei, al unui tricou.
- Pentru un eșantion de volum $n = 13$ unități statistice (tricouri), se cunoaște prețul de vânzare, adică avem următoarea serie statistică de date numerice: $x_1 = 51, x_2 = 60, x_3 = 72, x_4 = 35, x_5 = 32, x_6 = 57, x_7 = 63, x_8 = 61, x_9 = 48, x_{10} = 33, x_{11} = 67, x_{12} = 54, x_{13} = 37$. Organizarea datelor într-un tabel este:

Preț	51	60	72	35	32	57	63	61	48	33	67	54	37
------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Media caracteristicii este media aritmetică a prețurilor:

$$\bar{x} = \frac{51 + 60 + 72 + 35 + 32 + 57 + 63 + 61 + 48 + 33 + 67 + 54 + 37}{13} = \frac{670}{13} = 51,5385 \approx 51,54 \text{ lei, adică prețul mediu de vânzare al unui tricou este de aproximativ } 51,54 \text{ lei.}$$

zare al unui tricou este de aproximativ 51,54 lei.

- Pentru a calcula mediana caracteristicii trebuie să ordonăm crescător prețurile: 32; 33; 35; 37; 48; 51; 54; 57; 60; 61; 63; 67; 72. Dacă avem 13 numere, mijlocul se află pe locul 7, deci $\tilde{x} = 54$ de lei. Jumătate dintre tricouri s-au vândut cu un preț mai mic de 54 de lei, iar restul cu un preț mai mare de 54 de lei.

- Toate prețurile au frecvența 1, deci caracteristica este multimodală (însă în acest exemplu relevanța indicatorului este relativ redusă).

- Amplitudinea prețului este 72 lei – 32 lei = 40 lei.

Preț	32	33	35	37	48	51	54	57	60	61	63	67	72
Frecvența	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

b)

- 1) 25% dintre tricouri s-au vândut cu un preț mai mic de 48 de lei – afirmație falsă, deoarece 25% din numărul de tricouri corespunde unui număr de 3 tricouri, deci s-au vândut cu preț mai mic sau egal cu 35 de lei.

- 2) Jumătate dintre tricouri au un preț mai mic sau egal cu 54 de lei – afirmație adevărată, deoarece mediana este 54 de lei;

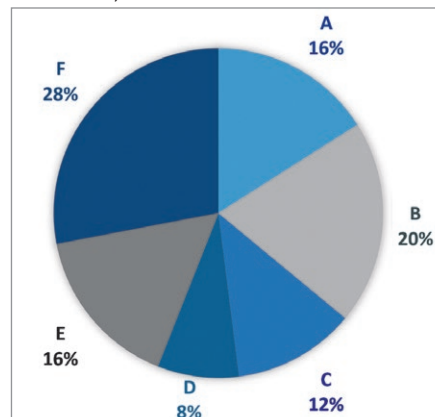
- 3) 25% dintre tricouri s-au vândut cu cel puțin 62 de lei: afirmație corectă, deoarece cele mai scumpe 3 tricouri (25%) au prețul peste 61 de lei.

- 4) 75% dintre tricouri au prețuri de cel puțin 36 de lei – afirmație adevărată.

2. Structura unui eșantion de 75 de copii, caracteristica analizată fiind nivelul maxim atins la un joc pe calculator, este reprezentată în diagrama alăturată, unde nivelul A este cel mai slab și nivelul F este cel mai bun. Realizați un tabel care să ilustreze numărul de elevi pentru fiecare nivel al jocului. Calculați indicatorii tendinței centrale.

Rezolvare: Transformăm diagrama în tabel.

Nivel	A	B	C	D	E	F
Procent	16%	20%	12%	8%	16%	28%



Folosind valorile procentuale și numărul total de copii, calculăm valorile absolute (numerice) ale frecvențelor:

Nivel	A	B	C	D	E	F
Număr copii	12	15	9	6	12	21

- Populația statistică este mulțimea copiilor care participă la joc.
- Unitatea statistică este un copil.
- Caracteristica, notată cu x , este reprezentată de nivelul jocului.
- Media caracteristicii este media aritmetică a numărului de copii: $\bar{x} = \frac{12 + 15 + 9 + 6 + 12 + 21}{5} = \frac{75}{5} = 15$. Ce semnificații dăm acestei medii?
- Modul este atins la nivelul F.

3. În diagrama alăturată sunt reprezentate temperaturile zilnice maxime pe parcursul unei săptămâni. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

- Cea mai friguroasă zi a fost
- Cea mai călduroasă zi a fost
- Amplitudinea caracteristicii este egală cu

d) Media temperaturilor pe parcursul săptămânii este egală cu

Rezolvare:

- Cea mai friguroasă zi a fost luni.
- Cea mai călduroasă zi a fost duminică.
- Amplitudinea caracteristicii este egală cu $28^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C} = 8^{\circ}\text{C}$.
- Media temperaturilor pe parcursul săptămânii este egală cu

$$\bar{x} = \frac{20^{\circ}\text{C} + 22^{\circ}\text{C} + 25^{\circ}\text{C} + 24^{\circ}\text{C} + 26^{\circ}\text{C} + 25^{\circ}\text{C} + 28^{\circ}\text{C}}{7} = \frac{170^{\circ}\text{C}}{7} = 24,2857^{\circ}\text{C} \approx 24^{\circ}\text{C}.$$

4. La un schimb de experiență din cadrul unui proiect participă elevi din patru țări: România, Franța, Germania și Spania. Diagrama alăturată arată participarea fiecărei țări.

- Câți elevi au participat în total la întâlnire?
- Câți elevi au participat din fiecare țară?
- Realizați un tabel cu numărul de elevi din fiecare țară și graficul frecvențelor.

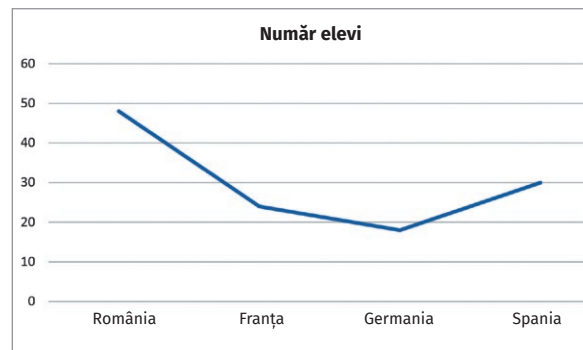
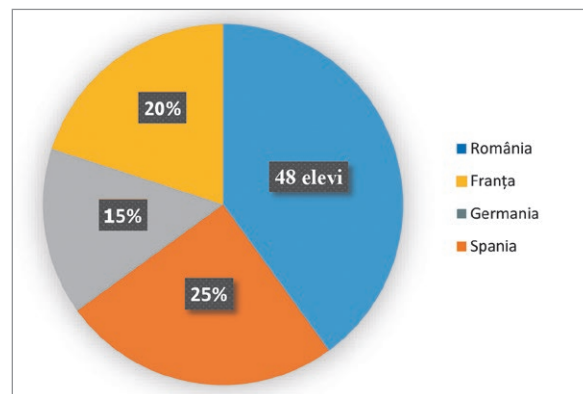
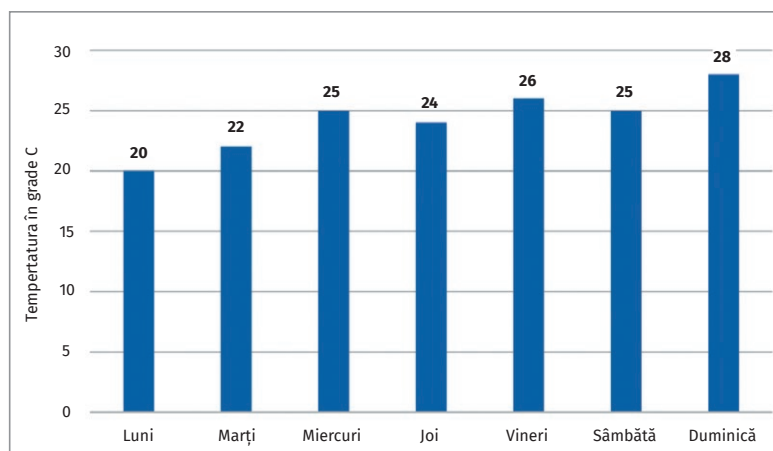
Rezolvare:

a) Cei 48 de elevi din România reprezintă $100\% - 25\% - 15\% - 20\% = 40\%$ din numărul total de elevi. La întâlnire participă 120 de elevi.

b) 30 de elevi sunt din Spania, 24 de elevi sunt din Franța și 18 elevi sunt din Germania.

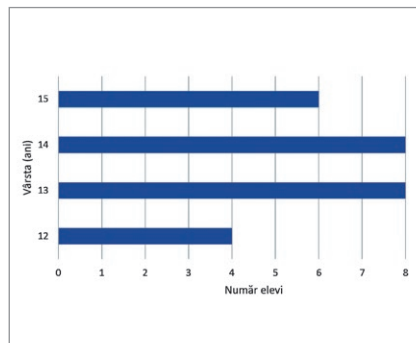
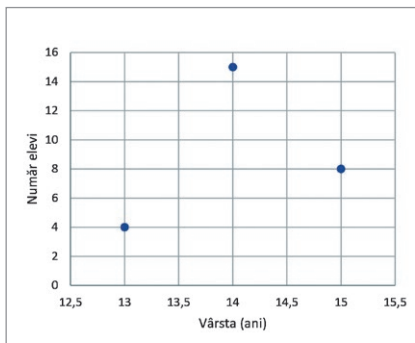
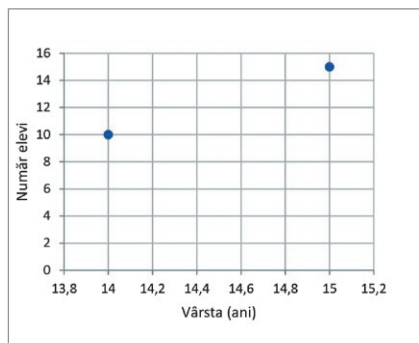
c)

Țara	România	Franța	Germania	Spania
Număr elevi	48	24	18	30



Exersați

1. Compuneți trei probleme, după ce analizați reprezentările de mai jos.



2. Primele 60 de zecimale ale numărului π sunt: 1415 9265 3589 7932 3846 2664 3383 2795 0288 4197 1693 9937 5105 8209 7494.

a) Completați tabelul frecvențelor fiecărei cifre.

b) Calculați media, mediana și modul.

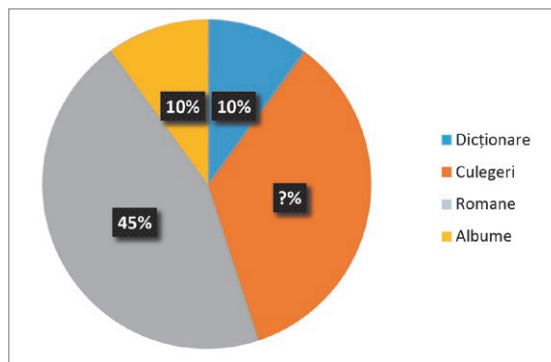
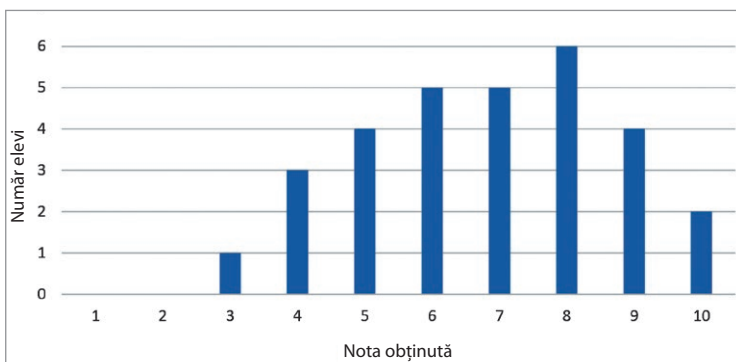
c) Reprezentați datele cu ajutorul unei diagrame și desenați graficul frecvențelor.

3. La simularea examenului de evaluare națională la disciplina matematica, elevii unei școli au obținut următoarele punctaje: 75; 77; 45; 55; 35; 78; 100; 38; 95; 70; 100; 75; 50; 40; 76; 97; 89; 90; 45; 85; 98; 69; 86; 65; 85; 30; 39; 55; 73; 67; 55; 90; 30; 93; 100. Grupați datele în clase de valori de lungime 10 (21–30; 31–40; 41–50; ..., 91–100) și completați un tabel cu datele obținute. Reprezentați datele problemei printr-o diagramă. Calculați indicatorii tendinței centrale.

4. Tabelul de mai jos indică o clasificare a elevilor unei clase după tipul de lectură pe care o preferă. Completați spațiile libere ale tabelului și reprezentați datele printr-o diagramă.

Tipul de literatură	Romane polițiste	Romane SF	Romane de dragoste	Total
Elevi				
Fete	12		4	19
Băieți	6			
Total		8	6	

5. În diagrama alăturată este expusă, în procente, componența bibliotecii unei școli (categorii de tipărituri). Știind că numărul culegerilor de probleme este 1400, determinați câte cărți sunt în bibliotecă și câte dintre ele sunt dicționare, romane și albume. Reprezentați datele problemei într-un tabel și printr-o diagramă cu bare. Determinați media caracteristicii.



6. Notele obținute de elevii clasei a VIII-a la un test sunt reprezentate în diagrama alăturată. Determinați:

a) Câți elevi sunt în clasă?

b) Care este media și amplitudinea notelor?

7. La o firmă de îmbuteliat băuturi răcoritoare s-a verificat instalația de umplere a sticlelor, măsurându-se cantitatea de suc îmbuteliată în 40 de sticle de 500 ml. S-au obținut următoarele rezultate:

490	494	500	492	495	495	496	490	501	493
491	502	502	496	502	500	502	498	498	497
494	500	496	498	500	502	506	505	502	504
495	501	505	501	499	498	498	506	504	498

Grupați datele în clase de valori de lungime 5 (486–490; 491–495; 496–500; 501–505; 506–510) și completați un tabel. Reprezentați datele printr-o diagramă. Care este media cantității de suc?

8. Un agent economic solicită un credit de 10 000 euro, rambursabil în cinci ani astfel: în primul an 25% din valoarea creditului, în al doilea an 20% din creditul rămas, în al treilea an 30% din suma rămasă de plată, iar în ultimii doi ani tranșe egale. Dacă rata dobânzii este de 12% pe an, completați următorul tabel:

Nr. ani	Tranșa	Dobânda	Credit nerambursat	Suma de plată

9. La o verificare scrisă la disciplina matematică s-au înregistrat următoarele note: 8, 7, 9, 7, 7, 5, 4, 10, 6, 9, 8, 8, 4, 5, 7, 10, 9, 9, 3, 9, 10, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 3, 8, 7.

- Completați tabelul frecvențelor notelor.
- Reprezentați datele printr-o diagramă și desenați poligonul frecvențelor.
- Calculați media clasei.

Proiect

Rezolvați, pe grupe de elevi, problema de mai jos. Comparați rezultatele cu cele ale celorlalte grupe și analizați eventualele diferențe.

S-au luat la întâmplare 30 de spice de orz. Numărând boabele conținute în fiecare spic, s-au obținut următoarele rezultate: 21; 28; 17; 20; 22; 24; 13; 20; 19; 22; 16; 22; 21; 16; 23; 16; 21; 24; 18; 11; 22; 15; 23; 21; 10; 15; 18; 15; 21; 14.

- Grupați datele în 6 clase de valori (intervale).
- Completați tabelul frecvențelor.
- Calculați valoarea medie a mulțimii de date.
- Construiți histograma corespunzătoare.

În urma unei evaluări, elevii clasei a VIII-a au obținut următoarele note: o notă de 2, două note de 3, patru note de 4, patru note de 5, cinci note de 6, șase note de 7, cinci note de 8, două note de 9 și o notă de 10. Profesorul clasei trebuie să analizeze rezultatele și să le prezinte celorlalți profesori ai școlii și părinților. Cere elevilor să organizeze datele obținute într-un tabel, printr-o diagramă cu dreptunghiuri și una cu bare, și să reprezinte graficul frecvențelor. Apoi să răspundă la următoarele întrebări:

- Care este nota obținută de cei mai mulți elevi?
- Care este media clasei?
- Care este mediana setului de note?
- Care este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică notă?

Recapitulare



1. Calculați $\text{Im}f$ pentru funcțiile:

- a) $f: \{-5; -3; -1; 0; 2; 4; 6\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 9$;
 b) $f: \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 9$;
 c) $f: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$;
 d) $f: \{-5; -3; -1; 0; 2; 4; 6\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| + 5$;
 e) $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 : x\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$;
 f) $f: \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 6\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x - 4$. Calculați:

- a) $f(0), f(-2), f(3), f(5)$;
 b) $f(-2) + f(-1) + f(\frac{1}{3}) + f(1) + f(\frac{7}{3})$;
 c) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100)$.

3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 5$. Determinați punctele de pe graficul funcției pentru care:

- a) abscisa este egală cu 5;
 b) ordonata este egală cu 7;
 c) abscisa este egală cu ordonata;
 d) ordonata este egală cu dublul abscisei;
 e) abscisa este egală cu dublul ordonatei;
 f) suma dintre dublul abscisei și ordonată este egală cu 5.

4. Reprezentați grafic funcțiile:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 5$; b) $f: \{-2; 0; 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 6$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 2$;
 e) $f: \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 5$;
 f) $f: (-3; 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x$;
 g) $f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 8 - 2x$;
 h) $f: [-4; 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 5$;
 i) $f: (-\infty; 7) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 15$;
 j) $f: [3; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 8$.

5. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate, pentru:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 5$; b) $f: (-2; 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 9$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |-x + 5|$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5$;
 e) $f: [4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$.

6. Determinați valoarea numărului real a pentru care punctul $A(a; 3)$ aparține graficului funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 5$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |5x| + 5$;

d) $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3$;

e) $f: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 9$.

7. Determinați, în fiecare caz, valoarea numărului real a pentru care punctul precizat aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + 2a + 6$:

- a) $A(a; 3)$; b) $A(1; 3)$; c) $A(a; 1)$; d) $A(3; 5a)$;
 e) $A(a + 2; 3a - 3)$.

8. Determinați coordonatele unui punct de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 5$, știind că abscisa și ordonata sunt direct proporționale cu 3 și 9.

9. Determinați coordonatele unui punct de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 4$, știind că abscisa și ordonata sunt invers proporționale cu 20 și 5.

10. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, știind că graficul funcției conține punctele $A(-3; -5)$ și $B(2; 5)$.

11. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, știind că graficul conține punctele $A(2; 4)$ și $B(a; 3a - 2)$.

12. Verificați dacă punctele $A(3; 4)$, $B(5; -2)$ și $C(4; 1)$ sunt coliniare.

13. Determinați valoarea numărului real a pentru care punctele $A(1; -4)$, $B(2; 3)$ și $C(a; 3)$ sunt coliniare.

14. Reprezentați grafic funcțiile și apoi rezolvați, utilizând reprezentarea grafică, ecuația $f(x) = 0$ și inecuația $f(x) \leq 0$:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$;
 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x - 3$;
 c) $f: (-\infty; 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 8$;
 d) $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$.

15. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 3$.

a) Trasați graficele celor două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al celor două reprezentări grafice.

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare

Test de autoevaluare

1. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4$;

c) $f: (3; 5) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$;

d) $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 3$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x - 3$.

a) Calculați $f(-4) + f(3)$.

b) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe xOy .

c) Determinați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f și axele de coordonate.

d) Determinați distanța de la originea axelor de coordonate la reprezentarea grafică a funcției f .

e) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A(1; a) \in G_f$.

f) Determinați tangenta unghiului ascuțit format de reprezentarea grafică a funcției f cu axa ordonatelor.

g) Calculați $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100)$.

h) Determinați coordonatele punctului de pe grafic care are abscisa egală cu ordonata.

i) Determinați un punct ce aparține graficului funcției f , care are suma coordonatelor egală cu 10.

j) Calculați distanța dintre două puncte care aparțin graficului, ordonatele lor fiind -6 și 3 .

Punctaj. 1p din oficiu, 1. 4p, 2. 5p.

Timp de lucru: 50 de minute.

Test de evaluare

PARTEA I – Pe foaie scrieți numai rezultatele (30p)

1. Fie $f: \{-2; -1; 0; 1; 2; 4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + 1$. Imf este ...

2. Cel mai mic domeniu de definiție al funcției $f: A \rightarrow \{0; 1; 2; 3; 4\}, f(x) = x + 2$ este ...

Pentru itemii 3–6, completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2$. Valoarea de adevăr a relației $A(2; 4) \in G_f$ este ...

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + 4$. Valoarea reală a lui a pentru care $A(-2; 8) \in G_f$ este ...

5. Intersecția graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 6$ cu axa absciselor este punctul de coordonate ...

6. Punctul de intersecție al reprezentărilor grafice ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1$ are coordonatele ...

La următoarele probleme se cer rezolvări complete

PARTEA a II-a (30p)

1. Verificați dacă $A(2; 5), B(-3; 4)$ și $C(7; 6)$ sunt coliniare.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1 + \sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$. Determinați numerele raționale a și b pentru care punctul $M(a + 2; b\sqrt{2})$ aparține graficului funcției f .

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 1$. Rezolvați inecuația $f(x - 3) + 7 \geq 2 - f(1 - x)$.

PARTEA a III-a (30p)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 3$.

a. Reprezentați grafic funcția.

b. Calculați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției și axele de coordonate.

c. Calculați lungimile medianelor triunghiului format de reprezentarea grafică și axele de coordonate.

Punctaj. 10p din oficiu; I. câte 5p fiecare; II. câte 10p fiecare; III. câte 10p fiecare. Punctajul final se împarte la 10.

Timp de lucru: 50 de minute.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Am progresat în învățare prin parcurgerea acestui set de lecții	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitat înainte și după test pentru a îmbunătăți performanța

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x + 9$. Calculați $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

2. Reprezentați grafic funcțiile:

- a) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 9$;
- c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 8$;
- d) $f: \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 3|$;
- e) $f: (-2; 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$;
- f) $f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 7$;
- g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$;
- h) $f: [-4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$;
- i) $f: (-\infty; 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$;
- j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 0,5$.

3. Calculați $\text{Im}f$ pentru următoarele funcții:

- a) $f: \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x + 2$;
- b) $f: \{-1; 0; 2; 4; 5; 6\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 6$;
- c) $f: \{0; 4; 8; 12\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 - 2x$.

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0,5x + 3,5$. Calculați:

- a) $f(-1) + f(0) + f(1)$; b) $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(25)$;
- c) $f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(100)$.

5. Determinați punctele de intersecție ale graficului funcțiilor următoare cu axele de coordonate:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 9$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + 10$;
- c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 16$.

6. Determinați valoarea numărului real a pentru care $A \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$:

- a) $A(a; 1)$; b) $A(a; 2a)$; c) $A(2; a)$; d) $A(a + 2; a - 1)$;
- e) $A(2a + 1; 3 - a)$.

7. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ al cărei grafic conține punctele:

- a) $A(0; 4)$, $B(4; 0)$; b) $A(2; -3)$, $B(-1; 4)$;
- c) $A(-2; 4)$, $B(3; -6)$; d) $A(-4; 5)$, $B(2; 5)$.

8. Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor geometrice ale funcțiilor:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 4$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 3$.

9. Verificați dacă următoarele puncte sunt coliniare:

- a) $A(0; 7)$, $B(5; -18)$, $C(-5; 32)$;
- b) $A(5; -21)$, $B(-9; 21)$, $C(-5; 33)$;
- c) $A(1; 2)$, $B(3; -6)$, $C(-4; 5)$.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$. Determinați punctele de pe graficul funcției pentru care:

- a. abscisa este egală cu ordonata;
- b. ordonata este de două ori mai mică decât abscisa;
- c. dublul abscisei este cu 2 mai mare ca triplul ordonatei;
- d. suma dintre abscisă și ordonată este egală cu -4 ;

e. abscisa este egală cu 4;

f. abscisa și ordonata sunt direct proporționale cu numerele -3 și $8,5$;

g. abscisa este 20% din ordonată.

11. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + 4$.

a) Trasați graficul funcției f .

b) Determinați numărul real a pentru care coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor grafice ale celor două funcții să fie $A(1; 3)$.

c) Dacă $G_f \cap Ox = \{B\}$ și $G_g \cap Ox = \{C\}$, calculați aria și perimetrul triunghiului ABC . Care este natura triunghiului ABC ?

12. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Trasați graficul funcției f .

b) Determinați numerele reale a și b pentru care $A(0; 2) \in G_g$ și $B(-3; 2) \in G_g$.

c) Dacă $G_f \cap Ox = \{C\}$, calculați aria și perimetrul patrulaterului $OABC$. Care este natura patrulaterului $OABC$?

13. Determinați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$ și axele de coordonate.

14. Determinați tangenta unghiului ascuțit format de reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$ și axa Ox .

15. Determinați tangenta unghiului ascuțit format de reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$ și axa Oy .

16. Determinați distanța de la punctul $A(2; 0)$ la reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{3}x + 8$.

17. Calculați valoarea numărului real a pentru care reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 7(a + 2) + 7$ trece prin originea sistemului de axe.

18. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(1 - 2x)$.

a) Determinați funcția g și trasați graficele celor două funcții în același sistem de axe de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție al celor două reprezentări grafice.

19. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Calculați distanța de la punctul $A(-1; 0)$ la reprezentarea grafică a funcției.

c) Rezolvați inecuația $f(n) + n - \sqrt{3} \geq 0$ în mulțimea numerelor naturale.

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

*Dovedim prin logică,
dar prin intuiție descoperim.*



„Geometria este arta de a raționa corect
pe figuri incorecte.”

Henri Poincaré (1854–1912)

Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane



În clasele anterioare s-au studiat figuri geometrice precum triunghiul, patrulaterul sau cercul. Acestea sunt figuri *plane*, toate punctele lor fiind situate într-un același plan, motiv pentru care și desenarea lor pe foaia de hârtie (caiet) sau tablă se face sub *forma lor reală* sau *printr-un model al acesteia* (prin adaptare la dimensiunile foi de hârtie).

În *geometria în spațiu* studiem figuri pentru care nu toate punctele sunt situate în același plan. Să observăm, de exemplu, figura alăturată care reprezintă o carte. Folosind un echer și oricare dintre cărțile pe care le aveți pe birou (bancă) puteți constata imediat că tuturor *colțurilor* acesteia le corespund unghiuri drepte (coperta cărții este un dreptunghi). Folosind același echer, verificați dacă și *colțurile* figurii ce reprezintă coperta cărții sunt unghiuri drepte.

Prin desene pe foaia de hârtie putem reprezenta figuri pentru care nu toate punctele sunt situate în același plan, dar reprezentarea lor nu se mai poate face după aceleași reguli ca în cazul figurilor plane, adică păstrând prin desen *forma lor reală*.



Convenții și notații

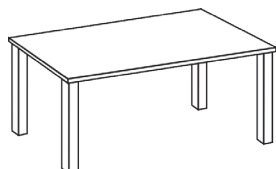
> Punctele A și B ocupă locuri diferite în planul hârtiei și de aceea le vom numi puncte *diferite* sau puncte *distincte*; notăm $A \neq B$.

Punctele P și E ocupă același loc și se numesc puncte *identice* sau *confundate* (sau spunem că ele coincid); notăm $P = E$.

> Dreptele următoare au fost notate a și d , iar dreapta a mai este notată și AB (numim dreapta a sau dreapta AB).



> Suprafața mesei reprezintă o *porțiune* dintr-un plan.



Ne amintim!

Punctul:

✓ este una dintre *noțiunile fundamentale* ale geometriei și poate fi descrisă ca fiind *urma lăsată pe hârtie de vârful unui creion foarte bine ascuțit* sau *ca înțepătura unui vârf de ac*;

✓ nu are dimensiune;

✓ reprezentarea prin desen se face în diverse moduri și se notează cu litere mari de tipar.

Cuvântul *punct* provine din limba latină: *punctum* = *înțepătură*, *punct*.

Dreapta:

✓ este o altă *noțiune fundamentală* a geometriei și poate fi descrisă ca un fir de ață foarte subțire și foarte bine întins, nemărginit și într-o parte și în cealaltă;

✓ este formată din puncte;

✓ reprezentarea prin desen se face cu ajutorul riglei (ca în figura alăturată) și se notează cu o literă mică sau cu două litere mari de tipar (două puncte distincte ale dreptei).



Planul:

✓ este tot o *noțiune fundamentală* a geometriei;

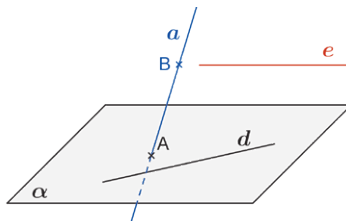
✓ suprafața mesei, a peretelui sau a geamului reprezintă *porțiuni* dintr-un plan, deci planul ar putea fi comparabil cu acestea dacă ne imaginăm că ele sunt *prelungite* la nesfârșit în toate direcțiile;

- ✓ nu are grosime și nici margini sau capete;
- ✓ este format din puncte;
- ✓ reprezentarea prin desen a unui plan se face printr-un *paralelogram* sau un *triunghi oarecare*; pentru notarea planului folosim, de obicei, litere mici ale alfabetului grecesc: α – alfa, β – beta, γ – gama, δ – delta etc.

Relații punct-plan, dreaptă-plan.

Un plan, la fel și o dreaptă, reprezintă o mulțime de puncte. În figura alăturată observăm:

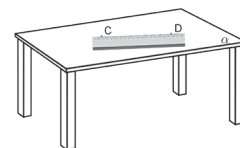
- un punct A situat în planul α , despre care spunem că *aparține* planului și scriem $A \in \alpha$, și un punct B care nu este situat în plan, despre care spunem că *nu aparține* planului și scriem $B \notin \alpha$;
- dacă în planul α desenăm o dreaptă d (sau orice altă figură geometrică), despre aceasta spunem că este *inclusă* în plan și notăm $d \subset \alpha$;
- dreptele a și e *nu sunt incluse* în planul α , notăm $a \not\subset \alpha$, respectiv $e \not\subset \alpha$;
- despre dreapta a , adică dreapta AB , spunem că este *secantă* la plan sau că *intersectează/întăpă* planul, observând că ea are punct comun cu planul, punctul A , $a \cap \alpha = \{A\}$, dar conține și punctul B care nu aparține planului;
- despre dreapta e , desenul sugerează că nu intersectează planul, caz în care spunem că dreapta este *paralelă* cu planul, $e \parallel \alpha$, și vom discuta acest aspect în lecțiile viitoare.



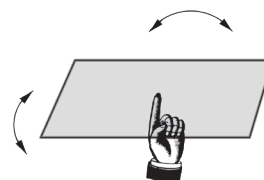
Activități practice

➤ Să notăm cu β planul peretelui pe care este situată tabla, P punctul reprezentat de unul dintre colțurile tablei, a dreapta corespunzătoare marginii superioare a tablei. Scrieți relațiile de legătură dintre punctul, dreapta și planul date. Identificați în jurul vostru un punct nesituat în planul β și două drepte care să nu fie incluse în acesta (dintre care una să întăpe planul).

➤ Marcați două puncte pe o masă și așezați o riglă a cărei margine să le conțină. Sunt și celelalte puncte ale marginii riglei în contact cu masa? Există vreun punct de pe marginea respectivă care să nu fie în contact cu masa?

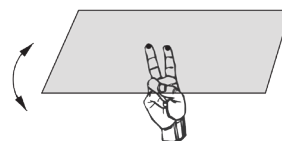


➤ Așezați o bucată de carton pe vârful unui deget și observați cum se poate mișca el, rămânând totuși în contact cu degetul. Obținem astfel foarte multe poziții posibile ale cartonului – o infinitate de plane care conțin punctul din vârful degetului. *Printr-un punct trec o infinitate de plane.*

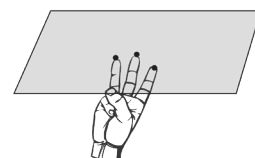


Reluați activitatea folosind două degete. Deși se limitează mișcarea cartonului, există tot o infinitate de plane care să conțină cele două puncte – corespunzătoare vârfurilor celor două degete.

Prin două puncte distincte trec o infinitate de plane.



Reluați activitatea folosind trei degete, așezate în așa fel încât punctele de contact cu cartonul să nu fie coliniare. Ce observați?



Axiome despre puncte/drepte/plan

A1. Axioma dreptei. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

- ✓ Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte.
- ✓ Axioma poate fi reformulată și astfel:

Două puncte distincte determină o dreaptă.

(Prin cuvântul *determină* înțelegem că dreapta este unică!)

A2. Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci dreapta este inclusă în plan.

Dacă $C \in \alpha$ și $D \in \alpha$, atunci $CD \subset \alpha$.

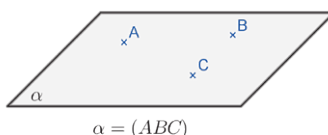
Dacă un plan conține două puncte ale unei drepte, atunci el conține toată dreapta.

A3. Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul.

Fiind date punctele necoliniare A , B și C , planul (unic) ce conține cele trei puncte se notează (ABC) .

Trei puncte necoliniare determină un plan.

(Prin cuvântul *determină* înțelegem că planul care le conține este unic!)



A4. Există patru puncte nesituate în același plan.

Despre patru sau mai multe puncte care nu sunt în același plan spunem că sunt *necoplanare*.



Activități practice

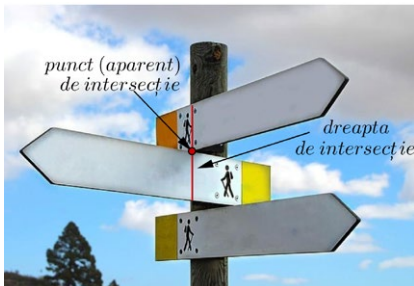
➤ Observați obiectul din imagine:



Este un trepied, pe care se poate monta un aparat de fotografiat/filmat. De ce credeți că este realizat din trei picioare și nu din patru?

TREPIÉD, *trepiede*, s.n. Scaun, suport sau stativ cu trei picioare. [Pr.: -pi-ed. - Pl. și: *trepieduri*] – Din fr. *trépied*. (*dexonline*)

➤ Observați imaginea:



Cele două indicatoare par să se intersecteze într-un punct, dar, mărind imaginar suprafețele celor două indicatoare, descoperim că intersecția lor este, de fapt, o dreaptă.



Activitate în perechi

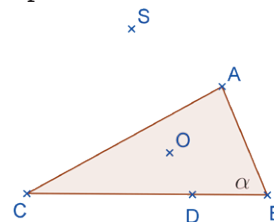
Considerăm două plane care au trei puncte comune. Discutați relația dintre cele două plane în contextul coliniarității sau necoliniarității celor trei puncte!



Exersăm împreună!

Dacă într-un plan sunt reprezentate patru puncte, oricare trei dintre ele necoliniare, notația planului se poate face cu oricare dintre cele trei puncte. Pot fi folosite în notație și toate cele patru puncte.

Planul α , reprezentat în figura alăturată sub forma unui triunghi, poate fi notat și $\alpha = (ABC) = (ABD) = (ACO) = \dots$, dar nu poate fi notat (BCD) deoarece cele trei puncte sunt coliniare. Punctul S nu aparține planului α , deci nu poate fi folosit în notația planului. Punctele S, A, B și C sunt necoplanare.



Observații

■ Observați tabla de pe peretele din fața clasei. Putem afirma că planul tablei *coincide* cu planul peretelui. Într-o astfel de situație, spunem că planele coincid (au toate punctele în comun).

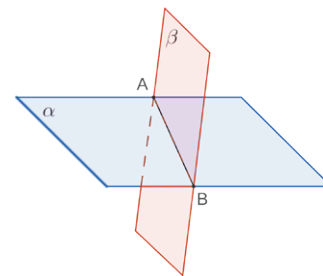
■ Observați peretele din fața voastră și tavanul. Sunt situate în același plan? Putem spune despre planul peretelui că *se intersectează* cu planul tavanului, intersecția lor fiind dreapta reprezentată de *muchia* de îmbinare dintre perete și tavan. În acest caz, planul tavanului și planul peretelui sunt *distincte* (nu au toate punctele în comun).

■ Două plane distincte pot avea puncte în comun sau niciun punct în comun, dar niciodată toate punctele în comun!

A5. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun.

În fapt, dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.

Dacă $\alpha \neq \beta$ (plane distincte) și $A \in \alpha \cap \beta$, atunci există și un alt punct $B \in \alpha \cap \beta$. În acest caz $\alpha \cap \beta = AB$.



Atenție!

Deși din activitatea și rezultatul anterior putem concluziona că două plane pot să coincidă sau să fie concurente (intersecția lor fiind o dreaptă), acest lucru nu exclude faptul că pot exista și plane care nu au niciun punct comun – de exemplu planul peretelui din stânga și cel al peretelui din dreapta voastră (sau față/spate, respectiv sus/jos). Astfel de plane se numesc *plane paralele* și vom discuta despre ele în lecțiile viitoare.



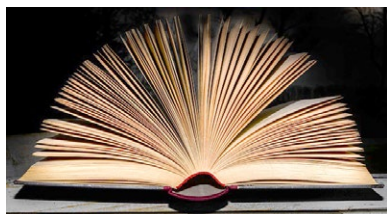
Ne amintim!

În clasa a VI-a ați învățat și Axioma lui Euclid:

A6. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură paralelă la dreapta dată.

Determinările planului

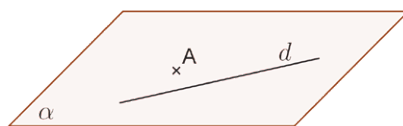
Conform A3., *trei puncte necoliniare determină un plan.*



Luați o carte de pe masă și priviți cotorul ei ca și cum ar fi o dreaptă d . Deschideți coperta în diferite poziții. Constatăm astfel existența mai multor plane (o infinitate chiar) care conțin dreapta d .

Există o infinitate de plane care conțin o aceeași dreaptă.

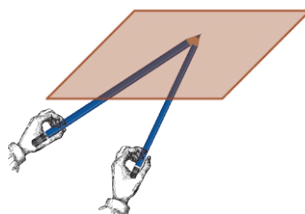
Dacă fixăm un punct A , care nu este situat pe dreapta d , și ne propunem ca din multitudinea de plane care se obțin să le alegem pe cele care conțin și acest punct, constatăm că există un singur astfel de plan.



Planul determinat de dreapta d și punctul A , $A \notin d$, se notează (d, A) .

Proprietatea 1. *O dreaptă și un punct care nu-i aparține determină un plan.*

Luați un creion și încercați să așezați un carton pe el. Luați două creioane și așezați-le astfel încât vârfurile lor să se atingă. Rugați un coleg să așeze cartonul pe cele două creioane. Ce observați?



Repetăți experimentul, dar așezați cele două creioane astfel încât ele să fie paralele. Ce observați?

Proprietatea 2. *Două drepte concurente determină un plan.*

Proprietatea 3. *Două drepte paralele determină un plan.*

Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ sau $d_1 \parallel d_2$, atunci planul determinat de ele se notează (d_1, d_2) .



Rețineți!

Două drepte care determină un plan pot fi:

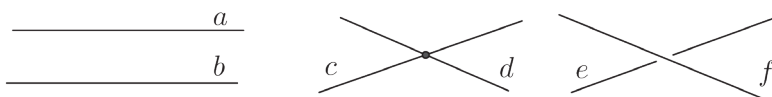
- ✓ *concurente* – intersecția lor este un punct;
- ✓ *paralele* – intersecția lor este mulțimea vidă.

Când dreptele nu mai sunt în același plan, apare și o a treia situație, cea a dreptelor *necoplanare*.



Observații

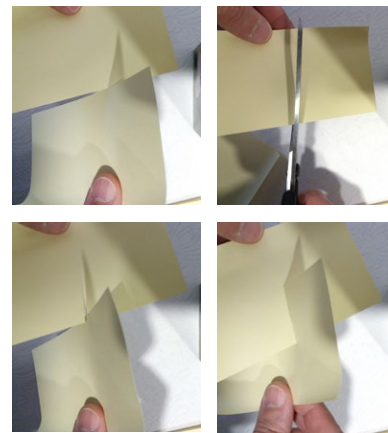
În figura următoare sunt reprezentate dreptele paralele a și b , dreptele concurente c și d și dreptele necoplanare e și f . Modul în care sunt reprezentate cele două drepte necoplanare sugerează că dreapta e este în spatele dreptei f .



Activitate în perechi

➤ Cu ajutorul a două coli de hârtie, sugerați diferite tipuri de intersecție a două plane.

➤ Urmăriți șirul următor de poze. A fost aceasta una dintre ideile pe care le-ați avut la activitatea anterioară?



Acum știm, deci putem rezolva!

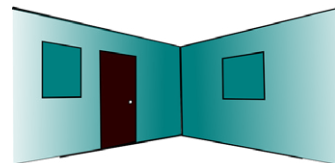
Stabiliți care dintre următoarele propoziții sunt adevărate, precizând fie contextul teoretic prezentat anterior în baza căruia ați decis, după exemplul dat, fie oferind un exemplu sau contraexemplu:

- a) (Exemplu) Oricare două puncte sunt coliniare. *Propoziție adevărată, A1.*
- b) Oricare două puncte determină o dreaptă.
- c) Oricare trei puncte sunt coliniare.
- d) Oricare trei puncte sunt coplanare.
- e) Există patru puncte coliniare.
- f) Există patru puncte coplanare.
- g) Dacă trei puncte sunt coplanare, atunci ele sunt coliniare.
- h) Dacă patru puncte sunt coplanare, atunci trei dintre ele sunt coliniare.



Activitate practică

Privind sala de clasă, am putea vorbi despre dreapta corespunzătoare muchiei dintre perețele cu ușă și tavan și cea corespunzătoare muchiei dintre peretele alăturat și podea. Este evident că nu sunt nici concurente și nici paralele, ele fiind drepte necoplanare. Evidențiați și alte perechi de drepte necoplanare din sala de clasă!





Activitate în cooperare

- Colaborați pentru a justifica cele trei proprietăți anterioare folosind A3.
- Discutați și formulați completarea corectă a enunțului: dacă dreptele d_1 și d_2 sunt astfel încât $d_1 \cap d_2 = \emptyset$, atunci
- Colaborați și caracterizați rezultatul intersecției dintre o dreaptă și un plan. Exemplificați fiecare caz cu ajutorul unui creion pe post de dreaptă și a unei foi de hârtie pe post de plan.
- Dați exemple din realitate care să sugereze relațiile învățate dintre punct-plan, dreaptă-plan și plan-plan.
- Ați înțeles că, în matematică, a determina un obiect înseamnă a-l descrie prin acele elemente care-l fac unic. Întrebați profesorul de biologie ce determină o ființă? Gândiți-vă la obiecte studiate la alte discipline și analizați-le din punct de vedere al ideii de determinare a lor.

Exersăm împreună!

Considerăm punctele necoplanare A, B, C și D .

- Justificați faptul că, oricare trei dintre puncte am alege, acestea nu pot fi coliniare.
- Dați două exemple de drepte concurente determinate de câte două dintre cele patru puncte.
- Dreptele AC și BD sunt coplanare? Argumentați răspunsul. Comparați argumentele între voi.
- Câte plane distincte determină aceste puncte?

Soluție:

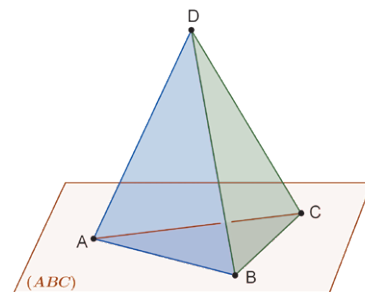
a) Dacă trei dintre puncte ar fi coliniare, ele ar forma o dreaptă d , iar aceasta, împreună cu al patrulea punct, ar determina un plan și deci cele patru puncte ar fi coplanare.

b) De exemplu: AB cu AC , BD cu CD .

c) Nu. Dacă AC și BD ar fi coplanare am obține că cele patru puncte sunt coplanare.

d) Oricare trei dintre cele patru puncte sunt necoliniare, deci determină câte un plan. În desenul alăturat am evidențiat planul (ABC) (cel orizontal), planul (DAB) – albastru, planul (DBC) – verde. Planul (DAC) este în spatele celor două plane colorate.

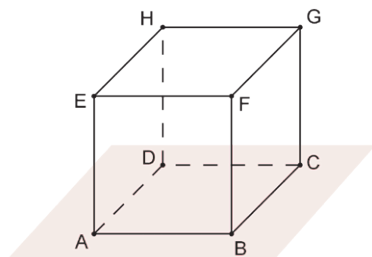
Observație: afirmând că am evidențiat planul (DAB) , nu vom înțelege că planul corespunde doar punctelor suprafeței triunghiulare DAB !



Convenții de reprezentare a figurilor în spațiu

Atunci când realizăm un desen în spațiu considerăm planul caietului, la fel ca atunci când ne-am referit la planul tablei ca fiind plan vertical. Atunci când reprezentăm (desenăm) o figură care este inclusă într-un astfel de plan (vertical), aceasta se desenează după regulile studiate în clasele anterioare. Dacă un segment este inclus sau paralel cu planul vertical se reprezintă în forma lui reală, iar dacă este într-un plan orizontal sau oblic în raport cu planul vertical se reprezintă într-un anumit raport de mărime în comparație cu forma reală (cu o lungime mai mică!).

Despre un cub știm că are toate fețele pătrate. Observați pe figura de la exemplul următor modul în care a fost desenat fiecare dintre pătratele care reprezintă fețele cubului. Planul evidențiat în desen reprezintă un plan orizontal în raport cu planul vertical al hârtiei.

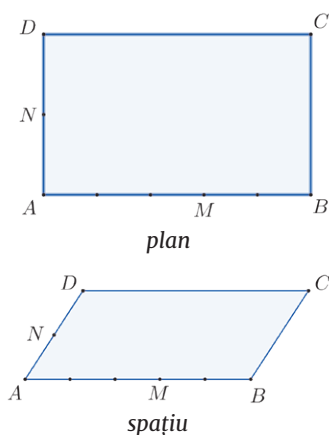


➤ Să observăm figura alăturată în care este reprezentat cubul $ABCDEFGH$:

✓ Unghiul drept EAB al feței pătrate $ABFE$ (considerat în plan vertical) este desenat ca în cazul desenării în plan, însă unghiul drept HEF al feței pătrate $HEFG$ (considerat în plan orizontal) este desenat ca un unghi ascuțit, iar unghiul drept EFG este desenat ca un unghi obtuz; deci un unghi drept, desenat în spațiu, nu își păstrează forma de unghi drept decât dacă face parte dintr-un plan vertical.

✓ Pătratul $ABFE$ este desenat exact ca în cazul desenării în plan, dar pătratul $EFGH$ este desenat ca un paralelogram; deci un pătrat desenat în spațiu poate avea ca reprezentare un paralelogram.

✓ Laturile AD , DC și DH nu se văd pentru că sunt în spatele planului (ABF) , deci sunt desenate punctat (linie întreruptă).



➤ În figura alăturată am desenat un dreptunghi $ABCD$ în cele două variante: în plan (plan vertical) și în spațiu (în cazul poziționării sale într-un plan care nu este vertical).

✓ Dacă o figură are două laturi paralele, ele vor fi desenate tot paralele atunci când desenăm în spațiu – de exemplu $AB \parallel CD$.

✓ Dacă două laturi sunt și paralele și congruente, ele vor fi tot congruente și în cazul desenului în spațiu – de exemplu $AB \equiv CD$.

✓ Dacă un punct împarte un segment într-un raport dat, atunci regula de desenare se va păstra în cazul desenului în spațiu – punctul M este astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$ pe ambele desene, iar punctul N este mijlocul segmentului AD pe ambele desene.

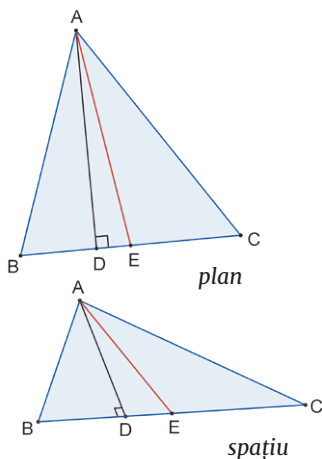
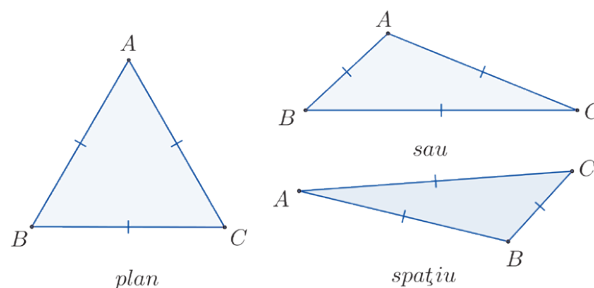
➤ Triunghiul echilateral:

✓ În reprezentarea sa în spațiu, aflându-se într-un plan care nu este vertical, se recomandă desenarea ca un triunghi oarecare, nu foarte înalt.

✓ Nu este importantă ordinea de notare a vârfurilor, dar poate depinde de contextul propus.

✓ Observăm că laturile congruente nu rămân toate congruente și pe desenul în spațiu, dar nu este obligatoriu acest lucru.

✓ Proprietățile figurilor geometrice sunt cele care ajută în reprezentarea figurilor în geometria în spațiu. De exemplu, dacă dorim să reprezentăm o înălțime a triunghiului echilateral vom ține cont că ea este și mediană.

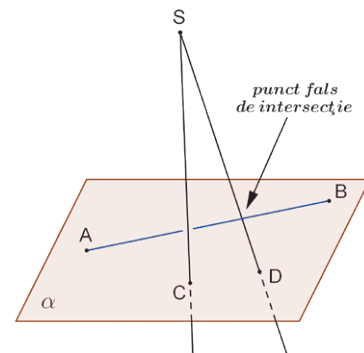


➤ În figura alăturată este desenat triunghiul oarecare ABC în cele două situații, plan (sus) și spațiu (jos). AD este înălțime și AE este mediană.

✓ După cum am spus și mai sus, punctul E , mijlocul laturii BC , se desenează în ambele cazuri în același mod – prin măsurarea segmentului și împărțirea acestuia în două segmente congruente.

✓ În cazul înălțimii AD , în plan desenarea ei se face cu ajutorul echerului (așa cum s-a învățat în clasele anterioare). Pentru desenarea în spațiu nu se mai ține cont de echer, dar se păstrează notația aproximativă care sugerează că AD este înălțime.

➤ În figura alăturată, punctele A, B, C și D sunt situate într-un plan α , iar punctul $S \notin \alpha$. Observăm pe desen cum dreptele SD și AB par să se intersecteze. Dacă cele două drepte s-ar intersecta într-un punct O , atunci dreapta DO ar fi inclusă în planul α și, implicit, punctul S ar aparține planului. Pentru evitarea apariției acestor *puncte false de intersecție*, se recomandă reprezentarea dreptei care se află în spate cu întrerupere – observați reprezentarea dreptei AB prin *spatele* dreptei SC . Observați, de asemenea, apariția unor părți de linie punctată pentru dreptele SC și SD pentru a sugera partea de dreaptă situată sub planul α .

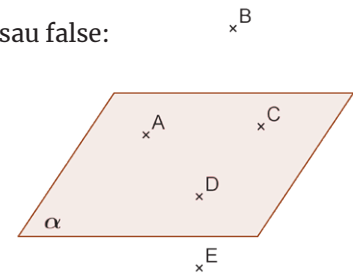


Observație: Toate aceste reguli permit desenarea pe suprafețe plane a unor configurații geometrice spațiale, astfel încât să redea cât mai aproape de realitate „ceea ce vede ochiul”. Pentru a sugera spațialitatea, este utilă folosirea liniilor punctate pentru a marca „ce nu se vede, dar există”.

Exersați

1. Pentru desenul alăturat stabiliți care dintre următoarele relații sunt adevărate sau false:

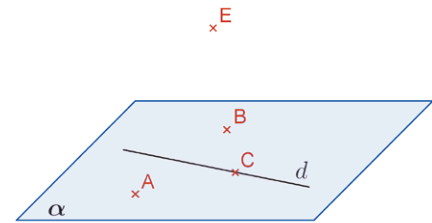
- a) $A \in \alpha$; b) $B \in \alpha$;
 c) $C \in \alpha$; d) $D \in \alpha$;
 e) $E \notin \alpha$; f) $AB \subset \alpha$;
 g) $CD \subset \alpha$; h) $CE \not\subset \alpha$;
 i) $BE \cap \alpha \neq \emptyset$.



2. Reprezentați printr-un desen:

- a) planul α , punctele $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ și dreapta AB . Este dreapta $AB \subset \alpha$? De ce?
 b) planul β , punctele $M \in \beta$, $N \notin \beta$ și dreapta MN . Este dreapta $MN \subset \alpha$? De ce?
 c) planul δ , dreapta d și punctele A, B și C , astfel încât $d \subset \delta$, $A \in d$, $B \in d$ și $C \notin \delta$. Pot fi punctele A, B și C coliniare?
 3. Observați figura alăturată și completați spațiile cu unul dintre semnele $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ pentru a obține relații adevărate:

- a) $A \dots \alpha$; b) $A \dots d$;
 c) $C \dots \alpha$; d) $E \dots \alpha$;
 e) $E \dots d$; f) $d \dots \alpha$;
 g) $AC \dots \alpha$; h) $B \dots EC$;
 i) $EA \dots \alpha$.



4. Considerăm patru puncte necoplanare. Demonstrați că ele nu pot fi coliniare.

5. Considerăm patru puncte distincte.

- a) Determinați numărul minim și numărul maxim de drepte diferite determinate de câte două dintre cele patru puncte.
 b) Determinați numărul minim și numărul maxim de plane diferite determinate de câte trei dintre cele patru puncte.

6. Într-un plan α considerăm punctele A, B, C și D distincte, iar în afara acestuia un punct E .

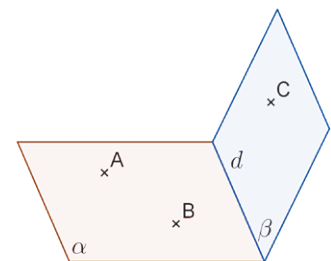
- a) Care este numărul minim și care este numărul maxim de plane (exceptând planul α) determinate de câte trei dintre cele 5 puncte?
 b) Există posibilitatea să obținem exact trei plane?

7. Considerăm dreptele concurente a și b și punctele $A \in a$ și $B \in b$. Demonstrați că mijlocul C al segmentului AB aparține planului determinat de cele două drepte.

8. Considerăm dreptele paralele a și b și punctele $A \in a$ și $B \in b$. Demonstrați că dreapta AB este inclusă în planul determinat de cele două drepte.

9. Observați figura alăturată (în care planele α și β sunt distincte) și completați spațiile punctate pentru a obține relații adevărate:

- a) $A \dots \alpha$; b) $C \dots \alpha$;
 c) $AB \dots \alpha$; d) $\alpha \cap \beta = \dots$;
 e) $CB \cap \beta = \dots$; f) $AC \cap \alpha = \dots$;
 g) $(ABC) \cap \alpha = \dots$; h) $(d, C) \dots \beta$;
 i) $(d, AB) \dots \alpha$.



10. Dacă dreptele a și b sunt coplanare și dreptele b și c sunt coplanare, rezultă în mod necesar că dreptele a și c sunt coplanare?

11. Intersecția planelor distincte α și β este dreapta d , iar punctul A este situat în ambele plane. Demonstrați că $A \in d$.

12. Trei drepte distincte se intersectează două câte două în puncte distincte. Demonstrați că cele trei drepte sunt coplanare.

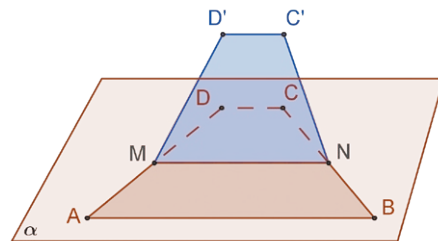
13. Trei drepte distincte au un punct comun. Sunt ele coplanare?

14. Reprezentați printr-un desen:

- a) un plan α , dreapta $d \subset \alpha$, punctele A și B în planul α , de o parte și de alta a dreptei d ;
- b) un plan α , punctele A și B de aceeași parte a planului α astfel încât dreapta AB intersectează planul în punctul O ;
- c) un plan α , punctele A și B de o parte și de alta a planului α astfel încât dreapta AB intersectează planul în punctul O .

15. Decupați dintr-o foaie de hârtie un triunghi ABC . Îndoți decupajul foi de hârtie (fără a o plia) după linia mijlocie MN , $M \in AB$ și $N \in AC$. Punctele B , C și A obținute după îndoire sunt coplanare? Reprezentați printr-un desen, notând cu A' poziția punctului A după îndoire.

16. Decupați dintr-o foaie de hârtie un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$. Îndoți decupajul foi de hârtie (fără a o plia) după linia mijlocie MN , $M \in AD$ și $N \in BC$. Notăm cu C' și D' pozițiile punctelor C , respectiv D după îndoire. Demonstrați că punctele A , B , C' și D' sunt coplanare.

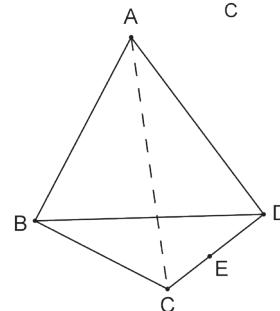
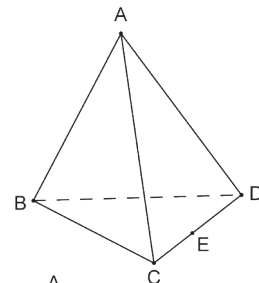


17. Reprezentați prin câte un desen fiecare dintre cerințele următoare, apoi comparați desenele explicându-vă asemănările și diferențele:

- a) triunghiul dreptunghic ABC , $\angle B = 90^\circ$, inclus într-un plan α ;
- b) triunghiul echilateral MNP inclus într-un plan α ;
- c) pătratul $BCDE$, inclus într-un plan α ;
- d) triunghiurile ABC și BCD , situate în plane diferite; demonstrați că punctele A , B , C și D sunt necoplanare;
- e) pătratul $ABCD$, situat într-un plan vertical și dreptunghiul $CDEF$, situat într-un plan orizontal; demonstrați că punctele A , B , E și F sunt coplanare;
- f) trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, situat într-un plan vertical și dreptunghiul $CDEF$, situat într-un plan orizontal; demonstrați că punctele A , B , E și F sunt coplanare.

18. În figura alăturată, punctele A , B , C și D sunt necoplanare, iar punctul $E \in CD$. Desenați pe caiet figura și completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

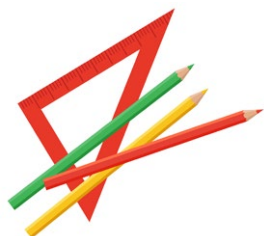
- a) $(ABC) \cap (BCD) = \dots$;
- b) $(ABC) \cap (ABD) = \dots$;
- c) $(ABE) \cap (ACD) = \dots$;
- d) $(ACE) \cap (ADE) = \dots$;
- e) $(ABE) \cap (ACD) \cap (BCD) = \dots$



19. Observați desenul alăturat, precum și pe cel al problemei anterioare. Analizați, din punct de vedere al perspectivei, cele două desene. Precizați, în fiecare caz, care este planul sau care sunt planele care sunt în față/spate.

Activitate practică

Considerăm un echer și notăm vârfurile lui cu A , B și C . Așezăm echerul pe planul mesei, notat α , astfel încât punctele B și C să fie pe masă, iar A să fie în afara planului mesei. Realizați un desen care să reprezinte această situație și precizați pozițiile dreptelor suport ale laturilor echerului în raport cu planul α .



Corpuri geometrice



Știați că?

Cuvântul *poliedru* provine din cuvintele grecești *poly* (multe) și *hedron* (bază), *hedra* (față).

Un *poliedru* este un corp geometric mărginit numai de fețe plane. Poliedrul este o construcție tridimensională formată din *fețe poligonale* plane. Aceste fețe se intersectează în *muchii*, care, la rândul lor, se intersectează în *vârfuri*. Putem afirma despre poliedru că este echivalentul tridimensional al *poligonului* (care este o formă bidimensională).

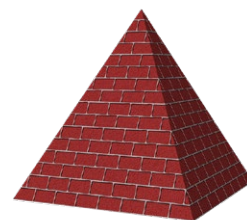
Cele mai cunoscute corpuri geometrice sunt:



Cubul



Paralelipipedul



Piramida

Deși nu sunt poliedre, tot cunoscute sunt și următoarele corpuri, numite *corpuri rotunde* (se pot rostogoli pe o suprafață plană – în cazul cilindrului și al conului, se pot rostogoli dacă sunt *culcate*)



Cilindrul



Conul



Sfera



Q Observații

Corpurile rotunde se pot obține prin rotirea unei figuri plane în jurul unei drepte (axe), de aceea ele se mai numesc și *corpuri de rotație*. Observați în imaginea alăturată o *roată a olarului* care este folosită pentru fabricarea, din lut, a unor obiecte *rotunde*.

Piramida

Exersăm împreună!

Considerăm un patrulater $ABCD$ situat într-un plan α și un punct V care nu aparține planului. Numiți toate planele care sunt determinate de câte o latură a patrulaterului și punctul V .

Rezolvare:

✓ Planul determinat de dreapta AB și punctul V este planul (AB, V) pe care îl putem nota și (VAB) .

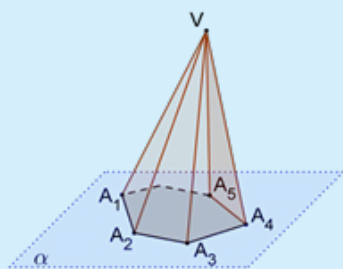
✓ Celelalte trei plane: $(BC, V) = (VBC)$, $(CD, V) = (VCD)$ și $(AD, V) = (VAD)$.

Observație

Corpul geometric delimitat de planul α și de cele patru plane determinate mai sus este o *piramidă*, în acest caz numită *piramidă patrulateră*.

Definiție

Considerăm un poligon $A_1A_2A_3\dots A_n$ situat într-un plan α și un punct V care nu aparține planului α . Corpul geometric delimitat de planul α și de planele (VA_1A_2) , (VA_2A_3) , ..., (VA_nA_1) se numește *piramidă de vârf V și bază $A_1A_2A_3\dots A_n$* și se notează $VA_1A_2A_3\dots A_n$.



Poligonul $A_1A_2A_3\dots A_n$ se numește *baza piramidei*, iar punctul V se numește *vârful piramidei*.

O suprafață triunghiulară delimitată de vârful piramidei și de două vârfuri alăturate ale poligonului bazei se numește *față laterală*. Totalitatea fețelor laterale formează *suprafața laterală* a piramidei.

În notația unei piramide, prima literă corespunde vârfului piramidei.

Tipul unei piramide este dat de tipul poligonului bazei: bază triunghi – piramidă triunghiulară, bază hexagon – piramidă hexagonală etc.

Exemplu. Piramida obținută la aplicația de la începutul lecției este o *piramidă patrulateră*, deoarece baza piramidei este patrulaterul $ABCD$.

Elementele unei piramide

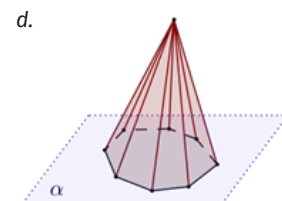
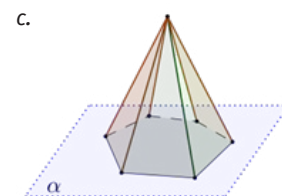
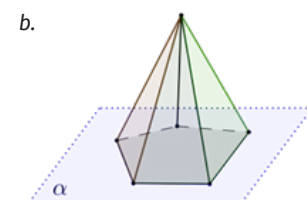
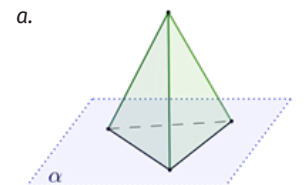
Referitor la piramida reprezentată în desenul alăturat, avem:

- ✓ vârfuri: V – vârful piramidei; $A, B, C, \dots$ – vârfurile bazei;
- ✓ baza piramidei – suprafața delimitată de poligonul $ABCD, \dots$;
- ✓ muchii: – laterale: $VA, VB, VC, \dots$ (ca segmente);
– ale bazei: $AB, BC, CD, \dots$ (laturile poligonului bazei);
- ✓ fețe laterale – suprafețe triunghiulare delimitate de: $\triangle VAB, \triangle VBC, \triangle VCD, \dots$

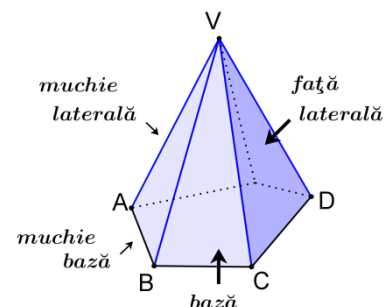


Exemple

Observați în cele ce urmează exemple de piramide care se pot obține pornind, în planul α , cu un alt tip de poligon decât cel de tip patrulater.



Numiți piramidele corespunzătoare celor 4 cazuri, observând la fiecare dintre ele tipul poligonului de la bază.





Știați că?

Cuvântul *tetraedru* provine din cuvintele grecești *tetra* (patru) și *hedron* (bază), *hedra* (față); *tetraedru* – corp mărginit de patru fețe.



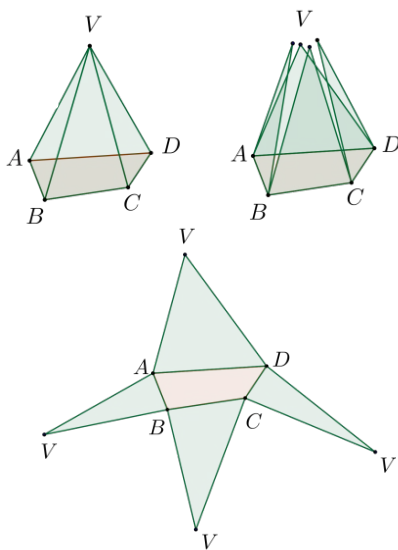
Activitate practică

Pe grupe de elevi, sub coordonarea profesorului, construiți din carton, prin decupare și lipire, câte o piramidă triunghiulară (tetraedru), piramidă patrulateră, piramidă pentagonală, piramidă hexagonală.



Observații

Suprafața laterală a unei piramide se poate desfășura în plan. Observați figura următoare și precizați segmente congruente pe desfășurarea reprezentată pe ultimul desen.



➤ Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are:

- ✓ baza pătratul $ABCD$;
- ✓ $VA \equiv VB \equiv VC \equiv VD$;
- ✓ $\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$ și $\triangle VDA$ triunghiuri isoscele;
- ✓ $\triangle VAB \equiv \triangle VBC \equiv \triangle VCD \equiv \triangle VDA$.

Definiție

O piramidă triunghiulară se numește *tetraedru*.

- ✓ Tetraedrul este poliedrul cu cel mai mic număr de fețe.
- ✓ Prin răsturnarea unui tetraedru pe oricare dintre fețe, *imaginea* corpului obținut este tot cea a unui tetraedru, nu neapărat cu același aspect (spre deosebire, de exemplu, de o piramidă patrulateră).
- ✓ Oricare dintre fețele tetraedrului poate fi considerată *bază*, vârful ce nu aparține acesteia reprezentând *vârful piramidei*.

Exersăm împreună!

Observând piramidele desenate și modelele construite de voi pe parcursul lecției, completați în caiete un tabel de tipul următor (tabelul se poate extinde la mai multe tipuri de piramide):

Piramidă ...	Număr de vârfuri	Număr de muchii laterale	Număr de muchii ale bazei	Număr de fețe
... triunghiulară				
... patrulateră				
... hexagonală				

Piramida regulată, tetraedrul regulat

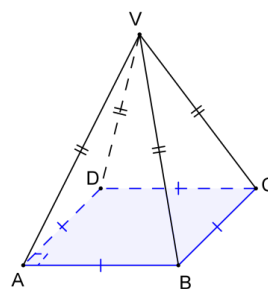


Activitate practică

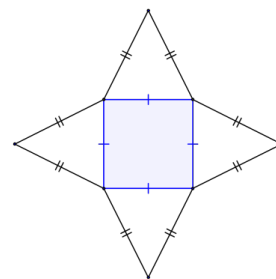
Pe un carton desenați un pătrat cu latura de 6 cm și, în exteriorul lui, 4 triunghiuri isoscele cu lungimea laturilor congruente de 8 cm. Decupați și îndoiți cartonul pentru a obține o piramidă patrulateră. Comparând cu piramidele patrulatere despre care am vorbit până acum, ce caracteristici are în plus această piramidă?

Definiție

Se numește *piramidă regulată* o piramidă cu baza poligon regulat și cu muchiile laterale congruente.

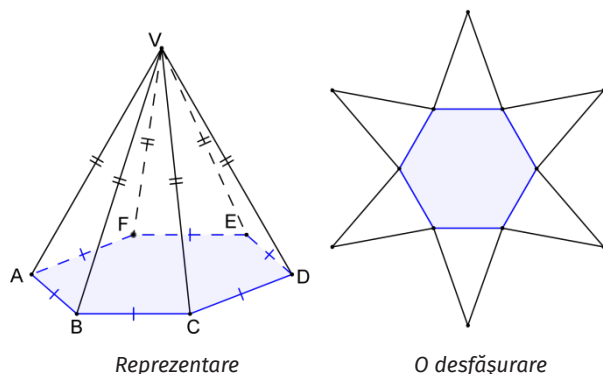
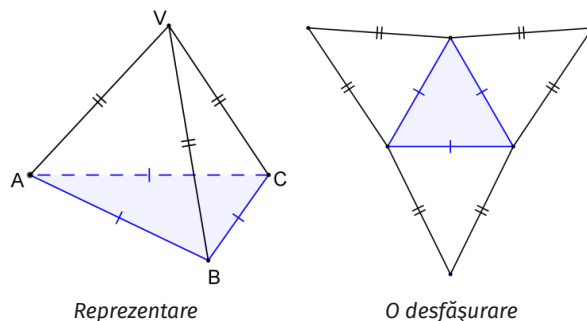


Reprezentare



O desfășurare

- Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are:
- ✓ baza triunghiul echilateral ABC ;
 - ✓ $VA \equiv VB \equiv VC$;
 - ✓ $\triangle VAB$, $\triangle VBC$ și $\triangle VCA$ triunghiuri isoscele;
 - ✓ $\triangle VAB \equiv \triangle VBC \equiv \triangle VCA$.



- Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ are:
- ✓ baza hexagonul regulat $ABCDEF$;
 - ✓ $VA \equiv VB \equiv VC \equiv VD \equiv VE \equiv VF$;
 - ✓ $\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCD$, $\triangle VDE$, $\triangle VEF$, $\triangle VFA$ triunghiuri isoscele;
 - ✓ $\triangle VAB \equiv \triangle VBC \equiv \triangle VCD \equiv \triangle VDE \equiv \triangle VEF \equiv \triangle VFA$.

Prin desfășurarea unui poliedru înțelegem figura plană corespunzătoare tuturor fețelor poliedrului ce poate fi obținută prin decupare.



Descoperiți!

Colaborați la nivelul clasei și justificați afirmația:

Într-o piramidă regulată, oricare două fețe laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.

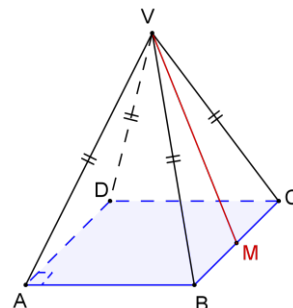
Identificați cazul de congruență folosit.

Definiție

Se numește *apotemă a unei piramide regulate* distanța de la vârful piramidei la oricare dintre laturile bazei.

Exemplificând pentru piramida patrulateră regulată $VABCD$ din reprezentarea alăturată, avem:

- ✓ Segmentul VM , cu proprietatea că $VM \perp BC$, $M \in BC$, reprezintă apotema piramidei.
- ✓ *Apotema piramidei* este și înălțime în triunghiul corespunzător feței laterale (cea construită din vârful piramidei la o latură a bazei acesteia).
- ✓ Având în vedere că fețele laterale ale unei piramide regulate sunt congruente, nu contează pe care față construim apotema acesteia (reprezintă segmente congruente).
- ✓ Punctul M este mijlocul segmentului BC . Justificați!



Activitate practică

Realizați din carton o piramidă după una dintre formele de mai sus, apoi vopsiți toate fețele acestuia. Până la uscarea vopselei, aplicați ca o ștampilă baza pe o foaie de hârtie de dimensiuni corespunzătoare, apoi, menținând câte o muchie a bazei ca muchie de contact, înclinați pe rând fețele laterale până la contactul cu foaia pe care se va impregna urma lor. Ce reprezintă urma lăsată de corp pe foaia de hârtie?



Activitate practică

Materiale necesare: o coală de flipchart, un ghem de sfoară, o greutate – un fir cu plumb sau similar (întrebați părinții...).

Persoane necesare – minimum 5 elevi.

Desenați pe foaia de flipchart un pătrat $ABCD$ cu latura de 0,75 m, diagonalele acestuia și centrul – punctul O . Pregătiți 5 bucăți de sfoară, una de aproximativ 1 m, celelalte mai lungi (cel puțin 1,5 m), pe care le legați într-un nod comun. La celălalt capăt al bucății de sfoară de 1 m legați greutatea. Un elev poziționează greutatea deasupra punctului O astfel încât sfoara să fie bine întinsă, iar alți 4 elevi întind celelalte bucăți de sfoară până când ajung în vârfurile pătratului, tăind surplusul. Măsurând cele patru bucăți de sfoară puteți constata că lungimile lor sunt egale (sau aproximativ egale, ținând cont de erorile de măsurare). Notând cu V poziția, în spațiu, a nodului comun al celor cinci bucăți de sfoară, putem afirma că VA , VB , VC și VD reprezintă muchiile laterale ale unei piramide patrulateră regulate $VABCD$. Bucata de sfoară cu greutatea, adică VO , reprezintă așa-numita înălțime a piramidei, despre care vom vorbi în lecțiile următoare. Repetați experimentul, schimbând tipul bazei piramidei: într-un caz baza piramidei să fie un triunghi echilateral, iar în alt caz baza să fie un hexagon regulat. Recapitulați din clasa a VII-a noțiunile necesare.



Activitate în cooperare

Discutați la nivelul clasei și realizați câte un tabel echivalent celui alăturat pentru desenarea unei piramide triunghiulare regulate și a unei hexagonale regulate.

Atenție! Aveți în vedere utilizarea liniilor punctate pentru muchiile și celelalte segmente construite care *nu se văd*. Rețineți, de asemenea, modul în care determinați poziția centrului triunghiului echilateral și a centrului hexagonului regulat!



Portofoliu

Realizați, individual, câte o fișă pentru fiecare dintre cele trei tipuri de piramide regulate și păstrați-le în **portofoliul personal**. Aveți în vedere să le completați pe parcursul anului școlar cu noile informații pe care le aflați despre piramida regulată.



Exersăm împreună!

În piramida patrulateră regulată $VABCD$ toate muchiile sunt congruente. Se știe că suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este egală cu 48 cm. Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

i. Lungimea unei muchii a piramidei este egală cu:

- a) 12 cm; b) 8 cm; c) 6 cm; d) nu se poate determina.

ii. Apotema piramidei este egală cu:

- a) 6 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm; c) $3\sqrt{3}$ cm; d) 3 cm.

Rezolvare.

i. O piramidă patrulateră are 8 muchii; cum, în cazul nostru, toate sunt congruente, obținem că lungimea unei muchii este egală cu $48:8 = 6$ cm. Răspuns: c)

ii. Fie VM , $M \in BC$, apotema piramidei. Aplicând *teorema lui Pitagora* în triunghiul VBM obținem $VM = 3\sqrt{3}$. Răspuns: c).

Observație.

Din aplicația practică alăturată deducem că vârful unei piramide patrulateră regulate se află exact *deasupra centrului poligonului regulat de la baza piramidei* (adică se află pe o linie verticală ridicată din centrul poligonului desenat într-un plan orizontal). Plecând de la această idee, să observăm mai jos pașii parcurși în desenarea unei piramide patrulateră regulate.

I. Desenăm baza, pătratul $ABCD$ și centrul acestuia.	II. Ridicăm din punctul O o linie punctată (verticală).	III. Considerăm punctul V pe linia desenată anterior și unim cu vârfurile pătratului.



Reflectăm!

Deși baza este pătrată, pentru desenul acesteia s-a utilizat un paralelogram. Priviți de la distanță suprafața pe care o reprezintă tăblia băncii și veți vedea o imagine deformată a dreptunghiului pe care tăblia îl are ca formă în realitate!

Definiție

Un tetraedru în care toate muchiile sunt congruente se numește *tetraedru regulat*.

Un tetraedru regulat este o piramidă triunghiulară regulată în care muchiile laterale sunt congruente cu muchiile bazei.

Toate fețele unui tetraedru regulat sunt triunghiuri echilaterale.

Exersăm împreună!

Piramida triunghiulară regulată $VABC$, de vârf V și bază $\triangle ABC$, are suma lungimilor muchiilor de 36 cm și $AB = 6$ cm. Arătați că $VABC$ este tetraedru regulat.

Rezolvare.

$AB = AC = BC = 6$ și $VA = VB = VC$, deci $3 \cdot VA + 18 = 36 \Leftrightarrow VA = 6$ cm

Așadar toate muchiile sunt egale, deci $VABC$ este tetraedru regulat.

Știați că?

Există numai 5 tipuri de poliedre care au toate fețele poligoane regulate congruente – *solide platonice*:



Tetraedru regulat
4 fețe – triunghiuri
echilaterale



Cub (hexaedru)
6 fețe – pătrate



Octaedru regulat
8 fețe – triunghiuri
echilaterale



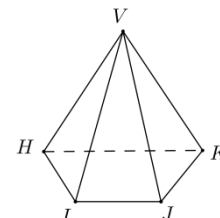
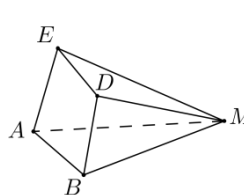
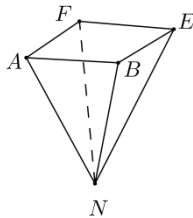
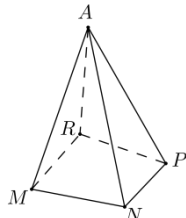
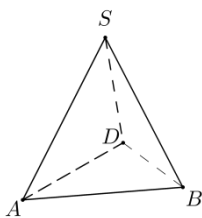
Dodecaedru regulat
12 fețe – pentagoane
regulate



Icosaedru regulat
20 de fețe – triun-
ghiuri echilaterale

Exersați

1. Observați corpurile geometrice desenate și completați pe caiete un tabel de tipul următor, cu câte o linie pentru fiecare imagine, în ordine, de la stânga la dreapta:



Numele	Vârful	Baza	Notația
Piramidă triunghiulară	S	ABD	SABD
...			

2. Completați un tabel de tipul următor cu elemente corespunzătoare piramidei alăturată.

V	...	...	un vârf al bazei	...
...	o muchie laterală	AB	...	baza piramidei

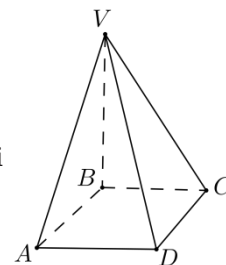
3. Desenați și notați un tetraedru de vârf M și bază triunghiul ARE . Precizați două muchii laterale și o muchie a bazei care să fie (toate trei) coplanare.

4. Desenați și notați corespunzător o piramidă $VDEFGH$. Numiți:

a) două muchii laterale; b) vârfurile bazei;

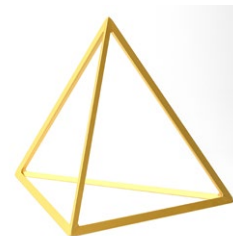
c) trei muchii ale bazei; d) trei plane determinate de câte trei vârfuri ale piramidei;

e) un plan determinat de trei vârfuri ale piramidei, care să nu fie nici planul bazei și nici plan corespunzător unei fețe a piramidei;



Activitate practică

Construiți un tetraedru din bețișoare:



- f) trei perechi de muchii coplanare; g) două perechi de muchii necoplanare;
h) un triplet de muchii care au un punct comun. Câte astfel de triplete se pot forma (nu contează ordinea)?

5. Stabiliți numărul de vârfuri (v), numărul de muchii (m) și numărul de fețe (f) și verificați egalitatea $v + f - m = 2$ pentru o piramidă:

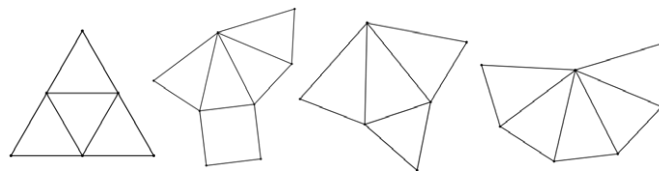
- a) triunghiulară; b) patrulateră; c) pentagonală; d) hexagonală.

6. Considerăm piramida patrulateră $SPACE$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) baza piramidei este patrulaterul $PACE$; b) $SP \subset (PAC)$; c) $E \in (SAP)$; d) $C \notin (PAE)$;
e) dreapta SA intersectează planul SEP într-un punct; f) $AE \subset (PAC)$; g) $SC \not\subset (PAC)$; h) $(SAC) \cap (PAE) = AC$;
i) intersecția planelor (SAP) și (SEC) este un punct; j) dreptele SA și EC se intersectează;
k) dreptele SP și SC sunt coplanare; l) dreptele PA și CE nu sunt coplanare.

7. Demonstrați că, oricum am alege trei muchii ale unei piramide, cel puțin două dintre ele sunt în același plan.

8. În figurile alăturate sunt desfășurările unor piramide regulate, mai puțin ultima, din care lipsește o parte a desfășurării. Precizați, pentru primele trei desene, despre ce piramidă este vorba, iar pentru ultimul desen, care este partea care lipsește, unde poate fi ea poziționată și ce piramidă reprezintă.



Pentru problemele 9, 10 și 11 alegeți răspunsul corect.

9. Desenați o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ și apotema VM corespunzătoare feței VBC . Se știe că muchia bazei AB este de 12 cm, iar muchia laterală VA este de 10 cm.

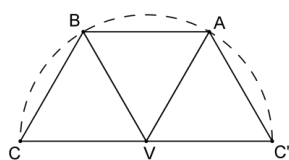
- i. Suma lungimilor muchiilor piramidei este egală cu: a) 40 cm; b) 48 cm; c) 54 cm; d) 88 cm.
ii. Lungimea segmentului VM este egală cu: a) 6 cm; b) 8 cm; c) 10 cm; d) 12 cm.

10. Desenați o piramidă triunghiulară regulată $SMNP$ și apotema SA corespunzătoare laturii NP . Se știe că suma lungimilor muchiilor piramidei este egală cu 45 cm, iar $SP = 9$ cm.

- i. Lungimea segmentului MN este egală cu: a) 5 cm; b) 6 cm; c) 8 cm; d) 9 cm.
ii. Lungimea segmentului SA este egală cu: a) $3\sqrt{3}$ cm; b) $4,5\sqrt{3}$ cm; c) $6\sqrt{2}$ cm; d) 9 cm.

11. În piramida hexagonală regulată $SABCDEF$, lungimea muchiei bazei este egală cu 11 cm, iar lungimea muchiei laterale este cu 2 cm mai mare. Diferența dintre suma lungimilor muchiilor laterale și suma lungimilor muchiilor bazei este egală cu: a) 12 cm; b) 8 cm; c) 6 cm; d) 2 cm.

Care dintre informațiile problemei se poate modifica fără ca rezultatul să se modifice? Explicați!



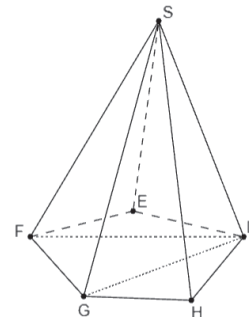
12. În figura alăturată este reprezentată desfășurarea suprafeței laterale a unei piramide triunghiulare regulate. Punctele C , V și C' sunt coliniare, iar patrulaterul $ABCC'$ este înscris într-un semicerc de diametru CC' . Demonstrați că piramida din care provine desfășurarea este un tetraedru regulat. Ajutați-vă de decupaje pentru a vă verifica!

13. Considerăm o piramidă $SDEFGH$ și diagonalele bazei care pleacă din vârful D . Planele determinate de fiecare dintre aceste diagonale și vârful piramidei împart piramida în mai multe tetraedre. Precizați câte tetraedre se obțin și numiți-le.

14. Considerăm o piramidă patrulateră regulată $ASTUV$. Câte tetraedre se pot forma având vârful A și ca bază suprafețe triunghiulare determinate de câte 3 dintre vârfurile bazei $STUV$? Există printre acestea și tetraedre regulate? Justificați.

15. Dintr-o foaie de hârtie decupați un triunghi echilateral cu latura de 16 cm. Plițați triunghiul decupat astfel încât să obțineți un tetraedru regulat. Care este lungimea unei muchii a acestuia? Comparați la nivelul clasei strategia utilizată atât pentru construcție, cât și pentru determinarea lungimii muchiei.

16. Dintr-o foaie de hârtie decupați un paralelogram cu măsura unui unghi de 60° și lungimea uneia dintre laturi egală cu dublul lungimii altei laturi. Plițați paralelogramul decupat astfel încât să obțineți un tetraedru regulat. Comparați la nivelul clasei strategia utilizată pentru realizarea construcției.



Prisma

Celebrul tratat *Elementele* al lui Euclid, scris în jurul anului 300 î. H., alcătuit din 13 cărți, a reprezentat timp de peste 2000 de ani principala lucrare după care s-a învățat geometria. Deși multe dintre rezultatele prezentate au fost descoperite de matematicienii dinaintea lui sau contemporani cu el, Euclid le-a prezentat într-un cadru unitar, logic, coerent și ușor de folosit. Dintre cele 13 cărți, cele de la XI la XIII cuprind rezultate fundamentale ale *geometriei în spațiu*.



Ne amintim!

Am discutat despre *poliedru* și despre un caz particular al acestuia – *piramida*. Astfel, am spus despre poliedru că reprezintă un corp geometric mărginit numai de fețe plane. Părțile din plan care delimitează corpul sunt suprafețe poligonale și se numesc fețe ale poliedrului.

Observații



Să înțelegem ce a vrut să spună Euclid în definiția prisme:

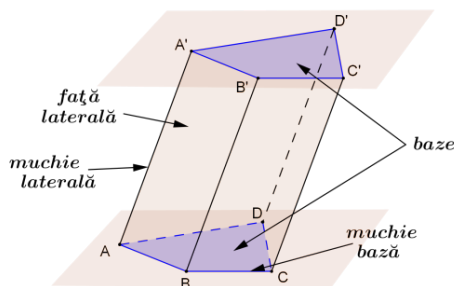
- ✓ În figura alăturată observăm reprezentat un poliedru (*solid*), fiind un corp geometric delimitat de plane.
- ✓ Două dintre plane, (ABC) și ($A'B'C'$), sunt *opuse* și *paralele*, iar cele două poligoane (în acest caz, triunghiuri), $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$, sunt congruente (prin observare pe desen). Reamintim ca exemplu de *plane paralele* perechea de plane corespunzătoare tavanului și podelei unei camere.
- ✓ Celelalte fețe plane care delimitează corpul, respectiv fețele $ABB'A'$, $BCC'B'$ și $ACC'A'$, sunt suprafețe de tip paralelogram.

Corpurile reprezentate în figurile de pe această pagină sunt de tip *prismă* și ele pot diferi prin tipul poligoanelor situate în cele două plane paralele, care dau numele prisme: prismă triunghiulară – în figura anterioară, prismă patrulateră – în figura următoare.

Elementele unei prisme

Referitor la prisma desenată alăturat, avem:

- ✓ *vârfuri* – A, B, C, D, A', B', C' și D' (vârfurile celor două poligoane identice, în plane opuse și paralele);
- ✓ *baze* – cele două poligoane situate în planele paralele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ (poligoane congruente);



Activitate practică

Priviți imaginea cortului, apoi sala de clasă. Sunt acestea exemple deisme? Argumentați răspunsul dat. Identificați în mediul înconjurător exemple de corpuri de tip prismă. De exemplu, un creion neascuțit este de tip prismă?





Observații

Pentru simplificare, vom utiliza pentru denumirea unei fețe a unui poliedru denumirea poligonului ce determină fața în locul suprafeței poligonale pe care o reprezintă.



Reflectăm!

În raport cu definițiile alăturate, ce putem afirma despre prisma triunghiulară cu bazele poligoane regulate? Este aceasta, în mod necesar, o prismă regulată? Dați exemplu de prismă cu toate muchiile egale. Este aceasta, în mod necesar, dreaptă?

✓ muchii:

– laterale: segmentele AA' , BB' , CC' și DD' (sunt congruente; dreptele lor suport sunt paralele);

– ale bazelor: AB , BC , ..., $A'B'$, $B'C'$, ...;

✓ fețe laterale – paralelogramele $ABB'A'$, $BCC'B'$, ...;

✓ notația: $ABCA'B'C'D'$ – după ce se notează poligonul de la baza de jos, se continuă cu notația poligonului de la baza superioară, notațiile de tip A și A' corespunzând unei aceleiași muchii laterale.

Definiție

✓ O prismă în care toate fețele laterale sunt dreptunghiuri se numește *prismă dreaptă*.

✓ O prismă dreaptă care are bazele poligoane regulate se numește *prismă regulată*.

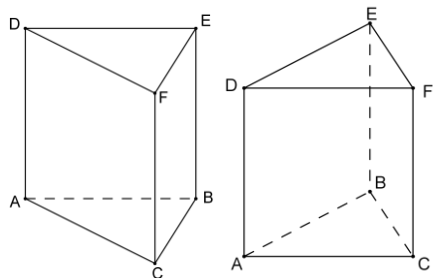
Prisma triunghiulară

O prismă cu bazele triunghiuri se numește *prismă triunghiulară*.

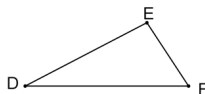
Prisma triunghiulară cu fețele dreptunghiuri se numește *prismă triunghiulară dreaptă*.

O prismă triunghiulară dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale este o *prismă triunghiulară regulată*.

Etape de construcție a unei prisme triunghiulare drepte

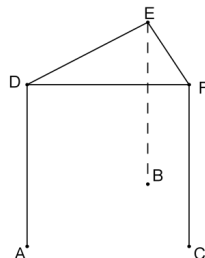


Prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$ este desenată din două perspective diferite.



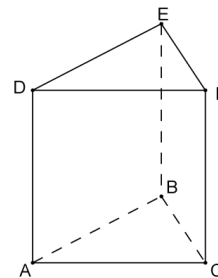
Desenăm baza de sus.

Putem începe cu baza de jos și să ridicăm cele trei muchii verticale.



Desenăm muchiile laterale, trei segmente paralele și congruente reprezentate vertical.

Este imaginea unei mese cu trei picioare.



Finalizăm desenul cu evidențierea muchiilor bazei de jos.



Reflectăm!

Știind că $MNPM'N'P'$ reprezintă notația unei prisme, aceasta nu poate fi decât prismă triunghiulară (de ce?), și vom ține cont ca, în poziționarea literelor, M , N , P să reprezinte vârfurile uneia dintre baze (de regulă cea de jos), iar M' , N' , P' să reprezinte vârfurile celeilalte baze; în plus, M și M' trebuie să determine un segment ce reprezintă o muchie laterală, la fel și perechile N și N' , respectiv P și P' .

O *prismă triunghiulară regulată* are bazele triunghiuri echilaterale.

Prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$ din figura alăturată are:

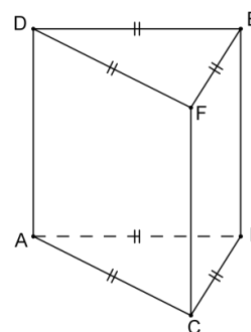
✓ bazele, triunghiurile ABC și DEF , triunghiuri echilaterale congruente;

✓ fețele laterale dreptunghiuri congruente;

✓ cele 9 muchii se împart în:

– 6 muchii congruente ale bazelor;

– 3 muchii laterale, congruente.



Exersăm împreună!

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 3\text{ cm}$ și $AA' = 5\text{ cm}$.

a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor prisme.

b) Numiți un plan determinat de trei vârfuri ale prisme, care să nu conțină o față laterală sau o bază a prisme.

c) Identificați pe desen intersecția planelor $(A'B'C)$ și (ABC') . Argumentați răspunsul cu proprietățile geometrice învățate.

d) Realizați o desfășurare în plan a prisme, conform dimensiunilor date.

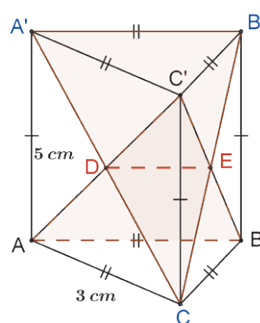
Rezolvare.

a) Într-o prismă regulată cele două baze sunt triunghiuri echilaterale, deci cele șase laturi care le formează au lungimile de 3 cm . Cele trei muchii laterale au lungimile de 5 cm , deci suma lungimilor muchiilor prisme este egală cu $6 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 33\text{ cm}$.

b) De exemplu, planul $(A'B'C)$.

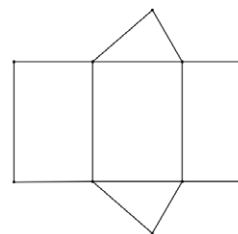
c) Punctele $\{D\} = A'C \cap AC'$ și $\{E\} = B'C \cap BC'$ se află în ambele plane și sunt distincte, deci $(A'B'C) \cap (ABC') = DE$.

d) La realizarea desfășurării trebuie ținut cont că cele trei fețe laterale (dreptunghiuri) sunt congruente.



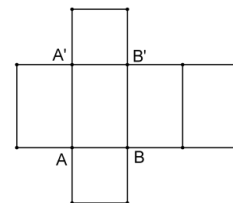
Activitate în cooperare

Suprafața unei prisme triunghiulare admite desfășurări în plan, un exemplu fiind cel din figura următoare. Observați figura și identificați segmentele congruente de pe desen. Realizați un desen care să reprezinte o altă desfășurare a prisme. Decupați desenul și reconstruiți prisma. Comparați între voi corpurile obținute și identificați asemănările și deosebirile. Faceți o clasificare în baza observațiilor voastre, care să sprijine învățarea.



Activitate în perechi

Suprafața unei prisme patrulater regulate admite desfășurări în plan, un exemplu fiind reprezentat în figura următoare.



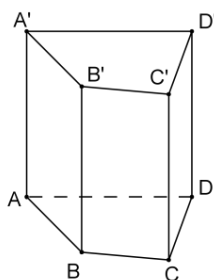
- Identificați segmentele congruente.
- Realizați, pe un carton, desenul desfășurării unei prisme patrulater regulate pentru care muchia bazei este de 3 cm , iar lungimea muchiei laterale de 5 cm .
- Pornind de la notația din desen, completați notația pe desenul vostru corespunzătoare notației prisme $ABCD A'B'C'D'$. Ce poziții corespund punctelor D și D' ? Explicați.
- Evidențiați pe desfășurare segmentul AC' .
- Discutați în perechi ce diferențe sunt între segmentul AC' corespunzător desfășurării și segmentul AC' corespunzător prisme.
- Decupați cartonul după conturul desfășurării prisme și construiți prisma patrulateră regulată. Folosind un fir de ață, fixați un capăt al firului în vârful A' al prisme și înfășurați strâns prisma până când ajungeți pe muchia AA' în vârful A . Colorați urma firului de la A la A' și apoi desfășurați prisma. Observați urma firului pe desfășurare și formulați concluzii care sprijină învățarea.

Prisma patrulateră

O prismă cu bazele patrulater se numește *prismă patrulateră*.

Prisma patrulateră cu fețe laterale dreptunghiuri se numește *prismă patrulateră dreaptă* – figura alăturată.

O prismă patrulateră dreaptă cu bazele pătrate este o *prismă patrulateră regulată*.

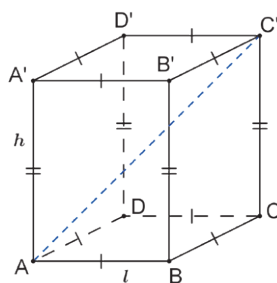


Prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ are:

- ✓ bazele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ pătrate congruente;
- ✓ fețele laterale dreptunghiuri congruente;
- ✓ 12 muchii, care se împart în:
 - 8 muchii congruente ale bazelor;
 - 4 muchii laterale, congruente;

Pe desen sunt notate cu l lungimea laturii bazelor și cu h lungimea muchiei laterale.

Segmentele care unesc două vârfuri care nu aparțin aceleiași fețe se numesc *diagonalele prisme* (a nu se confunda cu diagonalele fețelor sau ale bazelor): AC' , $A'C$, BD' și $B'D$ – toate patru congruente.





Activitate pe grupe

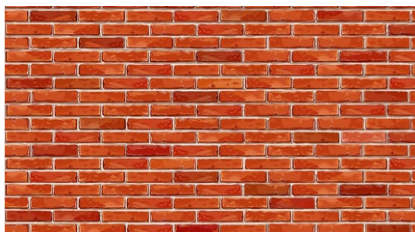
Împărțiți-vă în trei grupe și realizați desfășurări ale unor prisme patrulaterale regulate, folosind dimensiunile următoare:

- Grupa 1: $AB = 7$ cm, $AA' = 10$ cm;
- Grupa 2: $AB = 7$ cm, $AA' = 7$ cm;
- Grupa 3: $AB = 7$ cm, $AA' = 5$ cm;

Decupați desenele și reconstruiți prismele. Comparați între voi corpurile obținute și identificați asemănările și deosebirile. Faceți o clasificare în baza observațiilor voastre, care să sprijine învățarea.

Realitatea tridimensională

➤ Cutiile, dulapurile, cărămizile, încăperile au de cele mai multe ori formă de paralelipiped. Având în vedere că toate unghiurile fețelor paralelipipedelor sunt unghiuri drepte, este mult mai ușoară așezarea acestora unul lângă altul sau unul deasupra celuilalt, astfel încât să nu rămână spații goale atunci când dorim umplerea unui spațiu. Discutați între voi și formulați cât mai multe idei prin care să evidențiați avantajele utilizării formelor paralelipipedice în diferite situații din realitate.



➤ Blocurile de locuințe sunt împărțite pe apartamente. Într-o formă standard, apartamentele sunt paralelipipedice sau formate din camere (spații) paralelipipedice. Casele respectă același principiu. O diferență între case și blocuri este acoperișul care, de regulă, la bloc este într-un plan orizontal, iar la case este o formă combinată de prisme și piramide. Exprimați idei privind tipul de acoperiș, evidențiind avantaje și dezavantaje.



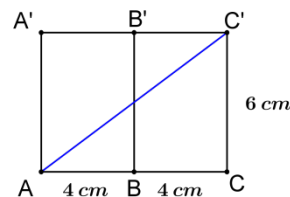
Exersăm împreună!

Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, cu $AB = 4$ cm și $AA' = 6$ cm. O furnică pleacă din punctul A spre punctul C' . Determinați lungimea minimă a drumului pe care-l parcurge furnica în situația în care:

- merge doar pe fețele laterale;
- merge pe oricare dintre fețele prisme.

Rezolvare.

a) Drumul minim pe suprafața prisme este drumul în linie dreaptă pe desfășurarea prisme între punctele A și C' . Extragem din desfășurarea prisme fețele $ABB'A'$ și $BCC'B'$. Drumul minim este parcurs pe segmentul AC' .



Lungimea segmentului AC' se calculează aplicând *teorema lui Pitagora* în $\triangle ACC'$, $AC' = 10$ cm.

b) Dacă furnica poate merge și pe baza de sus a prisme, extrageți din desfășurare acea parte care vă poate ajuta să identificați un alt drum, în linie dreaptă, între cele două puncte.

Paralelipiped dreptunghic

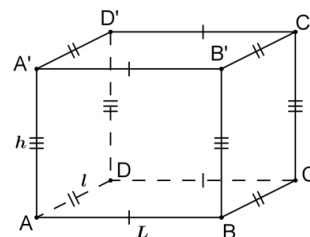
O prismă dreaptă care are baza un dreptunghi se numește *paralelipiped dreptunghic*.

Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$:

✓ toate fețele sunt dreptunghiuri, două câte două congruente (cele opuse);

✓ cele 12 muchii se împart în 3 grupe de câte 4 segmente congruente;

✓ din fiecare dintre vârfuri pleacă câte trei muchii de lungimi diferite; vom numi lungimile acestora *dimensiunile* paralelipipedului dreptunghic; am notat pe desenul alăturat aceste lungimi cu L (lungime), l (lățime) și h (înălțime).



Prin răsturnarea acestui corp pe oricare dintre fețe se obține tot un paralelipiped dreptunghic (oricare dintre fețe poate deveni bază!);

Segmentele care unesc două vârfuri care nu aparțin aceleiași fețe se numesc *diagonalele* paralelipipedului dreptunghic (a nu se confunda cu diagonalele fețelor): AC' , $A'C$, BD' și $B'D$ – toate patru congruente.

Suprafața unui paralelipiped dreptunghic admite desfășurări în plan. Realizați astfel de desfășurări în plan ale paralelipipedului și comparați-le între voi. Identificați asemănări și deosebiri.

Exersăm împreună!

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ se cunosc $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm și $AA' = 8$ cm.

a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului.

b) Alegem la întâmplare o muchie. Care este probabilitatea ca lungimea acesteia să fie număr impar? Dar par? Comparați strategiile de rezolvare folosite.

c) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: *Muchiile AB, AD și AA' sunt coplanare.*

Rezolvare.

a) Într-un paralelipiped dreptunghic muchiile sunt de 3 categorii, în fiecare categorie fiind câte patru muchii egale, deci suma este egală cu: $4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 76$ cm.

b) Numărul cazurilor favorabile este 4 – numărul muchiilor congruente cu AD, iar numărul cazurilor posibile este 12 – numărul total de muchii, deci probabilitatea este $P = \frac{4}{12} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$.

În cazul par, două dintre tipurile de muchii au lungimile exprimate prin valori pare și, cum categoriile au același număr de muchii (4), $P = \frac{2}{3}$.

În raport cu această ultimă cerință, o altă strategie pentru determinarea probabilității ar fi fost prin diferență: $P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$!

c) Propoziția este falsă: dreptele AB și AD formează planul (ABC), punctul A' nu aparține acestuia, deci dreapta AA' nu este inclusă în planul determinat de celelalte două drepte, $AA' \cap (ABC) = \{A\}$ – înțepă planul.

Cubul

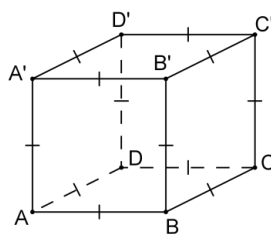
Cubul este un poliedru delimitat de șase fețe (hexaedru) în formă de pătrat.

Cubul este un paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile egale; în acest caz, muchia se notează cu l .

Cubul este o prismă patrulateră regulată în care muchia laterală este congruentă cu muchia bazei.

În cubul ABCDA'B'C'D', reprezentat în figura alăturată, cunoaștem că:

- ✓ toate muchiile sunt congruente;
- ✓ toate fețele sunt pătrate;
- ✓ toate diagonalele cubului sunt congruente;
- ✓ așezat pe oricare dintre fețe, imaginea nu-și schimbă forma.



Exersăm împreună!

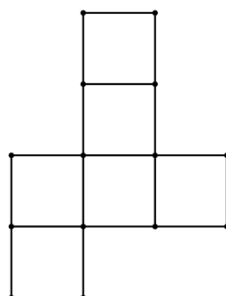
Considerăm un cub cu aria unei fețe de 16 cm².

- a) Calculați suma lungimilor muchiilor cubului.
- b) Realizați o desfășurare a cubului, astfel încât cel mai mare dintre dreptunghiurile din desfășurare să aibă lungimea de 12 cm.

Rezolvare:

a) Latura cubului este de 4 cm, deci suma lungimilor muchiilor este $12 \cdot 4 = 48$ cm.

b) Figura alăturată corespunde cerinței.



Reflectăm!

Discutați la nivelul clasei situația în care una dintre fețele laterale ale unui paralelipiped dreptunghic este pătrat. Realizați o conexiune cu prisma patrulateră regulată.



Știați că?

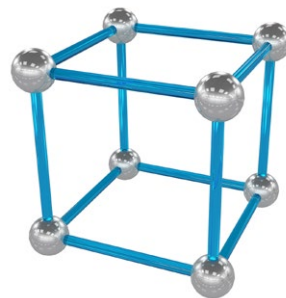
Suntem obișnuiți cu zarurile în formă de cub, însă există zaruri și de alte forme:



Activitate în perechi

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D', de muchie 5 cm.

- a) Folosiți o foaie cartonată pentru a reprezenta desfășurarea cubului.
- b) Decupați desfășurarea și construiți cubul corespunzător acesteia.
- c) Folosind bețișoare de lemn și plastilină, realizați un cub ca cel din imagine.
- d) Folosind fire de ață sau bețișoare, evidențiați diagonalele cubului și formulați o concluzie privind concurența acestora. Formulați o strategie prin care să demonstrați concurența celor 4 diagonale ale cubului! Reluați activitatea după lecția *drepte paralele*.



Reflectăm!

Observați definițiile echivalente ale cubului. Reamintiți-vă definiții echivalente pentru pătrat și stabiliți legături între figura plană, pătratul, și corpul de tip cub.



Activitate practică

➤ Observați poza următoare. Ce alte exemple de prisme hexagonale puteți da?



➤ Priviți fagurele de miere. Observați cum albinele sunt constructori desăvârșiți!

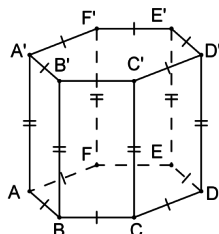


Prisma hexagonală

O prismă cu bazele hexagoane se numește *prismă hexagonală*.

Prisma hexagonală cu fețele dreptunghiuri se numește *prismă hexagonală dreaptă*.

O prismă hexagonală dreaptă cu bazele hexagoane regulate este o *prismă hexagonală regulată*.



Observați prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ din figura alăturată și enumerați elementele acesteia. Realizați o desfășurare în plan a prisme.

Exersați

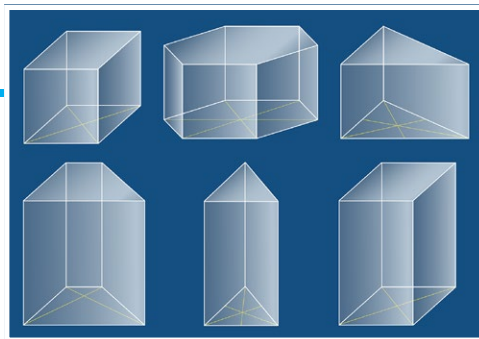
1. Denumiți corpurile geometrice alăturate, apoi notați-le:
2. Folosiți internetul sau reviste din diferite domenii pentru a selecta imagini din realitate în care să identificați forme naturale, construcții ale omului sau ale altor viețuitoare de tip prismă. Faceți o colecție la nivelul clasei, organizată pe categorii de prisme particulare.

3. Desenați și notați corespunzător:

- a) cubul $ABCDEFGH$;
- b) paralelipipedul dreptunghic $CDEFC'D'E'F'$;
- c) prisma patrulateră regulată $POLIEDRU$;
- d) prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

4. Completați propozițiile, astfel încât să fie adevărate:

- a) Prisma cu cel mai mic număr de fețe este ...
- b) O prismă cu bazele de tip pentagon se numește ...
- c) O prismă cu fețele laterale dreptunghiuri se numește ...
- d) Muchiile opuse ale unei fețe laterale a unei prisme sunt ... și ...
- e) Numărul de vârfuri ale unei prisme triunghiulare este egal cu ...
- f) Numărul de muchii laterale ale unei prisme patrulateră este egal cu ...



5. Observați casa din poza alăturată. Ea are forma unei prisme pentagonale, cu una dintre fețele laterale în plan orizontal. Dacă ar fi să descompunem clădirea în două părți, dintre care una corespundătoare podului casei, atunci una dintre ele ar fi ..., iar cealaltă ar fi ...

6. Există prismă care să aibă 14 laturi? Dar 15 laturi? Enunțați o proprietate care face legătura între numărul de muchii ale unei prisme și numărul de vârfuri ale bazei.

7. Pentru o prismă, notăm cu v numărul de vârfuri, cu m numărul de muchii și cu f numărul de fețe. Studiind diverse prisme, justificați următoarele propoziții, adevărate în oricare dintre acestea:

- a) v este număr par;
- b) m este multiplu de 3;
- c) $v = 2f - 4$;
- d) $v + f = m + 2$.

8. Desenați prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$. Realizați o desfășurare în plan a acesteia, știind că $AB = 6$ cm și $CC' = 4$ cm.

9. Considerăm prisma triunghiulară regulată *PESCAR*. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

- a) Dacă $PE = 5$ cm și $EA = 7$ cm, atunci suma lungimilor muchiilor prisme este egală cu ... cm.
 b) Dacă suma lungimilor muchiilor este de 60 cm, iar $PC = 10$ cm, atunci lungimea segmentului AR este egală cu ... cm.
 c) Dacă perimetrul unei baze este 18 cm, iar perimetrul unei fețe laterale este de 28 cm, atunci lungimea muchiei laterale este egală cu ... cm.

10. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, cu $AB = 16$ cm și $AA' = 6$ cm. O furnică pleacă din punctul A spre punctul C' . Determinați lungimea minimă a drumului pe care-l parcurge furnica, dacă:

- a) merge doar pe fețele laterale; b) merge pe oricare dintre fețele prisme.

11. Desenați prisma patrulateră regulată $ABCDEFGH$ și numiți:

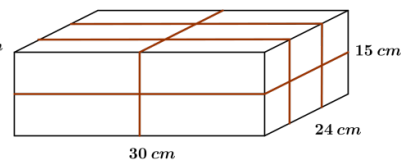
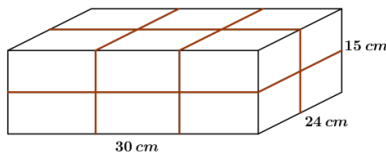
- a) bazele; b) o față laterală;
 c) două muchii situate pe aceeași față laterală; d) două fețe laterale opuse;
 e) două fețe cu o muchie comună; f) trei muchii concurente într-un punct;
 g) o diagonală a unei fețe laterale și o diagonală a prisme, care să fie coplanare; aceeași cerință pentru cazul în care sunt necoplanare.

12. O clădire are forma unei prisme patrulateră regulate cu latura bazei de 20 m și înălțimea de 25 m. Realizați o desfășurare în plan a prisme, folosind scara 1:500.

13. Desenați paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Realizați două desfășurări diferite ale acestuia, știind că $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 5$ cm.

14. O clădire are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$, cu $AB = 12$ m, $AD = 8$ m și $AE = 5$ m. Se montează în colțul G o cameră de supraveghere, legată la sursa de curent printr-un cablu care are punctul de acces în A și este întins pe fețele laterale ale clădirii. Calculați lungimea minimă a cablului, știind că acesta poate fi poziționat pe orice față a clădirii.

15. Două pachete identice au fost legate diferit, după cum se vede în figurile alăturate. În care caz se folosește mai puțină sfoară pentru legare?



16. Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu lungimea muchiei de 5 cm. Demonstrați că $A'BC'D$ este un tetraedru regulat și calculați lungimea laturii acestuia.

17. Un cub din lemn are latura de 9 cm și este vopsit pe toate fețele cu vopsea albastră. Se taie în cuburi cu latura de 3 cm. Stabiliți câte dintre cuburile obținute au:

- a) trei fețe albastre; b) exact două fețe albastre; c) exact o față albastră; d) nicio față vopsită.

18. Considerăm un cub $ABCDEFGH$. Găsiți toate tetraedrele determinate de vârfuri ale cubului dintre care unul este punctul A (nu contează ordinea vârfurilor). Este vreunul dintre acestea tetraedru regulat?

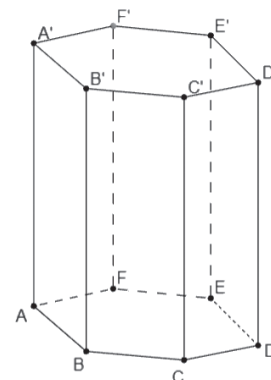
19. În figura alăturată este reprezentată prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Numiți:

- a) bazele;
 b) o față laterală;
 c) două muchii situate pe aceeași față laterală;
 d) două fețe laterale care nu au muchii comune;
 e) două fețe cu o muchie comună;
 f) trei muchii concurente într-un punct.

20. O prismă hexagonală regulată are fețele laterale pătrate.

a) Știind că perimetrul uneia dintre baze este de 24 cm, calculați suma lungimilor muchiilor prisme.

b) Există o împărțire a prisme hexagonale în trei corpuri, două de tip prismă triunghiulară dreaptă și unul de tip paralelipiped dreptunghic? Realizați un desen prin care să evidențiați o astfel de împărțire.



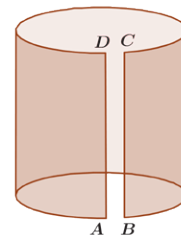
Cilindru circular drept. Con circular drept

Obiectele din imaginile următoare au formă de cilindru, de con sau au în componență astfel de corpuri.



Activitate practică

Decupați o bucată de carton în formă de dreptunghi, $ABCD$, cu $AB = 22$ cm și $BC = 15$ cm. În-
fășurați cartonul astfel încât laturile AD și BC să se suprapună și lipiți cele două părți. Fiecare
dintre cele două cercuri din capetele *tubului* astfel obținut are lungimea egală cu lungimea
segmentului AB (înainte de înfășurare). Dacă notăm cu R raza acestor cercuri, $AB = 2\pi R$, deci
raza va fi aproximativ egală cu 3,5 cm (dacă folosim în calcul aproximarea $\pi = \frac{22}{7}$). Decupați
din carton două discuri cu raza de 3,5 cm și lipiți-le la capetele corpului obținut anterior.

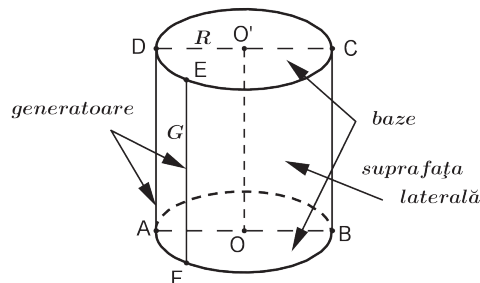


Corpul obținut în urma activității practice este un *cilindru circular drept*. Cele două cercuri care delimitează
cilindrul sunt situate în plane paralele, se numesc *baze* și au razele egale. Segmentul obținut prin *lipirea* seg-
mentelor AD și BC este o *generatoare* a cilindrului. Orice alt segment care unește două puncte de pe cele două
cercuri și are dreapta suport paralelă cu AD este o *generatoare* a cilindrului.

Elementele unui cilindru circular drept:

Referitor la cilindrul desenat alăturat, avem:

- ✓ baze – cele două cercuri: $C(O, OA)$ și $C(O', O'D)$;
- ✓ rază (R) – raza oricăreia dintre cele două baze;
- ✓ generatoare (G) – AD , BC , EF ;
- ✓ suprafața laterală – suprafața curbă obținută prin înfășurare;
- ✓ patrulaterul $ABCD$, determinat de două generatoare și două dia-
metre, este un dreptunghi (*secțiune axială* a cilindrului circular drept).



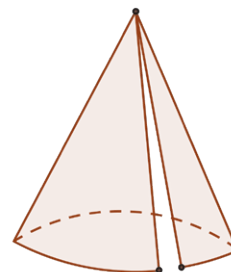
Descoperiți!

Despre o prismă în care fețele laterale sunt dreptunghiuri am spus că se numește prismă dreaptă. În denumi-
rea prisme se regăsește tipul poligonului bazei. Faceți o analogie între o prismă dreaptă și un cilindru circular
drept și găsiți un argument pentru care cilindrul descris alăturat se numește cilindru circular drept.

Activitate practică

Pe un carton desenați un cerc cu raza de 15 cm și decupați din el un sector de cerc co-
rrespunzător unui unghi la centru cu măsura de 120° . În-
fășurați cartonul astfel încât cele două raze care îl delimitează să se suprapună și lipiți cele două părți. La baza corpului
obținut se formează un cerc, a cărui lungime este egală cu lungimea arcului de cerc co-
rrespunzător sectorului de cerc decupat. Calculați raza acestui cerc, decupați din carton
un disc cu raza egală cu valoarea obținută și lipiți-l la baza corpului.

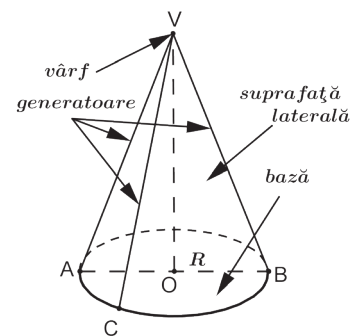
Corpul obținut este un *con circular drept*. Segmentul obținut prin lipirea celor două
raze este o *generatoare* a conului.



Elementele unui con circular drept:

Referitor la conul desenat alăturat, avem:

- ✓ bază – cercul de centru O și rază OA ;
- ✓ rază (R) – raza bazei;
- ✓ vârf – V ;
- ✓ generatoare (G) – orice segment care unește vârful conului cu un punct al bazei;
- ✓ suprafața laterală – suprafața curbă obținută prin înfășurare;
- ✓ triunghiul VAB , determinat de un diametru al bazei și două generatoare, este isoscel și se numește *secțiune axială* a conului circular drept.

**Reflectăm!**

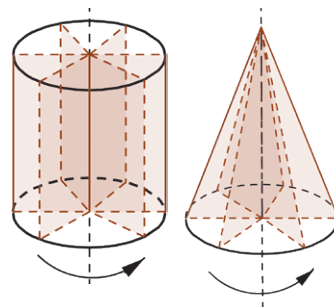
Discutați și stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: *Generatoarele unui con circular drept sunt congruente.*

Q Observații

Prin *rotirea* unui dreptunghi în jurul uneia dintre laturi, latura opusă acesteia *descrie* suprafața laterală a unui cilindru circular drept.

Prin *rotirea* unui triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catete, ipotenuza triunghiului *descrie* suprafața laterală a unui con circular drept.

Cilindrul circular drept și conul circular drept sunt *corpuri de rotație*.

**Exersați**

- Desenați un cilindru circular drept și evidențiați trei generatoare ale acestuia.
- Desenați un cilindru circular drept cu raza bazei de 3 cm și generatoarea de 6 cm. Ce puteți spune despre secțiunea axială a cilindrului?
- Desenați un cilindru circular drept cu raza de 3,5 cm și înălțimea de 8 cm. Desenați desfășurarea suprafeței laterale a acestuia, folosind în calcule aproximarea $\pi = 22/7$.
- Dintr-o foaie de tablă dreptunghiulară cu dimensiunile de 67 cm și 16 cm dorim să construim un cilindru circular drept cu raza de 8 cm și înălțimea de 32 cm. Evidențiați pe o schiță modul în care facem decuparea tablei.
- Pe cilindrul din imaginea alăturată se dorește lipirea unei benzi colorate care să aibă capetele în punctele A și B și lungimea minimă. Știind că raza bazei este de 3,5 cm și generatoarea de 10 cm, demonstrați că lungimea benzii este mai mare decât 24 cm. Folosiți în calcule aproximarea $\pi = 22/7$.
- Puteți găsi pe suprafața laterală a unui cilindru circular drept două puncte astfel încât segmentul determinat de ele să fie conținut în întregime în suprafața laterală a cilindrului?
- Puteți găsi pe suprafața laterală a unui cilindru circular drept trei puncte necoliniare, astfel încât segmentele determinate de acestea să fie toate trei conținute în întregime în suprafața laterală a cilindrului?
- Desenați desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept cu raza bazei de 3 cm și generatoarea de 6 cm.
- Un con circular drept are raza bazei de 4 cm și generatoarea de 12 cm. Lipim un fir subțire de ață dintr-un punct al bazei până în punctul diametral opus, astfel încât firul să fie total întins. Care este lungimea firului?
- Calculați măsura unghiului la centru al unui sector de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept, în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $R = 6$ cm, $G = 10$ cm; b) $R = 7$ cm, $G = 9$ cm; c) $R = 5$ cm, $G = 12$ cm.



Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare



Test de autoevaluare

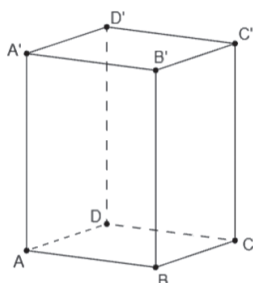
În figura alăturată este reprezentată prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, cu $AB = 4$ cm și $AA' = 6$ cm.

I. Precizați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

1. $B \in (ACD)$
2. $BB' \subset (BCC')$
3. $B'D' \subset (ABB')$
4. Punctele A , C și D' sunt coplanare.
5. Intersecția planelor (ACC') și (BDD') este o dreaptă.

II. Alegeți răspunsul corect:

1. Suma lungimilor muchiilor prisme este egală cu:
a) 48 cm; b) 56 cm; c) 64 cm; d) 72 cm.
2. Perimetrul patrulaterului $ACC' A'$ este egal cu:
a) 28 cm; b) 24 cm;
c) $12 + 4\sqrt{13}$ cm; d) $12 + 8\sqrt{2}$ cm.
3. Triunghiul $B'AC$ este:
a) oarecare; b) isoscel;
c) echilateral; d) dreptunghic.



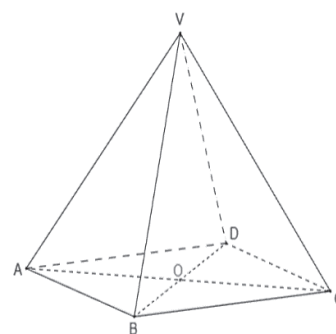
În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$, iar O este centrul pătratelui $ABCD$.

III. Determinați următoarele intersecții:

1. $(VAD) \cap (ABC)$
2. $(VAO) \cap (ABC)$
3. $(VAC) \cap (VBD)$
4. $VO \cap (ABC)$
5. $AN \cap (VBD)$, unde N este mijlocul muchiei VC .

IV. Dacă $VA = AB = 8$ cm, determinați:

1. suma lungimilor muchiilor;
2. lungimea apotemei piramidei;
3. perimetrul triunghiului AMN , unde M și N sunt mijloacele segmentelor BC , respectiv VC .



Punctaj. I. $0,5p \times 5$; II. $0,5p \times 3$; III. $0,5p \times 5$;
IV. $0,5p$; $1p$; $1p$. Din oficiu: $1p$.
Timp de lucru: 50 de minute.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Am progresat în învățare prin parcurgerea acestui set de lecții	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitat înainte și după test pentru a îmbunătăți performanța

*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. Completați spațiile punctate pentru a obține afirmații adevărate:

- a) Două puncte ... determină o ...
- b) Un plan este determinat de ... puncte necoliniare.
- c) O dreaptă și un punct ... determină un plan.
- d) Două drepte ... sau ... determină un plan.

2. Desenați prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $A \in (ABC)$; b) $B' \in (BCC')$; c) $B' \notin (ABC)$;
- d) $AC \subset (BCD)$; e) $BB' \subset (ABC)$; f) $AD' \cap A'B = \emptyset$.

3. Considerăm punctele distincte A, B, C și D astfel încât $AB \cap CD = \{O\}$.

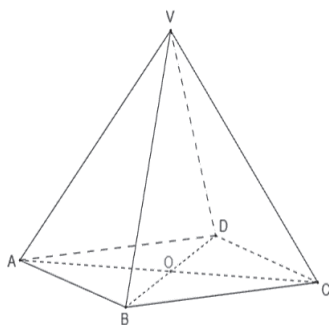
- a) Justificați faptul că cele patru puncte sunt coplanare.
- b) Demonstrați că $O \in (ABC)$.
- c) Demonstrați că $OA \subset (BCD)$.

4. Se consideră punctele distincte A, B, C și D astfel încât dreptele AB și CD sunt distincte și paralele.

- a) Justificați faptul că cele patru puncte sunt coplanare.
- b) Demonstrați că $AC \subset (ABD)$.
- c) Ce puteți afirma despre dreptele AC și BD ?

5. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră $VABCD$ și punctul O , intersecția diagonalelor bazei. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $B \in (AOD)$;
- b) $O \in (VBD)$;
- c) $C \in (VBD)$;
- d) $VO \subset (VAC)$;
- e) $AO \subset (BCD)$;
- f) $VD \cap (ABC) = \{D\}$;
- g) $VO \cap (ABC) = \emptyset$;
- h) $AO \cap (VCD) = \{D\}$;
- i) $(VAB) \cap (ABC) = AB$;

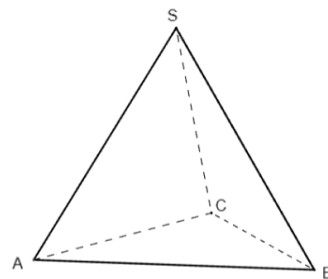


j) $(VAC) \cap (VBD) = VO$.

k) Intersecția planelor (VAB) și (VCD) este o dreaptă care conține punctul V .

6. În figura alăturată este reprezentat un corp din sticlă în formă de piramidă triunghiulară regulată $SABC$, cu baza ABC , $\angle ASB = 30^\circ$ și $SA = 8$ cm.

- a) Calculați măsura unghiului SAB .
- b) Calculați aria unei fețe laterale.
- c) Se lipește un fir decorativ care pleacă din A , intersectează muchiile laterale SB și SC și ajunge înapoi în A . Determinați lungimea minimă a firului.



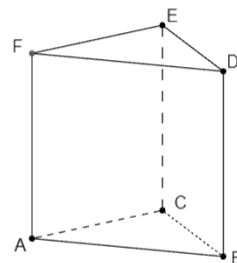
7. Un cub are aria unei fețe egală cu 25 cm^2 . Calculați suma lungimilor muchiilor cubului.

8. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, cu $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm și $AA' = 4$ cm.

- a) Calculați suma lungimilor muchiilor.
- b) Calculați perimetrul triunghiului $B'AC$.
- c) Determinați intersecția planelor $(A'BC)$ și $(AB'C')$.

9. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCFDE$, în care fețele laterale sunt pătrate și $AB = 6$ cm.

- a) Demonstrează că $EA \equiv EB$.
- b) Arată că $EA = 6\sqrt{2}$ cm.
- c) Extrageți din figură triunghiul EAB și calculați aria lui.
- d) Demonstrați că $VBCED$ este o piramidă patrulateră regulată, unde V este mijlocul muchiei AF .



Paralelism



Activitate în perechi

Discutați în perechi afirmațiile următoare și asigurați-vă că noțiunile implicate sunt clare. Cunoașterea lor vă va permite înțelegerea noilor noțiuni despre paralelism.

> Două drepte paralele determină un plan.
> Două drepte concurente determină un plan.

> Două drepte care sunt incluse în același plan se numesc *drepte coplanare*.

> Două drepte care nu au niciun punct comun și nu sunt nici paralele se numesc *drepte necoplanare*.

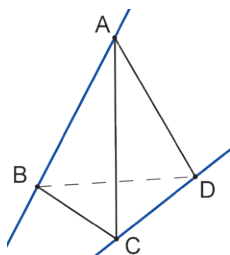
> Sala voastră de clasă are forma unui paralelipiped dreptunghic? Dacă da, identificați muchii ale acestuia ale căror drepte suport să fie paralele, concurente sau necoplanare.



Reflectăm!

> Este suficient să spunem despre *două drepte care nu au niciun punct comun că sunt paralele*?

> Pentru a justifica existența dreptelor necoplanare, să considerăm tetraedrul $ABCD$ și dreptele AB și CD . Reamintiți-vă definiția piramidei și identificați ce s-ar contrazice dacă am presupune că dreptele AB și CD ar fi coplanare.

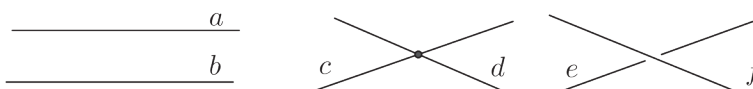


Drepte paralele. Unghiul a două drepte



Ne amintim!

La începutul capitolului am evidențiat cazurile în care se pot situa două drepte diferite: pot fi *paralele* (dreptele a și b), *concurente* (dreptele c și d) sau *necoplanare* (dreptele e și f). Folosiți două creioane și poziționați-le în fiecare dintre cele trei cazuri.



Definiție

În spațiu, două drepte sunt paralele dacă sunt coplanare și nu au niciun punct comun.



Rețineți!

În spațiu, dreptele paralele au aceleași proprietăți ca și în plan.

Axioma paralelelor:

Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură paralelă la dreapta dată.

O dreaptă d și un punct exterior ei, A , determină un plan α . În planul α , prin punctul A se poate construi o singură paralelă $d' \parallel d$. În spațiu nu mai există o altă paralelă dusă prin A la dreapta d , deoarece aceasta ar fi conținută în planul α (orice altă paralelă dusă prin A la dreapta d ar determina cu aceasta un plan care ar coincide cu planul α).

Tranzitivitatea relației de paralelism:

Două drepte distincte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.

Dacă a , b și d sunt drepte distincte, astfel încât $a \parallel d$ și $b \parallel d$, atunci $a \parallel b$.



Exersăm împreună!

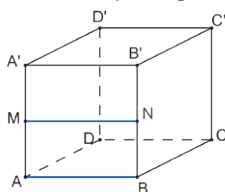
Considerăm punctul M , mijlocul laturii AA' a unui cub $ABCD A'B'C'D'$. Construieți prin M paralele la: a) AB ; b) BB' ; c) AD' ; d) $D'C$; e) $A'C$.

Rezolvare:

O dreaptă și un punct exterior ei determină un plan. Paralela prin M la o dreaptă va fi conținută în planul determinat de ele.

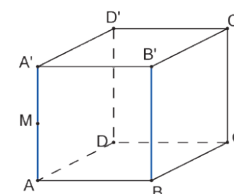
Primul pas în rezolvare este identificarea planului determinat de punctul M și dreapta la care dorim să construim paralela. Construcția paralelei se face ulterior, folosind proprietățile figurilor plane.

a) Punctul M și dreapta AB determină planul $(MAB) = (ABB'A')$, iar paralela va fi MN , unde N este mijlocul laturii BB' .

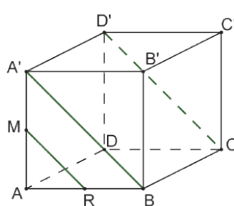


b) Punctul M și dreapta BB' determină planul $(MBB') = (ABB'A')$, iar paralela este deja construită, $AA' \parallel BB'$.

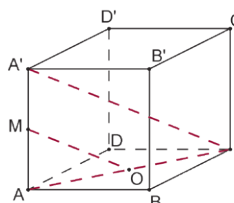
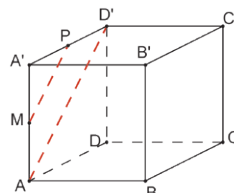
c) Planul $(M, AD') = (ADD'A')$, iar paralela este $MP \parallel AD'$, unde P este mijlocul laturii $(A'D')$ – folosind proprietatea liniei mijlocii în triunghi.



d) Planul $(M, D'C)$ este puțin mai greu de vizualizat, deci vom utiliza dreapta $A'B$, $A'B \parallel D'C$ (demonstrați), și vom construi $MR \parallel A'B$, R fiind mijlocul laturii AB . Din tranzitivitate $MR \parallel D'C$ și, cum printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură paralelă la dreapta dată, atunci MR este paralela căutată.



e) Planul $(M, A'C)$ este planul $(ACC'A')$, iar paralela este MO , unde O este mijlocul segmentului AC .



Reflectăm

> În plan, dacă două drepte distincte sunt perpendiculare pe a treia, atunci cele două drepte sunt paralele (demonstrați):

$a, b, d \subset \alpha, a \neq b, a \perp d$ și $b \perp d \Rightarrow a \parallel b$.

> Rămâne valabilă afirmația dacă cele trei drepte distincte nu sunt coplanare? Exemplificați folosind muchii ale sălii de clasă (sau folosind trei creioane). Evidențiați situații în care cele două drepte sunt paralele și situații în care ele nu sunt paralele.



Activitate pe grupe

Organizați-vă în grupe de elevi pentru a stabili valoarea de adevăr a afirmațiilor următoare, în contextul geometriei în spațiu. Argumentați în fiecare caz răspunsul.

Între grupe, comparați argumentele și formulați concluzii care sprijină învățarea.

Care dintre afirmațiile următoare au sens și în geometria plană? Care dintre cele care au sens își păstrează valoarea de adevăr și care își modifică valoarea de adevăr?

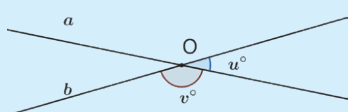
- Două drepte care nu au puncte comune se numesc drepte paralele.
- Două drepte pot fi: identice (confundate), concurente, paralele sau necoplanare.
- Două drepte determină un plan.
- Prin orice punct se poate construi o paralelă la o dreaptă dată.
- Două drepte care nu au niciun punct comun sunt paralele sau necoplanare.
- Două drepte distincte, perpendiculare pe o aceeași dreaptă, pot fi coplanare sau necoplanare.

Unghiul a două drepte

Două drepte concurente formează două perechi de unghiuri opuse la vârf. Dacă dreptele nu sunt perpendiculare, două dintre unghiuri sunt ascuțite și două sunt obtuze.

Definiție

Măsura unghiului dintre două drepte concurente este cea mai mică dintre măsurile unghiurilor formate la intersecția lor: $a \cap b = \{O\}$, $u^\circ < v^\circ$ (notăm $\sphericalangle(a, b) = u^\circ$ și citim măsura unghiului dintre dreptele a și b este de u°).

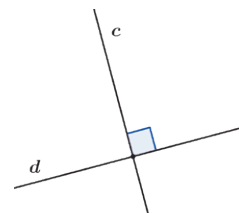


Două drepte concurente sunt perpendiculare dacă măsura unghiului dintre ele este de 90° .

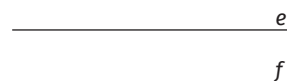
Dacă două drepte coincid sau sunt paralele, atunci măsura unghiului dintre ele este de 0° .



Exemplu



Dreptele c și d sunt drepte perpendiculare: $c \perp d \Leftrightarrow \sphericalangle(c, d) = 90^\circ$.

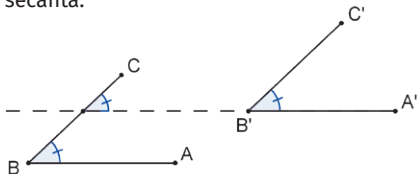


Dreptele e și f sunt paralele, unghiul dintre ele este de 0° . Prin convenție, unghiul dintre două drepte confundate este tot de 0° .



Reflectăm!

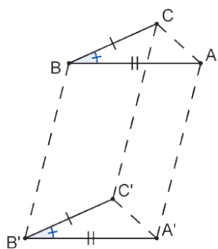
> În plan, proprietatea unghiurilor cu laturile respectiv paralele a fost studiată în anii anteriori și este o consecință imediată a proprietății paralelelor tăiate de o secantă.



> În spațiu, observați figura următoare în care am particularizat poziția punctelor astfel încât $AB \equiv A'B'$ și $BC \equiv B'C'$ (cele două unghiuri sunt în plane diferite și rămân valabile ipotezele $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$).

Studiați patrulateralele $ABB'A'$ și $BCC'B'$ și, în final, $ACC'A'$.

Justificați congruența $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ și obțineți concluzia.



Activitate în perechi

Împreună cu colegul de bancă, folosind 4 creioane, construiți două unghiuri cu laturile paralele, care să fie:

- ambele ascuțite;
- ambele obtuze;
- ambele drepte;
- unul ascuțit și unul obtuz.



Atenție!

Înainte de a construi paralele, verificați dacă acestea corespund unor drepte suport ale unor segmente deja date prin desen, caz în care vă puteți folosi de desenul inițial!

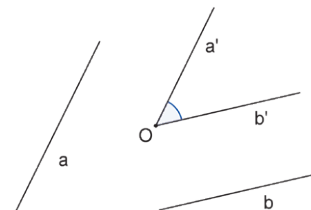
Teoremă

Teorema unghiurilor cu laturile respectiv paralele

Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente (dacă sunt amândouă ascuțite, amândouă drepte sau amândouă obtuze) ori suplementare (dacă unul este ascuțit, iar celălalt este obtuz sau dacă sunt amândouă drepte): $\angle ABC$ și $\angle A'B'C'$ sunt ascuțite și $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, atunci $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Să considerăm două drepte necoplanare a și b . Construim printr-un punct oarecare al spațiului, O , paralele la cele două drepte: $a' \parallel a$ și $b' \parallel b$. Măsura unghiului plan care se formează între dreptele a' și b' este măsura unghiului dreptelor a și b și nu depinde de alegerea punctului O : $\angle(a, b) = \angle(a', b')$.

În practică, se recomandă să desenăm doar semidreptele care formează unghiul ascuțit și chiar să alegem punctul pe una dintre cele două drepte.



Rețineți!

Măsura unghiului dintre două drepte necoplanare este mai mare decât 0° și cel mult egală cu 90° !

În cazul în care măsura unghiului dintre dreptele necoplanare este egală cu 90° , vom spune că dreptele sunt perpendiculare (în spațiu)!

Definiție

Unghiul dintre două drepte oarecare este considerat unghiul dintre paralelele duse la acestea printr-un punct dat.

Exersăm împreună!

Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Calculați măsura unghiului determinat de dreptele:

- BB' și DD' ;
- AD și CC' ;
- AB și $A'C'$.
- Demonstrați că $A'C' \parallel AC$.

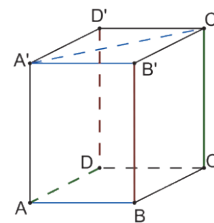
Rezolvare:

a) $BB' \parallel AA'$ și $AA' \parallel DD'$, deci $BB' \parallel DD'$, rezultă $\angle(BB', DD') = 0^\circ$.

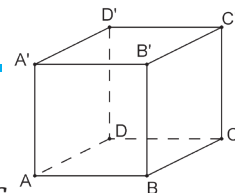
b) Cele două drepte sunt necoplanare și alegem punctul D prin care ducem o paralelă la CC' . Ea este deja construită, pentru că $CC' \parallel DD'$, rezultă $\angle(AD, CC') = \angle(AD, DD') = \angle ADD' = 90^\circ$. În acest caz, putem spune și că $AD \perp CC'$ – cele două drepte sunt perpendiculare (în spațiu).

c) Considerăm prin A' paralela la AB : $A'B' \parallel AB$, rezultă $\angle(AB, A'C') = \angle(A'B', A'C') = \angle B'A'C' = 45^\circ$.

d) $\left. \begin{matrix} AA' \parallel BB' \\ BB' \parallel CC' \end{matrix} \right\} \Rightarrow AA' \parallel CC'$ și $\left. \begin{matrix} AA' \equiv BB' \\ BB' \equiv CC' \end{matrix} \right\} \Rightarrow AA' \equiv CC'$, deci $ACC'A'$ paralelogram, de unde $A'C' \parallel AC$.



Exersați



1. Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$. Identificați pe desen:

- a) trei drepte paralele cu BC ; b) patru drepte concurente cu BC ;
c) patru drepte necoplanare cu BC ; d) o dreaptă coplanară cu BC , nesituată pe aceeași față cu BC .

2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, precizați pozițiile relative ale următoarelor perechi de drepte:

- a) AE și CG ; b) AE și BC ; c) AE și ED ;
d) AE și FH ; e) FH și EG ; f) FH și AC .

3. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Demonstrați că:

- a) $AB \parallel C'D'$; b) $ABC'D'$ paralelogram;
c) $AD' \parallel BC'$; d) $AD' \parallel B'C$.

4. Demonstrați că diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sunt concurente.

5. Considerăm prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Stabiliți pozițiile relative ale următoarelor perechi de drepte:

- a) BB' și EE' ; b) BB' și $F'E'$; c) BB' și DE ; d) BC și $E'F'$; e) CD și $E'F'$;
f) BF și $C'E'$; g) BC' și FE' ; h) BE' și FC' ; i) AD' și $A'D$.

6. În prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$, punctele M , N și P sunt mijloacele segmentelor BC , EF , respectiv AB . Demonstrați că: a) $MN \parallel BE$; b) $AM \parallel DN$ c) $MP \parallel DE$.

7. Considerăm tetraedrul $ABCD$ și punctele M , N , P și Q mijloacele muchiilor AB , BC , CD , respectiv DA .

a) Stabiliți pozițiile relative ale următoarelor perechi de drepte:

- i) AD și BC ; ii) AD și NQ ; iii) MN și CD ; iv) MQ și AC ; v) PQ și AC ; vi) NP și BD .

b) Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

c) Dacă, în plus, $AC \equiv BD$, demonstrați că $MP \perp NQ$.

8. Decupați dintr-un carton un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Îndoiiți decupajul (fără a plia) după linia mijlocie MN a trapezului. Demonstrați că:

a) dreptele AB și CD (după îndoire) sunt paralele; b) dreptele AD și BC sunt concurente.

9. Dacă A , B , C și D sunt puncte distincte în spațiu, astfel încât dreptele AB și CD sunt paralele, iar segmentele AB și CD sunt congruente, atunci cele patru puncte sunt vârfurile unui paralelogram?

10. Paralelogramele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite. Demonstrați că:

- a) $CD \parallel EF$; b) $CE \parallel DF$;
c) $MN \parallel CE$, unde M și N sunt mijloacele segmentelor BD , respectiv BF .

11. Pătratele $ABCD$ și $CDEF$ sunt situate în plane diferite astfel încât $\angle ADE = 60^\circ$.

Calculați măsurile unghiurilor determinate de dreptele:

- a) EF și AB ; b) FC și AB ; c) AD și FC ; d) AE și BC .

12. Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determinați măsurile unghiurilor:

- a) $\angle(AB, CC')$; b) $\angle(AB, CD')$; c) $\angle(CD', A'B)$; d) $\angle(AD', B'C)$; e) $\angle(AB, B'C')$; f) $\angle(AD', A'B)$.

13. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu toate muchiile congruente și $AC \cap BD = \{O\}$. Determinați măsurile unghiurilor:

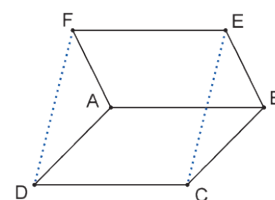
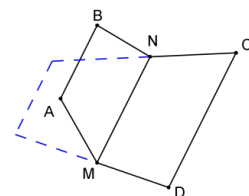
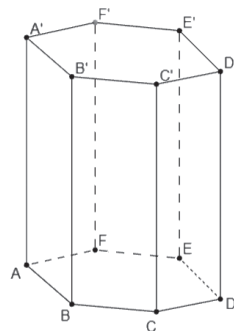
- a) $\angle(SA, DC)$; b) $\angle(SA, SB)$; c) $\angle(AB, CD)$; d) $\angle(AB, CB)$; e) $\angle(SA, SC)$; f) $\angle(SO, AC)$.

14. În tetraedrul regulat $ABCD$, punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB și BC . Calculați măsurile unghiurilor determinate de MN cu dreptele AC , CD , respectiv AD .

15. Considerăm romb $ABCD$ și un punct S exterior planului rombului. Punctele M , N , P și Q sunt mijloacele segmentelor SA , SB , SC , respectiv SD . Demonstrați că $MP \perp NQ$.

16. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, cu $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $AA' = 4$ cm și punctul M , mijlocul muchiei BB' . Calculați:

- a) măsura unghiului determinat de dreptele CM și DD' ;
b) tangenta unghiului determinat de dreptele AM și $D'C'$.



Dreaptă paralelă cu un plan. Plane paralele



Activitate pe grupe

Formați grupe și răspundeți la cerință alegând unul dintre seturi. Pentru a formula răspunsurile, folosiți foi de hârtie (ca plane) și creioane (ca drepte)! Prezentați răspunsurile în fața clasei.

Ce putem afirma despre poziția unei drepte față de un plan, dacă:

- două puncte distincte ale dreptei sunt și ale planului?
- un punct al dreptei nu este și al planului?
- un punct al planului este și al dreptei?
- un punct al planului nu este pe dreaptă?
- o dreaptă din plan intersectează dreapta dată?
- nicio dreaptă din plan nu intersectează dreapta dată?
- două puncte ale dreptei nu sunt și ale planului?
- două puncte ale dreptei sunt de o parte și de alta a planului?
- o infinitate de puncte ale dreptei reprezintă o mulțime de puncte comune cu planul?
- o infinitate de puncte ale dreptei nu reprezintă puncte comune cu planul?
- o infinitate de puncte ale planului reprezintă o mulțime de puncte comune cu dreapta?
- o infinitate de puncte ale planului reprezintă o mulțime de puncte necomune cu dreapta?



Ne amintim!

Dintre afirmațiile importante de la începutul capitolului, reamintim:
Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci dreapta este inclusă în plan (A_2).

Observăm cubul din figura alăturată. Să studiem poziția dreptelor AB , AF și EF față de planul (ABC) .

✓ Punctele A și B aparțin planului (ABC) , deci $AB \subset (ABC)$.

✓ Punctul F nu aparține planului (ABC) , conform definiției piramidei, iar $A \in (ABC)$. Despre dreapta FA spunem că este *secantă* planului (ABC) sau că *întreapă* (intersectează) planul. Dreapta FA și planul (ABC) au un sigur punct comun: $FA \cap (ABC) = \{A\}$.

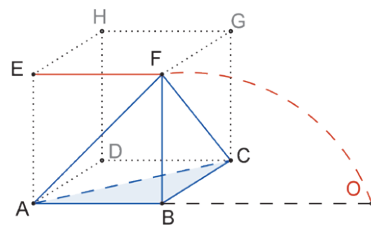
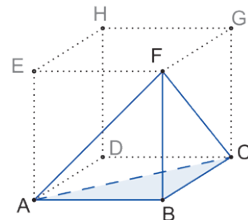
✓ Să observăm dreapta EF :

• $EF \parallel AB$, deci ea este inclusă în planul (FAB) .

• $(FAB) \cap (ABC) = AB$.

• Dacă presupunem că dreapta EF ar intersecta planul (ABC) într-un punct O , atunci acesta s-ar afla atât în planul (FAB) , cât și în planul (ABC) , în concluzie ar fi situat pe dreapta AB , comună celor două plane, ceea ce ar fi fals.

• Dreapta EF și planul (ABC) nu au niciun punct comun.



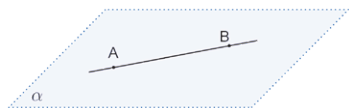
Definiție

O dreaptă este paralelă cu un plan dacă dreapta și planul nu au niciun punct comun.

Teoremă

O dreaptă paralelă cu o dreaptă dintr-un plan este fie paralelă cu planul, fie conținută în planul respectiv.

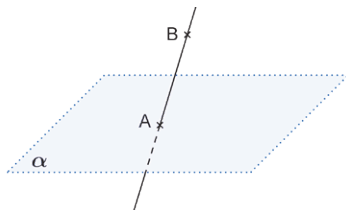
În concluzie, poziția unei drepte în raport cu un plan poate fi:



Dreapta AB este *inclusă* în planul α :

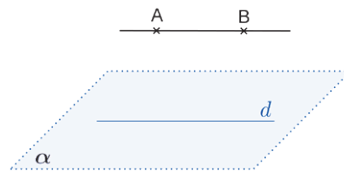
$$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$$

$AB \cap \alpha = AB$ (dreapta are toate punctele în comun cu planul)



Dreapta AB este *secantă* planului α (întreapă planul):

$A \in \alpha, B \notin \alpha \Rightarrow AB \cap \alpha = \{A\}$
(dreapta are un singur punct comun cu planul)



Dreapta AB este paralelă cu planul α :

$$d \subset \alpha, AB \parallel d \Rightarrow AB \parallel \alpha$$

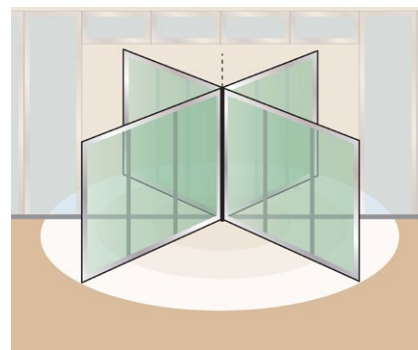
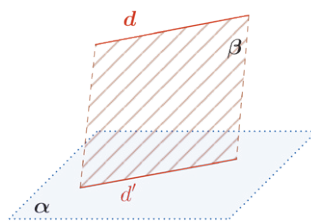
$AB \cap \alpha = \emptyset$ (dreapta nu are niciun punct comun cu planul)

Exersăm împreună!

Câte plane distincte conțin o aceeași dreaptă? Imaginați o situație reală folosindu-vă de un caiet sau de o carte!

Considerăm un plan α și o dreaptă d paralelă cu planul. Construim un plan β ce conține dreapta d și care intersectează planul α după dreapta d' . Demonstrați că dreptele d și d' sunt paralele: $d \parallel \alpha, d \subset \beta, \alpha \cap \beta = d' \Rightarrow d \parallel d'$.

Rezolvare. Dreptele d și d' sunt conținute în același plan, deci ele sunt paralele sau concurente. Presupunând că sunt concurente, punctul lor de intersecție ar fi în planul α ($d' \subset \alpha$) și ar contrazice faptul că $d \parallel \alpha$.



Activitate în cooperare

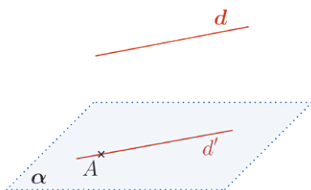
Discutați la nivelul clasei și stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Folosiți un creion (cu rol de dreaptă) și o foaie de hârtie (cu rol de plan) pentru a construi contraexemple în cazul propozițiilor false:

1. Dacă $d \parallel d'$ și $d' \subset \alpha$, atunci $d \parallel \alpha$.
2. Dacă două drepte a și b sunt paralele cu un plan α , atunci $a \parallel b$.
3. Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α , atunci dreapta d este paralelă cu orice dreaptă din planul α .
4. Printr-un punct exterior unui plan se poate construi o singură dreaptă paralelă cu planul dat.
5. Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi un singur plan paralel cu dreapta dată.
6. Dacă dreptele d și d' sunt paralele, atunci orice plan ce conține dreapta d este paralel cu dreapta d' .

Exersăm împreună!

Considerăm un plan α , un punct $A \in \alpha$ și o dreaptă $d \parallel \alpha$. Construim prin punctul A dreapta $d' \parallel d$. În aceste condiții, dreapta d' este inclusă în planul α .

Rezolvare. Considerăm planul determinat de dreapta d și punctul A , $\beta = (d, A)$. Aplicați teorema anterioară și continuați demonstrația.



Teoremă

Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α și printr-un punct al planului, $A \in \alpha$, construim o paralelă d' la dreapta d , atunci această dreaptă este conținută în plan, $d' \subset \alpha$.

Exersăm împreună!

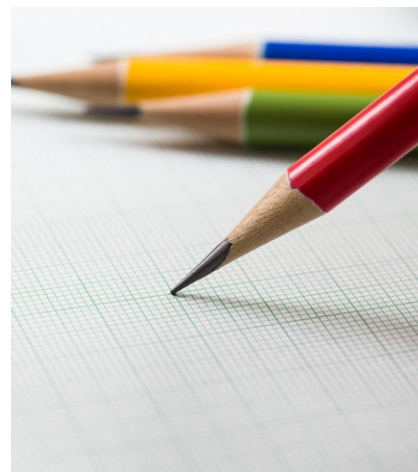
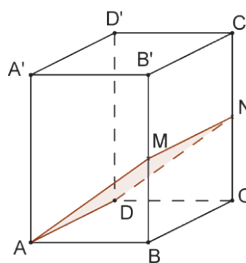
Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ și punctul M mijlocul muchiei BB' .

- a) Demonstrați că $AD \parallel (BCC')$.
- b) Determinați dreapta de intersecție dintre planul (ADM) și planul (BCC') .

Rezolvare.

a) $AD \parallel BC$ pentru că $ABCD$ pătrat și, cum $BC \subset (BCC')$ și $A \notin (BCC')$, rezultă $AD \parallel (BCC')$.

b) $AD \parallel (BCC')$, deci orice plan care conține dreapta AD va intersecta planul (BCC') după o dreaptă paralelă cu AD . Finalizați demonstrația determinând poziția punctului N pentru care MN este dreapta de intersecție a celor două plane.



Plane paralele

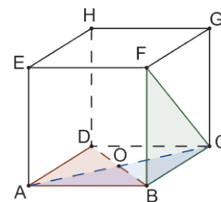


Ne amintim!



În prima parte a capitolului am învățat că:

- ✓ Trei puncte necoliniare determină un plan.
- ✓ Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



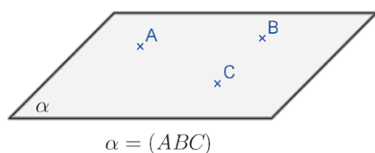
În cubul $ABCDEFGH$ din figura alăturată:

- ✓ planele (ABC) și (ABD) au punctele necoliniare A, B și O comune, deci coincid;
- ✓ planul (ABC) are în comun cu planul (BCF) dreapta BC ;
- ✓ conform definiției prisme, planele (ABC) și (EFG) sunt paralele.

Definiție

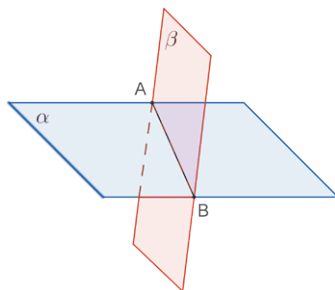
Două plane care nu au niciun punct comun se numesc *plane paralele*.

În concluzie, pozițiile relative a două plane pot fi:



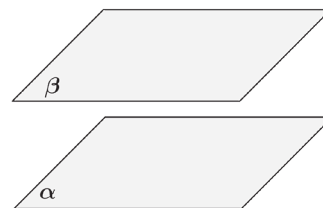
Plane *identice* (confundate) – toate punctele comune

Pentru a argumenta că planele sunt identice este de ajuns să identificăm 3 puncte necoliniare comune planelor.



Plane *secante* – intersecția lor este o dreaptă

Pentru a argumenta că planele sunt secante este de ajuns să identificăm 2 puncte distincte comune planelor și un punct care aparține unui plan, dar nu și celuilalt.



Plane *paralele* – intersecția lor este mulțimea vidă

Pentru a argumenta că planele sunt paralele este de ajuns să identificăm două drepte concurente într-unul dintre plane, fiecare dreaptă fiind paralelă cu celălalt plan.



Reflectăm!

➤ Faceți o comparație a celor trei situații pentru plane cu cele trei situații referitoare la pozițiile relative a două drepte (identice/concurente/paralele).

➤ Este suficient ca două plane să fie paralele cu o dreaptă, pentru ca ele să fie paralele între ele?

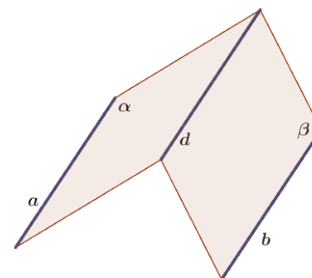


Exersăm împreună!

Considerăm dreptele paralele a și b și două plane concurente α și β , astfel încât $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ și $\alpha \cap \beta = d$, d diferită de a și b . Demonstrați că $d \parallel a \parallel b$.

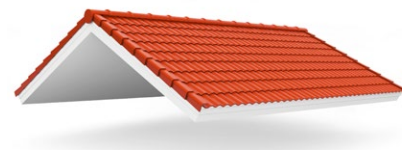
Rezolvare. Presupunem că $a \cap d = \{O\}$ și, cum $d \subset \beta$, obținem că $a \cap \beta = \{O\}$.

Pe de altă parte, $a \parallel b$ și $b \subset \beta$, deci dreapta a este paralelă cu planul β , în contradicție cu relația anterioară. În concluzie $a \parallel d$ și $b \parallel d$.



Teoremă

Teorema acoperișului. Dacă două drepte paralele sunt situate, respectiv, în două plane secante, atunci dreapta de intersecție a celor două plane este paralelă cu dreptele date (sau coincide cu una dintre dreptele date).

**Exersăm împreună!**

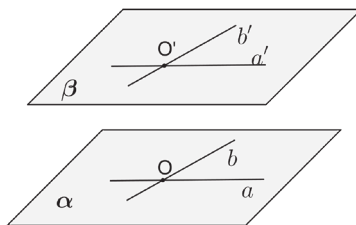
Considerăm dreptele concurente a și b incluse într-un plan α , $a \cap b = \{O\}$. Printr-un punct $O' \notin \alpha$ construim dreptele $a' \parallel a$ și $b' \parallel b$. Dreptele concurente a' și b' determină planul β . Demonstrați că $\alpha \parallel \beta$.

Rezolvare. Presupunem că planele α și β se intersectează după o dreaptă d .

Aplicând teorema anterioară:

- ✓ pentru $a \parallel a'$, $a \subset \alpha$ și $a' \subset \beta$, obținem că $d \parallel a$;
- ✓ pentru $b \parallel b'$, $b \subset \alpha$ și $b' \subset \beta$, obținem că $d \parallel b$.

Prin punctul O am avea construite două paralele, a și b , la aceeași dreaptă, deci în contradicție cu axioma paralelelor (postulatul lui Euclid). În concluzie, cele două plane nu se intersectează, deci sunt paralele (planele nu sunt identice deoarece $O' \notin \alpha$).

**Observație**

Rezolvarea problemei alăturate demonstrează existența planelor paralele, oferind în același timp și un criteriu de demonstrare a paralelismului a două plane:

Pentru a demonstra că două plane sunt paralele este suficient să determinăm două drepte concurente din unul dintre plane care să fie paralele cu două drepte concurente din celălalt plan.

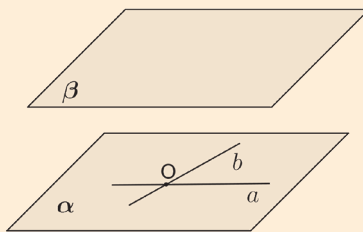
**Reflectăm!**

Observați că poziția unui plan față de un alt plan este determinată de numărul punctelor lor de intersecție. Realizați o asociere între mulțimea pozițiilor relative a două plane și mulțimea punctelor de intersecție dintre cele două plane. Imaginați și alte condiții ce trebuie impuse în raport cu două plane, pentru a asigura poziționarea planelor într-unul dintre cazurile date (confundate, secante, paralele). Discutați la nivelul clasei și validați cazurile corecte!

Teoremă

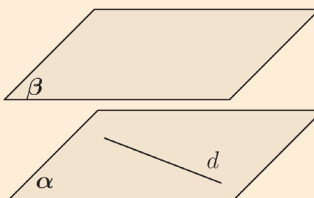
Criteriu de paralelism. Dacă un plan α conține două drepte concurente paralele cu un plan β , atunci planele α și β sunt paralele.

$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \cap b \neq \emptyset, a \neq b \\ a \parallel \beta, b \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

**Proprietăți ale relației de paralelism dintre plane****Teoremă**

Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă inclusă în unul dintre plane este paralelă cu celălalt plan.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel \beta$$



Indicație. Presupunem că dreapta d intersectează planul β . (Continuați rezolvarea în perechi)

**Activitate practică**

Desenați pe o foaie de hârtie două drepte a și b , concurente într-un punct O . Luați un punct la întâmplare, A , care să nu fie pe foaia de hârtie. Punctul A determină cu fiecare dintre cele două drepte două plane. Ce poziție au cele două plane unul față de celălalt? Dacă se intersectează, care este dreapta lor de intersecție?



Reflectăm!

Considerăm două plane α și β . Se poate construi întotdeauna în planul α o dreaptă care să fie paralelă cu planul β ? Studiați diverse poziții ale celor două plane.



Activitate în cooperare

Discutați la nivelul clasei și stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Folosiți creioane (cu rol de dreaptă) și una sau mai multe foi de hârtie (cu rol de plan) pentru a construi contraexemple în cazul propozițiilor false:

1. Dacă două plane au un punct comun, atunci ele sunt secante.
 2. Dacă două plane au trei puncte distincte în comun, atunci ele sunt identice.
 3. Dacă $\alpha \parallel \beta$, atunci orice dreaptă din planul α este paralelă cu o infinitate de drepte din planul β .
 4. Fiind date două drepte necoplanare și un punct M nesituat pe ele, există un plan care conține punctul M și este paralel cu cele două drepte.
- Folosiți-vă și de spațiul clasei pentru a identifica elementele care să corespundă informațiilor din enunț și exemplificați planul care îndeplinește condițiile date!
5. Este suficient ca două plane să fie paralele cu aceeași dreaptă pentru ca ele să fie paralele între ele.
 6. Fiind date două plane secante și un punct M nesituat în ele, există o singură dreaptă care trece prin M și este paralelă cu ambele plane.



Reflectăm!

Considerăm două drepte necoplanare a și b . Explicați modul de construcție:

- a unui plan care să conțină dreapta a și să fie paralel cu dreapta b (este unic?);
- a unui plan care să treacă printr-un punct O (nesituat pe niciuna dintre drepte) și să fie paralel cu amândouă dreptele.

Teoremă

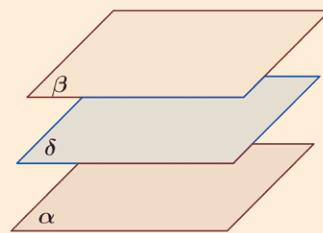
Printr-un punct exterior unui plan trece un singur plan paralel cu planul dat.

Indicație. Puteți face legătura cu cazul dreptelor? Faceți legătura cu podeaua și tavanul sălii de clasă. Acestea corespund la două plane paralele!

Teoremă

Tranzitivitatea relației de paralelism între plane. Două plane distincte paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \delta \\ \beta \parallel \delta \\ \alpha \neq \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$



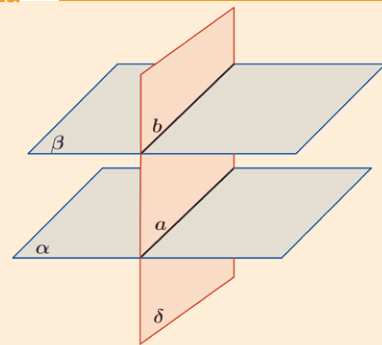
Indicație. Prespuneți că cele două plane nu sunt paralele și folosiți teorema anterioară.

Teoremă

Teorema fierăstrăului. Dacă două plane sunt paralele, atunci orice plan care intersectează unul dintre ele îl intersectează și pe celălalt, iar dreptele de intersecție sunt paralele.



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \delta = a \\ \beta \cap \delta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

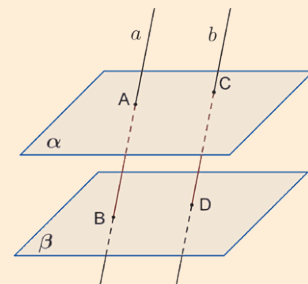


Indicație. Prespuneți că cele două drepte nu sunt paralele și continuați rezolvarea.

Teoremă

Două plane paralele determină pe două drepte paralele, secante ale planelor, segmente congruente.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta, a \parallel b \\ a \cap \alpha = \{A\}, a \cap \beta = \{B\} \\ b \cap \alpha = \{C\}, b \cap \beta = \{D\} \end{array} \right\} \Rightarrow AB \equiv CD$$



Indicație. Dreptele a și b determină un plan ce taie cele două plane paralele după dreptele paralele AC și BD ; studiați natura patrulaterului $ABDC$.

Exersați

1. Considerăm cubul $ABCD A' B' C' D'$.

- a) Stabiliți poziția dreptei AB în raport cu planele care includ fețele cubului.
b) Stabiliți poziția relativă la planul (ADD') a dreptelor AD' , CD , $B'C'$, BC' , respectiv CA' .

2. Considerăm tetraedrul $SABC$ și punctele M și N mijloacele muchiilor SA , respectiv SB . Stabiliți poziția dreptei MN în raport cu planul: a) (ABC) ; b) (SAB) ; c) (SBC) ; d) (SAC) .

3. Oricare două vârfuri ale paralelipipedului dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ determină o dreaptă. Identificați, printre acestea, dreptele:

- a) paralele cu planul (BCC') ; b) secante la planul (ABB') ; c) incluse în planul $(A' B' C)$.

4. Triunghiul ABC are latura BC inclusă într-un plan α și punctul $A \notin \alpha$. Punctele M și N aparțin laturilor AB , respectiv AC . Stabiliți poziția dreptei MN în raport cu planul α , în fiecare dintre situațiile:

- a) $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $AM = 4$ cm și $AN = 5$ cm;
b) $AM = 3$ cm, $MB = 6$ cm și $AC = 3AN$;
c) $AM = 2,5$ cm, $AB = 10$ cm, $AN = 2$ cm și $AC = 9$ cm.

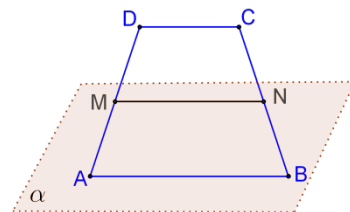
5. În figura alăturată, trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are baza AB inclusă în planul α , punctul $C \notin \alpha$, iar punctele M și N sunt mijloacele laturilor AD , respectiv BC .

a) Demonstrați că $CD \parallel \alpha$.

b) Este dreapta MN inclusă în planul α ?

c) Realizați pe caiet un alt desen, mai sugestiv, pentru răspunsul dat la punctul b).

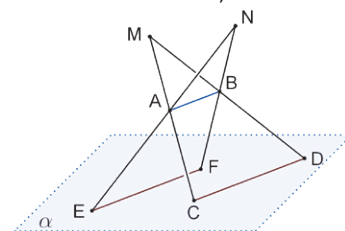
d) Demonstrați că dreapta DN este secantă planului α . Dacă $DN \cap \alpha = \{E\}$, stabiliți poziția punctului E față de dreapta AB .



6. Dreptunghiurile $ABCD$ și $ABEF$, de centre O_1 , respectiv O_2 , sunt situate în plane diferite. Demonstrați că:

- a) $FE \parallel (ABC)$; b) $AB \parallel (CDE)$; c) $O_1 O_2 \subset (ACE)$; d) $O_1 O_2 \parallel (FAD)$.

7. În figura alăturată sunt reprezentate un plan α și o dreaptă AB , $AB \parallel \alpha$. Punctele M și N nu aparțin planului α , E și F sunt punctele de intersecție ale dreptelor NA și NB cu planul α , iar C și D sunt punctele de intersecție ale dreptelor MA și MB cu planul α . Demonstrați că $CD \parallel EF$. În ce condiții suplimentare $CD \equiv EF$?



8. În piramida patrulateră regulată $SABCD$, punctele M , N , P și R sunt mijloacele segmentelor SB , SC , SA , respectiv SP . Demonstrați că:

- a) dreptele MN și PN sunt paralele cu planul (ABC) ; b) dreapta RN este secantă planului (ABC) .

9. Considerăm un paralelogram $ABCD$ și un punct E exterior planului acestuia. Punctul F este mijlocul segmentului AE . Demonstrați că $CE \parallel (FBD)$.

10. În tetraedrul $ABCD$, punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC , respectiv CD , iar punctele G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv ACD . Demonstrați că:

- a) punctele B , D , G_1 și G_2 sunt coplanare; b) $MN \parallel (BG_1 G_2)$; c) $G_1 G_2 \parallel (BCD)$.

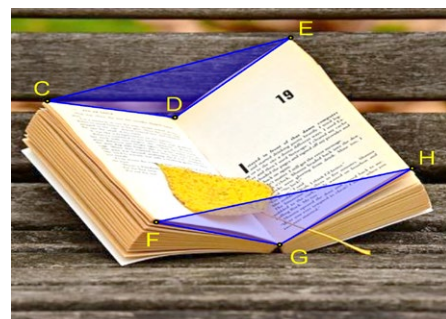
11. Considerăm tetraedrul $SABC$, cu $AB = AC$. Bisectoarea unghiului SBA intersectează SA în E , iar bisectoarea unghiului SBC intersectează SC în F . Demonstrați că $EF \parallel (ABC)$.

Plane paralele

12. Cei patru pereți ai clasei, împreună cu tavanul și podeaua, reprezintă șase plane. Alegeți unul dintre aceste plane și indicați:

- a) planele paralele cu el; b) planele secante cu el.

13. Observați cartea deschisă din imaginea alăturată. Demonstrați că $(CDE) \parallel (FGH)$.



14. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$.

a) Numiți plane secante cu planul (ABC) .

b) Determinați un plan paralel cu planul (BCC') .

c) Demonstrați că planul determinat de dreptele AB și $A'B'$ coincide cu planul determinat de dreapta BB' și punctul A .

15. În tetraedrul $ABCD$, considerăm punctele M, N, P și R mijloacele muchiilor BA, BC, BD , respectiv CD . Demonstrați că:

a) (MNP) și (BCD) sunt secante; b) (NPR) și (BCD) sunt identice; c) $(MNP) \parallel (ACD)$.

16. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ și punctele O și O' centrele dreptunghiurilor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$.

a) Demonstrați că $(A'BD) \parallel (CB'D')$ și $(O'AD) \parallel (OB'C')$.

b) Determinați intersecția planelor (ACC') și (BDD') .

17. Considerăm prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Demonstrați că:

a) $(ABB') \parallel (DEE')$; b) $(BCC') \parallel (ADD')$; c) $(BDD') \parallel (AA'E')$;

d) (ADD') , (BEE') și (CFF') au o dreaptă comună; e) dacă $(BCC') \cap (EDD') = d$, atunci $d \parallel BB'$.

18. Considerăm o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ și un punct oarecare M pe muchia AB . Planul (MCC') intersectează $A'B'$ în punctul N . Demonstrați că: a) $MN \parallel CC'$; b) $MC \parallel NC'$.

19. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ determinați intersecția planelor (VBC) și (VAD) .

20. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor $D'A, AB'$, respectiv $B'C$. Demonstrați că:

a) $(MNP) \parallel (ABC)$; b) triunghiul MNP este dreptunghic.

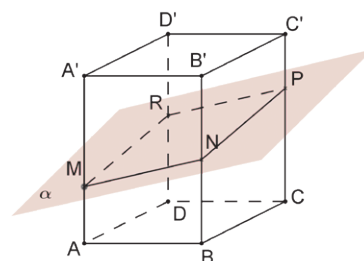
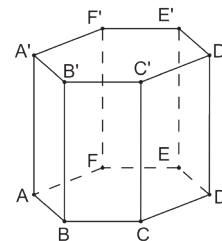
21. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$ și punctul O centrul bazei $ABCD$. Construim simetricul punctului S față de punctul O , pe care îl notăm cu V . Demonstrați că:

a) $(SAB) \parallel (VCD)$; b) $VABCD$ este piramidă regulată.

22. Considerăm o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ și un plan α care intersectează muchiile AA', BB', CC' și DD' în punctele M, N, P , respectiv R .

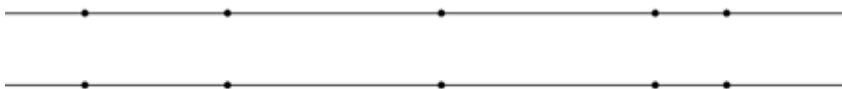
a) Demonstrați că $MNPR$ este paralelogram.

b) Dacă, în plus, planul α este paralel cu (ABC) , demonstrați că $MNPR$ este pătrat.



Activitate practică

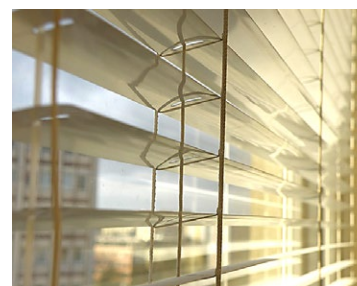
➤ Pe două bucăți de sfoară de aceeași lungime marcăm prin noduri mai multe poziții, astfel încât distanțele dintre ele să fie aceleași pe ambele sfuri:



Experimentul 1. Mai mulți elevi se așază în rând și fiecare dintre ei ține ambele sfuri de nodurile echivalente și ridică mâinile sus, bine întinse în plan vertical. Sfoara trebuie să fie bine întinsă. Primul dintre elevi trage de ambele sfuri, în lungul acestora, în același timp și cu aceeași deplasare. Observați pozițiile brațelor, inițial și după deplasare. Faceți analogie cu dreptele și planele paralele.

Experimentul 2. Sforile se leagă în jurul încheieturilor ambelor mâini ale fiecărui elev, astfel încât distanțele dintre ei să fie egale pe ambele sfuri (se folosesc nodurile pentru a stabili acest aspect). Fiecare elev ține câte o coală de carton între mâinile ridicate deasupra capului, astfel încât acestea (colile) să fie paralele între ele. Primul dintre elevi trage de una dintre sfuri. Ce observați?

➤ Observați jaluzelele din imaginea alăturată. Plecând de la experimentele anterioare și teoremele de paralelism studiate în cadrul ultimei lecții, explicați de ce lamelele jaluzelelor rămân paralele, indiferent de înclinația lor!



Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate

Secțiuni în prismă/cilindru

Exersăm împreună!

Ultima problemă din lecția anterioară a fost următoarea:

Considerăm o prismă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ și un plan α care intersectează muchiile AA' , BB' , CC' și DD' în punctele M , N , P , respectiv R .

a) Demonstrați că $MNPR$ este paralelogram.

b) Dacă, în plus, planul α este paralel cu (ABC) , demonstrați că $MNPR$ este pătrat.

Rezolvare.

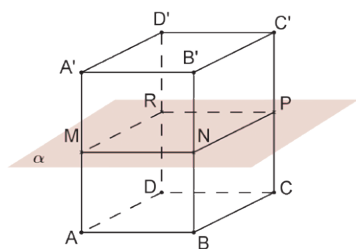
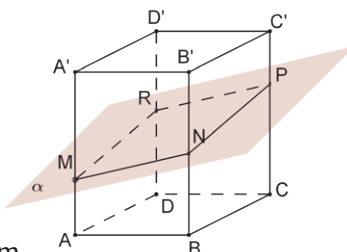
$$\left. \begin{array}{l} a) (ABB') \parallel (DCC') \\ \alpha \cap (ABB') = MN \\ \alpha \cap (DCC') = PR \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PR \text{ (teorema fierăstrăului).}$$

Analog se demonstrează că $NP \parallel MR$ și obținem astfel că $MNPR$ are laturile opuse paralele, deci este paralelogram.

b) Planele paralele α și (ABC) intersectate de planul (ABB') determină $MN \parallel AB$, iar intersectate de planul (BCC') determină $NP \parallel BC$. Rezultă $\angle(MN, NP) = \angle(AB, BC) = 90^\circ$.

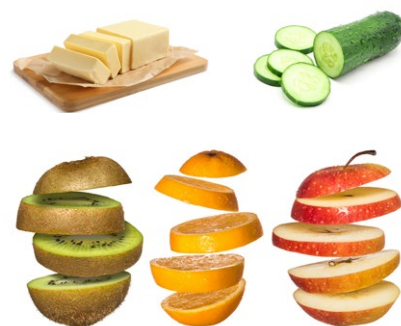
Se demonstrează că patrulaterele $ABNM$ și $BCPN$ sunt dreptunghiuri, deci $MN = AB = BC = NP$.

În concluzie, paralelogramul $MNPR$ are două laturi consecutive congruente și un unghi drept, deci este pătrat.



Activitate practică

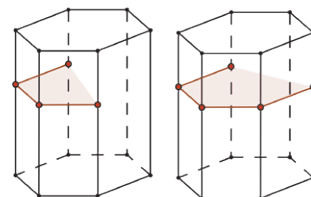
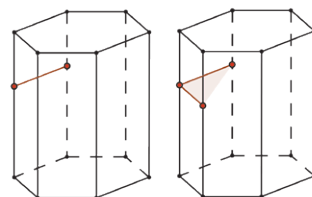
Identificați în jurul vostru obiecte având forma unor corpuri geometrice studiate, pe care le puteți tăia pentru a evidenția secțiunile:



Reflectăm!

Construcția secțiunii unei prisme cu un plan paralel cu bazele.

Este suficient ca din informațiile problemei să aflăm un punct comun între planul de secțiune și una dintre muchiile laterale. Parcurgem pașii evidențiați în desenul următor, prin construirea de paralele la laturile bazelor.



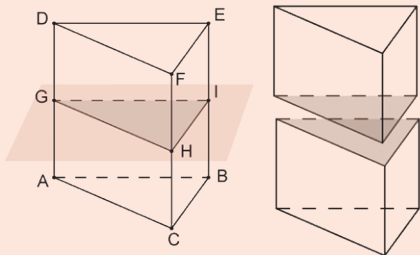
Definiție

Figura geometrică obținută prin intersecția unui corp geometric cu un plan se numește **secțiune**.

Rețineți!

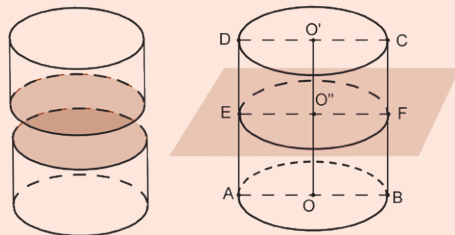
Secțiunea obținută în urma intersecției unei prisme cu un plan paralel cu baza este un poligon congruent cu baza prisme.

În urma secționării prisme se obțin două prisme de același tip cu cea inițială.



Secțiunea obținută în urma intersecției unui cilindru circular drept cu un plan paralel cu bazele este un cerc congruent cu cercul bazei.

În urma secționării cilindrului se obțin doi cilindri cu bazele congruente



Activitate practică

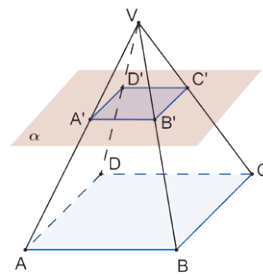
➤ Observați cilindrul și secțiunea cu planul paralel cu bazele acestuia. Recapitulând proprietățile învățate la plane paralele, studiați natura patrulaterului $ABFE$ și justificați de ce cercul de centru O'' și rază $O''E$ este congruent cu cercul bazei. Ați putea demonstra acest lucru folosind desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului?

➤ Folosiți o lanternă cu lumină puternică într-o cameră întunecoasă, pe care s-o proiectați pe un perete. Setați corpul geometric pe care îl delimitează fasciculul de lumină și urma fasciculului pe perete. Așezați o foaie de hârtie paralelă cu peretele între sursa de lumină și perete. Observați urma lăsată de lumină pe foaie. Poziționați foaia de hârtie la diferite distanțe și formulați concluzii privind proiecția fasciculului (mărimea acestuia). Faceți legătura dintre proiecția fasciculului de lumină pe foaie și secțiunile învățate.

Secțiuni în piramidă/con

Exersăm împreună!

Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ și un punct A' situat pe muchia VA a acesteia. Secționăm piramida cu un plan $\alpha \parallel (ABC)$, $A' \in \alpha$, care intersectează muchiile VB , VC și VD în punctele B' , C' , respectiv D' . Demonstrați că:



- $A'B' \parallel AB$;
- punctele V , M' și M sunt coliniare, unde M' și M sunt mijloacele segmentelor $B'C'$, respectiv BC ;
- $A'B'C'D'$ este pătrat;
- punctele V , O' și O sunt coliniare, unde O și O' sunt centrele pătratelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$;
- $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM}$.

Rezolvare. a) Planul (VAB) intersectează planele paralele α și (ABC) după dreptele $A'B' \parallel AB$.

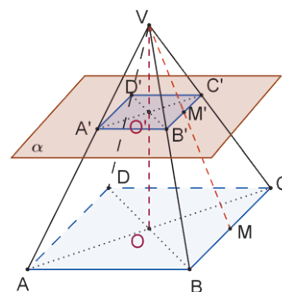
b) Mediana VM intersectează paralela $B'C' \parallel BC$ (demonstrați) în mijlocul segmentului $B'C'$, deci în M' .

c) Se demonstrează că:

- $A'B'C'D'$ este paralelogram, pentru că are laturile opuse paralele (demonstrați);
- $\angle A'B'C' = \angle ABC = 90^\circ$ (unghiuri cu laturi paralele);
- $A'C' \perp B'D'$.

e) Aplicând **teorema fundamentală a asemănării**:

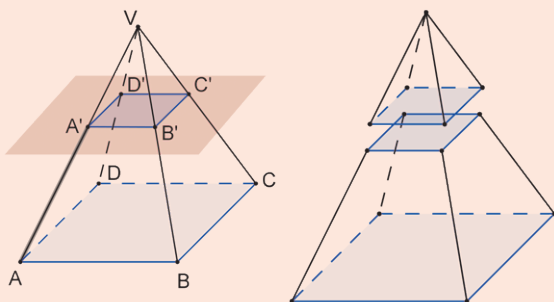
- în $\triangle VAB$, cu $A'B' \parallel AB$: $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VB'}{VB}$;
- în $\triangle VAO$, cu $A'O' \parallel AO$ (demonstrați): $\frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO}$;
- în $\triangle VBM$, cu $B'M' \parallel BM$: $\frac{VB'}{VB} = \frac{VM'}{VM}$ și concluzia.



Rețineți!

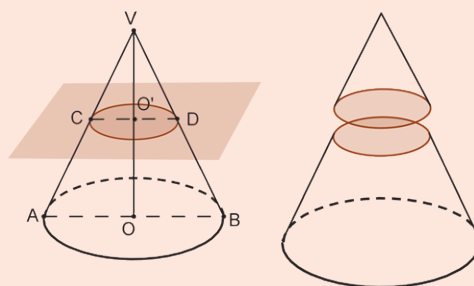
Prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza se obțin două corpuri geometrice:

- ✓ o piramidă – determinată de secțiune și vârful piramidei inițiale;
- ✓ un corp geometric delimitat (mărginit) de fețele laterale ale piramidei date și de cele două plane paralele (planul bazei și planul de secțiune).



Prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza se obțin două corpuri geometrice:

- ✓ un con circular drept – determinat de secțiune și vârful conului inițial;
- ✓ un corp geometric delimitat (mărginit) de suprafața laterală a conului dat și de cele două plane paralele (planul bazei și planul de secțiune).



Definiție

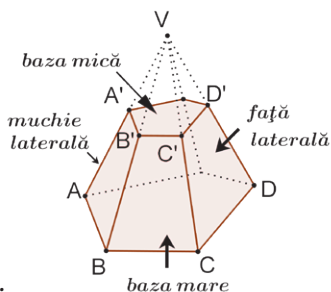
Corpul geometric obținut prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza și înlăturarea piramidei mici obținute se numește *trunchi de piramidă*.

Definiție

Corpul geometric obținut prin secționarea unui con cu un plan paralel cu baza și înlăturarea conului mic obținut se numește *trunchi de con circular drept*.

Elementele trunchiului de piramidă:

- ✓ două baze – poligoane asemenea – situate în plane paralele:
 - baza mare – suprafața delimitată de poligonul $ABCD$...
 - baza mică – suprafața delimitată de poligonul $A'B'C'D'$...
- ✓ muchii: laterale (AA' , BB' , CC' , ...) și ale bazelor (laturile poligoanelor bazelor)
- ✓ fețe laterale – trapezele rămase din fețele laterale ale piramidei în urma secționării și eliminării piramidei mici.

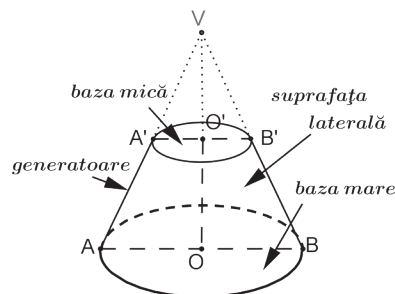


Au loc egalitățile:

$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = k$, unde k reprezintă raportul de asemănare, util în noi relații între piramida inițială și cea obținută prin secționarea acesteia.

Elementele trunchiului de con:

- ✓ două baze situate în plane paralele:
 - baza mare – suprafața delimitată de cercul de centru O și rază OA
 - baza mică – suprafața delimitată de cercul de centru O' (cercul de secțiune)
- ✓ generatoare – segmentul din generatoarea conului delimitat de cele două baze: AA' , BB'
- ✓ suprafața laterală.



Au loc egalitățile:

$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'O'}{AO} = \frac{VO'}{VO} = k$, unde k reprezintă raportul de asemănare, util în noi relații între conul inițial și cel obținut prin secționarea acestuia.



Reflectăm!

Uzual, pentru desenul unui trunchi de piramidă se va porni de la desenul unei piramide pe care apoi o secționăm. Însă nu este singura modalitate. Colaborați la nivelul clasei și stabiliți și alte reguli și etape de construcție a desenului unui trunchi de piramidă triunghiulară, a unui trunchi de piramidă patrulateră și a unui trunchi de piramidă hexagonală.



Piramida nișelor de la El Tajin

Fațada este decorată cu 365 de nișe, care pot reprezenta zilele anului solar.



Activitate în echipe

➤ În echipe de doi, colaborați pentru a reprezenta pe un carton desfășurarea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 12 cm, latura bazei mici de 6 cm și apotema de 4 cm. Ar putea fi util să vă reamintiți că, într-un trapez isoscel, dreapta ce unește mijloacele bazelor este mediatoare comună a acestora. Decupați desfășurarea realizată și construiți trunchiul de piramidă. Calculați lungimea apotemei și a muchiei piramidei din care provine trunchiul.

➤ În echipe de doi, colaborați pentru a reprezenta pe un carton desfășurarea unui trunchi de con.



Ne amintim!

Reamintim că două poligoane sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile respectiv proporționale.

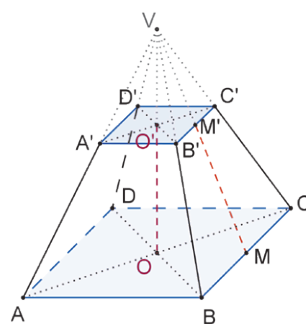
Definiție

Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, prin secționarea acesteia cu un plan paralel cu baza, atunci el se numește *trunchi de piramidă regulată*.

Distanța dintre muchiile corespunzătoare celor două baze și situate pe o față laterală se numește *apotema trunchiului de piramidă regulată*.

Exemplificând pentru trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ din reprezentarea alăturată, avem:

- ✓ fețele laterale sunt trapeze isoscele congruente;
- ✓ segmentul $M'M$, care reprezintă segmentul de pe apotema piramidei din care provine trunchiul situat între cele două baze, este o apotemă a trunchiului de piramidă;
- ✓ nu contează pe care față laterală construim apotema trunchiului de piramidă, lungimea acesteia este aceeași;
- ✓ apotema trunchiului se poate determina ca diferența $VM - VM'$ (diferența dintre apotema piramidei $VABCD$ și cea a piramidei formate prin secționare, $VA' B' C' D'$), corespunzând în același timp și înălțimii trapezelor ce reprezintă fețele laterale ale trunchiului de piramidă;
- ✓ într-un trunchi de piramidă regulată putem vorbi despre trei apoteme: apotema trunchiului de piramidă ($M'M$, în cazul nostru) și apotemele celor două baze (OM și $O'M'$);
- ✓ au loc egalitățile: $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM}$.



Reflectăm!

➤ În contextul în care un trunchi de piramidă se construiește prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza, desfășurarea lui se reprezintă ca o parte din desfășurarea piramidei din care provine.

➤ În contextul în care un trunchi de con se construiește prin secționarea unui con cu un plan paralel cu baza, desfășurarea lui se reprezintă ca o parte din desfășurarea conului din care provine.

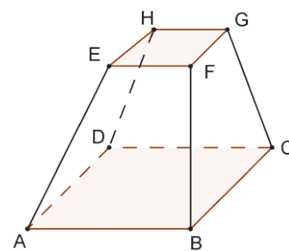


Activitate în cooperare

Prezentați corpurile construite de voi. De ce în cazul trunchiurilor de con construcțiile voastre pot fi diferite? Ce determină diferențele? Ce elemente ar conduce la standardizarea construcțiilor?

Exersați

1. Demonstrați că secțiunea obținută în urma intersecției unei prisme triunghiulare regulate cu un plan paralel cu bazele este un triunghi echilateral, congruent cu bazele prismei.
2. Cubul $ABCD A' B' C' D'$ este secționat cu un plan paralel cu (ABC) , care intersectează muchiile AA' , BB' , CC' și DD' în punctele E , F , G , respectiv H . Demonstrați că $EFGH A' B' C' D'$ este o prismă patrulateră regulată.
3. Pe muchiile prismei patrulateră regulate $ABCDEFGH$, $AB = 10$ cm și $AE = 15$ cm, considerăm punctele $A' \in AE$, $AA' = \frac{2}{3}AE$, $B' \in BF$, $B'F = \frac{1}{3}BF$ și $C' \in CG$, $CC' = 2C'G$.
 - a) Demonstrați că $(ABC) \parallel (A' B' C')$.
 - b) Dacă $DH \cap (A' B' C') = \{D'\}$, demonstrați că $ABCD A' B' C' D'$ este cub.
4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, considerăm punctele O_1 , O_2 , O_3 și O_4 centrele fețelor $ABB' A'$, $BCC' B'$, $CDD' C'$, respectiv $DAA' D'$.
 - a) Demonstrați că punctele O_1 , O_2 , O_3 și O_4 sunt coplanare.
 - b) Demonstrați că $(O_1 O_2 O_3) \parallel (ABC)$.
 - c) Dacă planul $(O_1 O_2 O_3)$ intersectează muchiile AA' , BB' , CC' și DD' în punctele M , N , P , respectiv R , calculați raportul dintre ariile patrulaterelor $O_1 O_2 O_3 O_4$ și $MNPR$.
5. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, considerăm punctele coplanare E , F , G și H situate pe muchiile AB , CD , $C' D'$, respectiv $A' B'$.
 - a) Demonstrați că $EFGH$ este paralelogram.
 - b) În ce condiții $EFGH$ este dreptunghi?
6. Observați corpul $ABCDEFGH$ din figura alăturată, în care $ABCD$ și $EFGH$ sunt dreptunghiuri cu dimensiunile $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm, $EF = 6$ cm și $FG = 5$ cm. Reprezintă el un trunchi de piramidă? Cum puteți verifica acest aspect folosind doar o riglă?
7. Desenați trunchiul de piramidă regulată $ABCDEF$ și puneți în evidență o apotemă și segmentul OO' , unde punctele O și O' sunt centrele bazelor.
8. Desenați un trunchi de con și segmentul OO' , unde punctele O și O' sunt centrele bazelor. Realizați o desfășurare a acestuia.
9. Ce corpuri geometrice se obțin dacă secționăm un trunchi de piramidă cu un plan paralel cu bazele acestuia?
10. Un trunchi de piramidă are bazele triunghiuri echilaterale cu lungimile laturilor de 3 cm, respectiv 9 cm, iar lungimile muchiilor laterale sunt egale cu 6 cm. Demonstrați că piramida din care provine trunchiul este tetraedru regulat.
11. Un con circular drept are raza bazei de 9 cm și se secționează cu un plan paralel cu baza, care intersectează o generatoare în mijlocul acesteia. Calculați aria secțiunii.
12. Într-un trunchi de con circular drept, lungimea razei bazei mari este 8 cm, a razei bazei mici 6 cm, iar lungimea generatoarei este 5 cm. Calculați lungimea generatoarei conului din care provine trunchiul.
13. Demonstrați că oricare două muchii laterale ale unui trunchi de piramidă sunt coplanare.
14. Realizați pe un carton o desfășurare a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 9 cm, latura bazei mici de 5 cm și apotema de 5 cm. Decupați desfășurarea realizată și construiți trunchiul de piramidă. Calculați lungimea apotemei piramidei regulate din care provine trunchiul.
15. Confectionați din carton un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei mari de 10 cm, latura bazei mici de 6 cm și apotema de 5 cm. Calculați lungimea apotemei piramidei din care provine trunchiul.
16. Pe muchia AB a tetraedrului $ABCD$ considerăm punctul M astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$. Construim prin M un plan paralel cu (BCD) , care intersectează muchiile AC și AD în punctele N , respectiv P . Calculați raportul perimetrelor și raportul ariilor triunghiurilor MNP și BCD .
17. Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 12$ cm și $VA = 15$ cm. Un plan paralel cu baza determină în piramidă o secțiune cu aria de 64 cm². Determinați lungimea laturii bazei mici și lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă obținut.

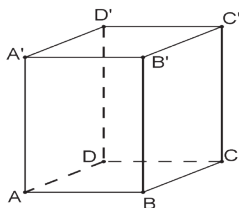


Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare



Test de autoevaluare

Cerințele 1–5 se referă la cubul $ABCD A'B'C'D'$ din reprezentarea alăturată. Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.



- Dintre următoarele drepte, cea paralelă cu dreapta $A'D'$ este:
a) BB' ; b) AB ; c) BC ; d) $D'C'$.
- Dintre următoarele perechi de drepte, cele necoplanare sunt:
a) AB, CD ; b) AB, CC' ; c) $AB, D'C'$; d) AB, BB' .
- Măsura unghiului dintre dreptele AD' și BC este egală cu:
a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 90° .
- Dintre următoarele drepte, cea paralelă cu planul (ABC') este:
a) $A'B'$; b) AD' ; c) $A'D'$; d) $D'C'$.

5. Măsura unghiului dintre dreptele $A'B$ și AD' este egală cu:

- a) 0° ; b) 30° ; c) 45° ; d) 60° .

Cerințele 6–9 se referă la textul:

Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ și punctele M și N mijloacele muchiilor VA , respectiv VB .

- Realizați desenul corespunzător cerinței.
- Demonstrați că $MN \parallel (ABC)$.
- Demonstrați că $(MNO) \parallel (VDC)$.
- Prin punctul M construim un plan α , paralel cu baza piramidei, care intersectează muchiile VC și VD în punctele P , respectiv R . Calculați raportul dintre aria secțiunii $MNPR$ și aria bazei $ABCD$.

Punctaj. 1p fiecare problemă. Din oficiu: 1p.

Timp de lucru: 50 de minute

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

- Dreptunghiul $ABCD$ are latura CD inclusă într-un plan α , iar $A \notin \alpha$. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor BC , respectiv AD .
a) Stabiliți poziția dreptelor AB, AM, MN față de planul α .
b) Dacă $BN \cap \alpha = \{P\}$, demonstrați că $P \in CD$ și $CP = 2CD$.
- Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. Determinați măsurile unghiurilor:
a) $\angle(AA', DC)$; b) $\angle(AB', CC')$; c) $\angle(AD, B'C')$;
d) $\angle(BC', AD)$; e) $\angle(A'C', BD)$; f) $\angle(AD', B'C)$.
- Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$ și punctele E și F mijloacele muchiilor $A'D'$, respectiv $D'C'$.
a) Demonstrați că punctele A, C, E și F sunt coplanare.
b) Calculați tangenta unghiului dintre AE și CC' .
c) Calculați sinusul unghiului dintre AE și BD .
d) Calculați sinusul unghiului dintre AE și DF .
- În tetraedrul $ABCD$, punctele E și F sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv ABD , punctul M este mijlocul laturii CD , iar muchiile AC și AD sunt congruente.
a) Determinați măsura unghiului dintre dreptele EF și AM .
b) Ce puteți spune despre dreapta de intersecție a planurilor (ACD) și (AEF) ?
- În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, punctele D și E sunt mijloacele muchiilor BC , respectiv BB' .
a) Demonstrați că $DE \parallel (A'B'C)$ și $B'C \parallel (ADE)$.
b) Sunt planele $(A'B'C)$ și (ADE) paralele?

6. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, punctele O_1 , O_2 și O_3 sunt centrele a trei dintre fețele laterale. Demonstrați că $(O_1 O_2 O_3) \parallel (ABC)$.

7. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu $SA = 4\sqrt{2}$ cm și $AB = 8$ cm. Punctele M și N sunt situate pe muchiile SA , respectiv SC astfel încât $SM = 2\sqrt{2}$ cm și $SC = 3SN$.

a) Determinați măsura unghiului dintre dreptele SA și BC .

b) Demonstrați că $MN \parallel (ABC)$.

c) Determinați aria secțiunii determinate în piramidă de un plan care conține punctul M și este paralel cu (ABC) .

8. Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ și punctul O , centrul pătratului $ABCD$.

a) Demonstrați că $VO \perp AC$ și $VO \perp BD$.

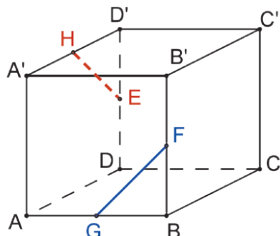
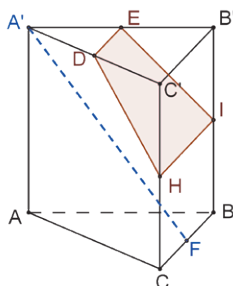
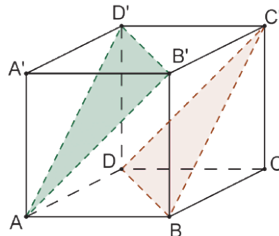
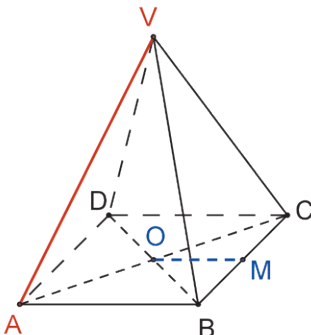
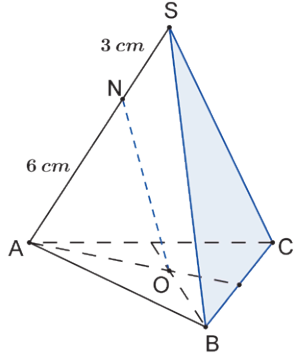
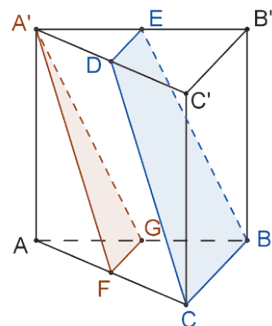
b) Determinați măsura unghiului dintre dreptele VO și AB .



Activitate practică

Concurs pe echipe

Împărțiți clasa în echipe și rezolvați următoarele cerințe. Este important ca fiecare membru al echipei să colaboreze în rezolvarea a cel puțin două dintre cerințe, iar la final să cunoască rezolvările tuturor cerințelor. Puteți folosi GeoGebra pentru a face propriile desene și a le roti, pentru a sesiza mai bine proprietățile figurilor.

Calculați măsura unghiului dintre dreptele evidențiate:	Justificați paralelismul dintre dreapta și planul evidențiate:	Justificați paralelismul planelor evidențiate:
$ABCD A' B' C' D'$ - cub E, F, G și H - mijloacele segmentelor corespunzătoare 	$ABCA' B' C'$ - prismă triunghiulară regulată D, E, F, H și I - mijloacele segmentelor corespunzătoare 	$ABCD A' B' C' D'$ - cub 
$VABCD$ - piramidă regulată cu toate muchiile congruente M - mijlocul muchiei BC 	$SABC$ - piramidă triunghiulară regulată O - centrul bazei ABC 	$ABCA' B' C'$ - prismă triunghiulară regulată D, E, F și G - mijloacele segmentelor corespunzătoare 

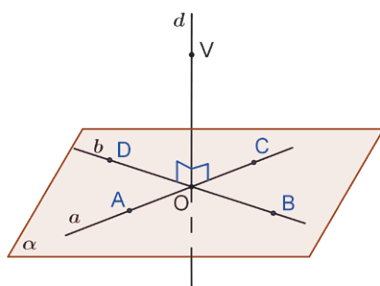
Perpendicularitate



Reflectăm!

În problema alăturată observăm că, prin construcția (definiția) piramidei regulate, dreapta VO este perpendiculară pe orice dreaptă din planul bazei. În cadrul demonstrației a fost utilă proprietatea punctului O de a fi centrul de simetrie al pătratului $ABCD$, precum și congruența fețelor piramidei.

Să considerăm două drepte concurente $a \cap b = \{O\}$, planul α determinat de ele și o dreaptă d , astfel încât $O \in d$, $d \perp a$ și $d \perp b$. Pe dreapta a considerăm punctele A și C simetrice față de O , iar pe dreapta b punctele B și D simetrice față de O . Dacă V este un punct oarecare al dreptei d , piramida $VABCD$ nu este o piramidă regulată, dar păstrează o parte dintre proprietățile unei astfel de piramide (muchii laterale opuse congruente, fețe laterale opuse congruente, O centrul de simetrie al paralelogramului $ABCD$). Completați figura următoare și, folosind strategia de rezolvare a problemei alăturate, demonstrați că dreapta d este perpendiculară pe orice dreaptă din planul α .



Dreaptă perpendiculară pe un plan



Ne amintim!

Două drepte sunt perpendiculare dacă măsura unghiului dintre ele este de 90° .

$$a \perp b \Leftrightarrow \sphericalangle(a, b) = 90^\circ$$



Exersăm împreună!

Reluăm ultima problemă din lecția anterioară și o extindem cu o cerință:

Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ și punctul O , centrul pătratului $ABCD$.

- Demonstrați că $VO \perp AC$ și $VO \perp BD$.
- Determinați măsura unghiului dintre dreptele VO și AB .
- Determinați măsura unghiului dintre VO și o dreaptă oarecare situată în planul (ABC) .

Rezolvare.

a) $\triangle VAC$ este isoscel, VO este mediană, deci și înălțime, așadar $VO \perp AC$; în mod analog se demonstrează $VO \perp BD$.

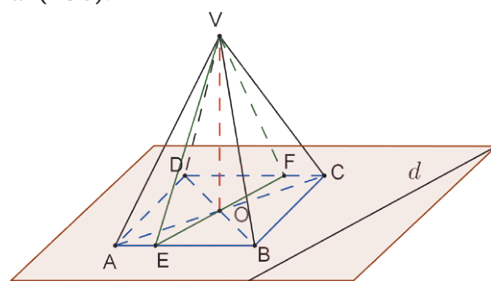
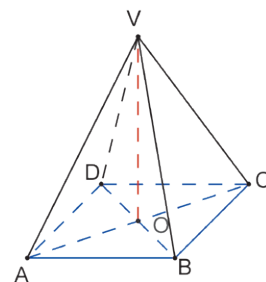
b) Construim prin O paralela $MN \parallel AB$, $M \in AD$ și $N \in BC$ (deci mijloacele laturilor respective!).

$\triangle VAD \equiv \triangle VBC \Rightarrow VM \equiv VN$ – sunt mediane corespunzătoare laturilor congruente AD și BC ; $MO \equiv ON$ (demonstrați), VO este mediană în $\triangle VMN$ isoscel, deci $VO \perp MN$.

În concluzie $\sphericalangle(VO, AB) = \sphericalangle(VO, MN) = 90^\circ$ sau, altfel spus, dreptele VO și AB sunt perpendiculare.

c) Construim prin O o paralelă la dreapta d care intersectează două dintre laturile opuse ale pătratului în punctele E și F . Obținem astfel că VO este mediană (demonstrați!) în $\triangle VEF$ isoscel (demonstrați!), deci $VO \perp EF$ și, cum $EF \parallel d$, rezultă că VO și d sunt perpendiculare.

Despre dreapta VO putem spune că este perpendiculară pe orice dreaptă din planul bazei piramidei.



Definiție

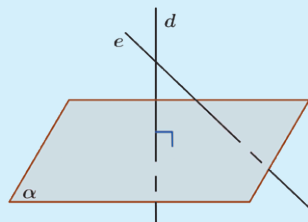
➤ O dreaptă este *perpendiculară pe un plan* dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

Notăm $d \perp \alpha$ și citim *dreapta d este perpendiculară pe planul α* .

$d \perp \alpha \Leftrightarrow d \perp a$, pentru orice dreaptă $a \subset \alpha$

➤ Despre o dreaptă care intersectează un plan și nu este perpendiculară pe acel plan spunem că este *oblică față de plan*.

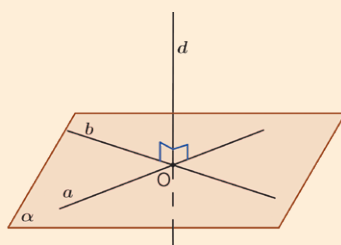
$e \not\perp \alpha, e \cap \alpha \neq \emptyset, e \cap \alpha \neq e$, e este oblică față de α



Teoremă

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe acel plan.

$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \neq b \\ a \cap b \neq \emptyset \\ d \perp a, d \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp \alpha$$



Activitate pe grupe

Colaborați la nivelul grupe pentru a răspunde întrebărilor formulate. Rețineți ideile care sprijină învățarea.

✓ Pentru a demonstra că o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α este suficient să demonstrăm că d este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan. Este nevoie ca punctul de intersecție al celor două drepte să coincidă cu punctul de intersecție dintre dreapta d și planul α ?

✓ De ce trebuie să verificăm perpendicularitatea pe două drepte concurente din plan? Folosind un creion (pe post de dreapta d) și o coală de hârtie (cu rol de plan α) pe care aveți desenată o dreaptă a , realizați o configurație în care $d \perp a$. Este neapărat $d \perp \alpha$?

✓ De ce este necesar ca cele două drepte să fie concurente? Mai desenați pe coala de hârtie o dreaptă $b \parallel a$. Dacă $d \perp a$, în ce relație este ea cu dreapta b ? Este neapărat $d \perp \alpha$?

Exersăm împreună!

Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$. Demonstrați că:

- $AB \perp (BB' C')$;
- $AB \perp BC'$ și $AB \perp B' C$;
- $ABC' D'$ dreptunghi.
- Calculați AC' , știind că $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm

și $CC' = 12$ cm.

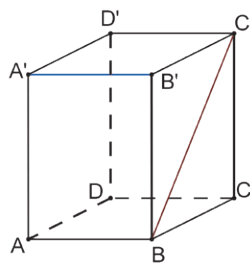
Rezolvare.

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp BC, AB \perp BB' \\ a) BC \cap BB' = \{B\} \\ BC, BB' \subset (BB' C') \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (BB' C') ;$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp (BB' C') \\ b) BC' \subset (BB' C') \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp BC'; \text{ demonstrați singuri că } AB \perp B' C;$$

c) $ABC' D'$ paralelogram (demonstrați) și $\angle ABC' = 90^\circ$ ($AB \perp BC'$), rezultă $ABC' D'$ este dreptunghi;

d) $\triangle ABC'$ dreptunghic ($AB \perp BC'$), deci putem aplica *teorema lui Pitagora* în acesta; se calculează mai întâi $BC' = \sqrt{153}$ cm în $\triangle BCC'$ și $AC' = 13$ cm.



Reflectăm!

➤ Referitor la problema alăturată, strategia de rezolvare a punctului b) a inclus folosirea rezultatului demonstrat la punctul anterior, respectiv perpendicularitatea dreptei AB pe planul $(BB' C')$, plan care conține și dreapta $B' C$. Folosind aceeași strategie, putem demonstra că $AB \perp CC'$.

Discutați în echipe o altă metodă pentru a demonstra această perpendicularitate, folosind măsura unghiului dintre două drepte necoplanare.

➤ Discutați în echipe și alte strategii de calcul al diagonalei AC' : una bazată pe perpendicularitatea lui CC' pe planul (ABC) și folosirea diagonalei AC a bazei; alta folosind perpendicularitatea lui $C' D'$ pe planul (ADD') și triunghiul dreptunghic $AD' C'$. Puteți generaliza o formulă de calcul al diagonalei unui paralelipiped dreptunghic?

➤ Comparați enunțurile referitoare la perpendicularitate corespunzătoare geometriei plane cu cele din geometria în spațiu, evidențiind asemănări și deosebiri. Stabiliți, în echipe, strategii de justificare a teoremelor și proprietăților.

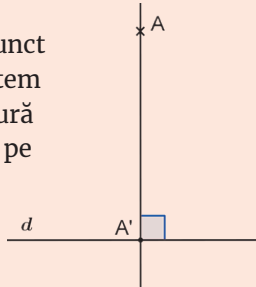


Perpendicularitate în plan și spațiu

PLAN

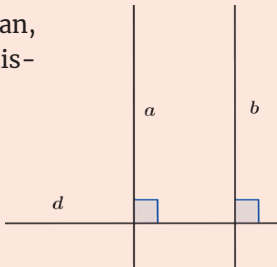
Teoremă.

Prin orice punct al unui plan putem construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată.

**Teoremă.**

Într-un plan, două drepte distincte, perpendiculare pe aceeași dreaptă, sunt paralele între ele.

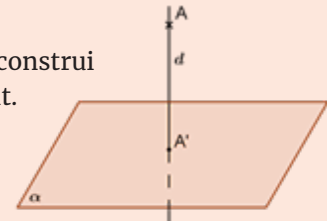
$$a \perp d, b \perp d, a \neq b \Rightarrow a \parallel b$$



SPAȚIU

Teoremă.

Prin orice punct al spațiului putem construi o singură perpendiculară pe un plan dat.

**Proprietate**

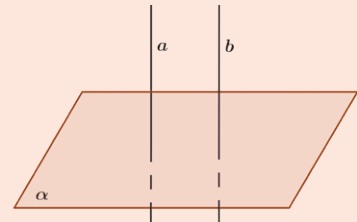
În spațiu, printr-un punct al unei drepte putem construi o infinitate de drepte perpendiculare pe dreapta dată.

Realizați un desen care să explice proprietatea.

Teoremă.

În spațiu, două drepte distincte, perpendiculare pe același plan, sunt paralele între ele.

$$a \perp \alpha, b \perp \alpha, a \neq b \Rightarrow a \parallel b$$

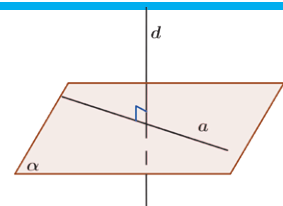
**Proprietate**

În spațiu, două drepte distincte, perpendiculare pe o aceeași dreaptă, pot fi paralele, concurente sau necoplanare.

Realizați desenele care să explice proprietatea.

Exersați

- În figura alăturată, dreapta a este inclusă în planul α , iar dreapta d este perpendiculară pe dreapta a . Este dreapta d perpendiculară pe planul α ?
- Considerăm un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$. Precizați, justificând alegerea, patru drepte perpendiculare pe fiecare dintre planele:
 - (ABC) ;
 - (BCG) ;
 - (CDH) .
- Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de 6 cm.
 - Demonstrați că $A'A \perp (ABC)$.
 - Demonstrați că $A'A \perp BD$.
 - Calculați lungimile segmentelor $A'B$ și $A'C$.
- Reprezentați planul α , punctele A și B aparținând planului și punctul C astfel încât $CB \perp \alpha$, $C \notin \alpha$.
 - Cum este dreapta CA față de planul α ?
 - Dacă $AB = 12$ cm și $BC = 16$ cm, calculați lungimea segmentului AC .
- Considerăm triunghiul ABC și punctul $M \notin (ABC)$ astfel încât $\angle MAB = \angle MAC = 90^\circ$. Punctul D este mijlocul segmentului BC .
 - Determinați măsura unghiului MAD . Se modifică măsura acestui unghi dacă punctul D este pe BC , dar nu la mijlocul segmentului?
 - Demonstrați că $MA \perp BC$.
- Dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic ABE , $\angle A = 90^\circ$, sunt în plane diferite. Demonstrați că:
 - $EA \perp DC$;
 - $BA \perp (AED)$;
 - $ED \perp DC$.



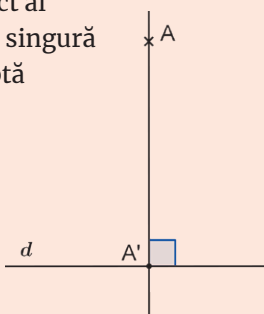
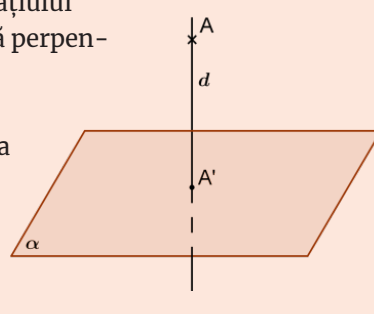
7. Pe planul triunghiului isoscel ABC , $AB = AC$, se ridică perpendiculara AD , $D \notin (ABC)$. Demonstrați că:
a) $DB \equiv DC$; b) $AD \perp BC$; c) $BC \perp (DAE)$, unde E este mijlocul segmentului BC .
8. În vârful B al triunghiului dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, se ridică perpendiculara $BM \perp (ABC)$, $M \notin (ABC)$. Demonstrați că $CA \perp (MAB)$.
9. Considerăm pătratul $ABCD$ și punctul $M \notin (ABC)$ astfel încât $MA \perp (ABC)$. Demonstrați că:
a) $BA \perp (MAD)$; b) $CB \perp (MAB)$; c) $DB \perp (MAC)$;
d) $NO \perp (ABC)$, unde N este mijlocul segmentului MC , iar O este centrul pătratului $ABCD$.
10. În tetraedrul $ABCD$, $AC \equiv AD$, $BC \equiv BD$, iar M este mijlocul muchiei CD . Demonstrați că $CD \perp (MAB)$.
11. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, în care $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara AM , iar $M \notin (ABC)$, $AM = 6$ cm.
a) Demonstrați că $BA \perp MC$. b) Calculați lungimea segmentului MB .
c) Demonstrați că triunghiul MBC este isoscel, dar nu echilateral.
12. Pe planul triunghiului echilateral ABC , cu latura de 6 cm, se ridică o perpendiculară în punctul A , pe care se alege punctul D astfel încât $AD = 3$ cm.
a) Demonstrați că $\triangle DBC$ este isoscel. b) Demonstrați că $DM = AB$, unde M este mijlocul segmentului BC .
13. Considerăm un dreptunghi $ABCD$, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AD = 4$ cm și un punct $M \notin (ABC)$ astfel încât $MA \perp (ABC)$ și $AM = 4$ cm.
a) Calculați MB , MC , MD și MO , unde $\{O\} = AC \cap BD$.
b) Determinați poziția punctului $E \in AC$ astfel încât $DE \perp (MAC)$.
14. Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$, $AB = 6$ cm, se ridică perpendiculara AM , $M \notin (ABC)$, astfel încât triunghiul MBF este echilateral.
a) Demonstrați că $AM = 6\sqrt{2}$ cm. b) Calculați MC și MD . c) Demonstrați că $DB \perp (MAB)$.

Aplicații

Distanța de la un punct la un plan



Rețineți!

ÎN PLAN	ÎN SPAȚIU
Teoremă. În plan, prin orice punct al acestuia putem construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată. Punctul A' (intersecția dintre dreaptă și perpendiculară) se numește <i>picioarul perpendicularei din punctul A pe dreapta d</i>. 	Teoremă. Prin orice punct al spațiului putem construi o singură perpendiculară pe un plan dat. Punctul A' (intersecția dintre plan și perpendiculară) se numește <i>picioarul perpendicularei din punctul A pe planul α</i>. 
Definiție. Numim <i>distanța de la un punct la o dreaptă</i> distanța de la punct la picioarul perpendicularei din punct pe dreaptă. $d(A, d) = AA', AA' \perp d, A' \in d$ Dacă $A \in d$, atunci $d(A, d) = 0$ (deoarece $A = A'$).	Definiție. Numim <i>distanța de la un punct la un plan</i> distanța de la punct la picioarul perpendicularei din punct pe plan. $d(A, \alpha) = AA', AA' \perp \alpha, A' \in \alpha$ Dacă $A \in \alpha$, atunci $d(A, \alpha) = 0$ (deoarece $A = A'$).



Activitate în echipă

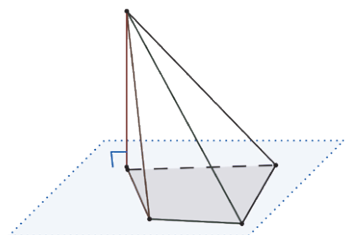
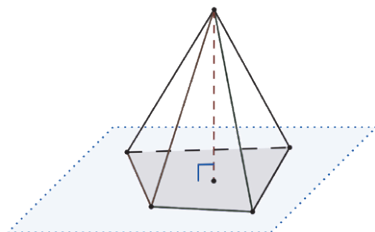
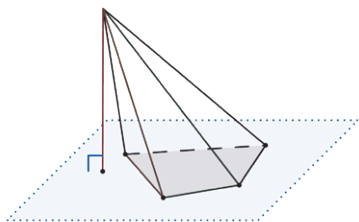
În cadrul primelor două cerințe ale problemei alăturate, calculul distanței s-a bazat pe identificarea perpendicularei din punctul respectiv pe plan, ca segment sau dreaptă deja construite, și pe demonstrarea perpendicularității. La a treia cerință a fost necesară construirea perpendicularei. Un prim pas în acest demers a fost identificarea unei perpendiculare pe plan, deja existentă în figură, și construcția paralelei la aceasta.

Folosind ideea de rezolvare a punctului c), studiați construcțiile necesare pentru determinarea distanței de la punctul M la celelalte fețe ale cubului. Comparați strategiile și desenele cu ale altor echipe.



Reflectăm!

Într-o piramidă, piciorul perpendicularei din vârf pe planul bazei poate să fie situat în exteriorul poligonului bazei, în interiorul acestuia, pe una dintre muchii sau să reprezinte unul dintre vârfurile bazei.



Exersăm împreună!

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm și $AA' = 12$ cm. Punctul M este situat pe segmentul AB' astfel încât $MB' = 3AM$. Calculați:

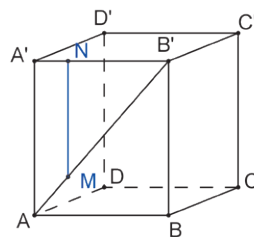
- a) $d(A', (ABC))$; b) $d(C, (ABB'))$; c) $d(M, (A'B'C'))$.

Rezolvare. a) $A'A \perp (ABC)$ (demonstrați) $\Rightarrow d(A', (ABC)) = A'A = 12$ cm;

- b) $CB \perp (ABB')$ (demonstrați) $\Rightarrow d(C, (ABB')) = CB = 5$ cm;

c) Observăm că $AA' \perp (A'B'C')$ și construim $MN \parallel AA'$, $N \in A'B'$, obținând astfel că $MN \perp (A'B'C') \Rightarrow d(M, (A'B'C')) = MN$; aplicând **teorema fundamentală a asemănării** în $\Delta B'AA'$, $MN \parallel AA'$, obținem $MN = 9$ cm.

Verificați calculul și finalizați rezolvarea.



Înălțimea unei piramide. Înălțimea unui con circular drept

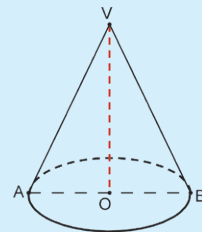
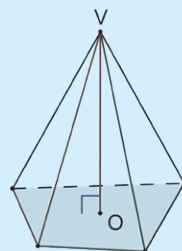
Definiție

➤ Numim **înălțime a unei piramide** distanța de la vârful acesteia la planul bazei.

Înălțimea piramidei din figura alăturată este reprezentată de segmentul VO , determinat de vârful piramidei și piciorul perpendicularei duse din vârf pe planul bazei. Prin **înălțime a piramidei** vom înțelege, după caz, atât segmentul VO , cât și lungimea acestuia.

➤ Numim **înălțime a unui con** distanța de la vârful acestuia la planul bazei.

Într-un con circular drept, perpendiculara dusă din vârf pe planul bazei trece prin centrul cercului bazei. Înălțimea conului circular drept din figura alăturată este reprezentată de segmentul VO . Prin **înălțime a conului** vom înțelege, după caz, atât segmentul VO , cât și lungimea acestuia.



Pentru triunghiul dreptunghic VOA din reprezentarea conului circular drept, stabiliți printr-o formulă legătura dintre generatoare, rază și înălțime.

Exersăm împreună!

Considerăm piramida triunghiulară regulată $VABC$ și înălțimea VO , $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$.

- a) Demonstrați că $OA \equiv OB \equiv OC$.

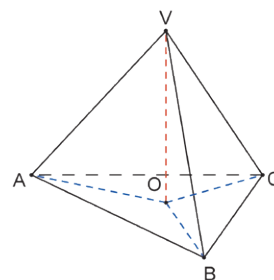
b) Dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $VA = 9$ cm, calculați înălțimea VO a piramidei.

Rezolvare.

- a) $VO \perp (ABC) \Rightarrow VO \perp OA, VO \perp OB$ și $VO \perp OC$.

$$\left. \begin{array}{l} VO \equiv VO \\ VA \equiv VB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{C.I.}} \Delta VOA \equiv \Delta VOB \Rightarrow OA \equiv OB \text{ și}$$

analog se obține $OA \equiv OC$



Putem afirma despre O că este centrul cercului circumscris triunghiului ABC (centrul triunghiului).

b) AO este egală cu două treimi din înălțimea triunghiului ABC , $AO = 6$ cm. Aplicând *teorema lui Pitagora* în $\triangle VOA$ obținem $VO = 3\sqrt{5}$ cm (verificați calculele).

Proprietate

Într-o piramidă regulată, piciorul perpendicularei din vârf pe planul bazei coincide cu centrul poligonului bazei (*piciorul înălțimii piramidei este centrul bazei*).

Observații

La introducerea corpului de tip piramidă regulată, pentru a fixa poziția pe care vârful piramidei trebuie să o ocupe în spațiu ne-am folosit de firul cu plumb. Observăm că proprietatea anterioară ne permite să realizăm desenul piramidei regulate cu ajutorul perpendicularei pe planul bazei prin centrul poligonului regulat al bazei.

Discutați la nivelul clasei și reamintiți-vă proprietăți ale centrelor poligoanelor regulate studiate!

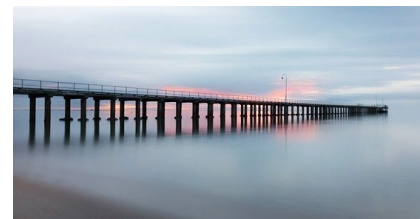


Reflectăm!

Într-un tetraedru, oricare dintre fețe poate fi considerată bază. Câte înălțimi are un tetraedru? Au ele aceeași lungime (valoare)? Dar dacă tetraedrul este regulat?

Formați echipe de câte doi și calculați lungimea înălțimii unui tetraedru regulat, folosind diverse valori pentru latura acestuia (observați etapele de calcul al înălțimii din problema anterioară). Comparați rezultatele între voi și discutați posibilitatea generalizării cu scrierea unei formule pentru lungimea înălțimii în funcție de lungimea laturii.

Folosind faptul că înălțimea corespunde bazei unei piramide triunghiulare regulate conține centrul bazei, explicați etapele de construcție a desenului acestui tip de piramidă.



Distanța dintre două plane paralele



Rețineți!

ÎN PLAN	ÎN SPAȚIU
Teoremă. Într-un plan, dacă două drepte sunt paralele, atunci orice perpendiculară pe una dintre ele este perpendiculară și pe cealaltă. $a \parallel b, d \perp a \Rightarrow d \perp b$ Două drepte distincte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele între ele. $a \neq b, a \perp d, b \perp d \Rightarrow a \parallel b$	Teoremă. În spațiu, dacă două plane sunt paralele, atunci orice perpendiculară pe unul dintre plane este perpendiculară și pe celălalt. $\alpha \parallel \beta, d \perp \alpha \Rightarrow d \perp \beta$ Două plane distincte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele între ele. $\alpha \neq \beta, \alpha \perp d, \beta \perp d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
Definiție. Numim <i>distanța dintre două drepte paralele</i> lungimea segmentului determinat de intersecțiile celor două drepte cu o perpendiculară comună. $a \parallel b, d \perp a, d \cap a = \{A\}, d \cap b = \{B\}, d(a, b) = AB$	Definiție. Numim <i>distanța dintre două plane paralele</i> lungimea segmentului determinat de intersecțiile celor două plane cu o perpendiculară comună. $\alpha \parallel \beta, d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{A\}, d \cap \beta = \{B\}, d(\alpha, \beta) = AB$

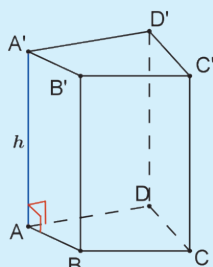
Înălțimea prisme drepte (a paralelipipedului dreptunghic) / a cilindrului circular drept

Definiție

Se numește *înălțime* a unei prisme distanța dintre planele bazelor.

Într-o prismă dreaptă, înălțimea este egală cu lungimea muchiei laterale a prisme.

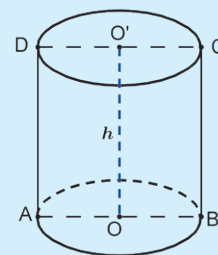
Prin *înălțime* a prisme drepte vom înțelege, după caz, atât segmentul reprezentat de oricare dintre muchiile laterale, cât și lungimea acestuia.



Se numește *înălțime* a unui cilindru distanța dintre planele bazelor.

În cilindrul circular drept, înălțimea este egală cu lungimea segmentului OO' (determinat de centrele bazelor).

Prin *înălțime* a cilindrului circular drept vom înțelege, după caz, atât segmentul OO' , cât și lungimea acestuia.



Observații

■ Despre paralelipipedul dreptunghic am spus că prin *răsturnarea* lui pe oricare dintre fețe se obține tot un paralelipiped dreptunghic (oricare dintre fețe poate deveni bază!). Așadar, lungimea muchiei care este perpendiculară pe bază va reprezenta înălțimea paralelipipedului dreptunghic respectiv, indiferent de *ășezarea* lui. Celălalte două tipuri de muchii (corespunzătoare bazelor) vor reprezenta lungimea și lățimea paralelipipedului.

■ Înălțimea unui cilindru circular drept este egală cu lungimea generatoarei acestuia. Justificați.

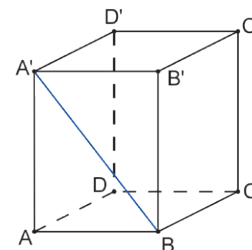
Exersăm împreună!

În prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, $AB = 8$ cm și $A'B = 12$ cm. Determinați:

- a) înălțimea prisme; b) distanța dintre planele (ABB') și (CDD') ; c) $d((BCC'), (ADD'))$.

Rezolvare.

- a) Din *teorema lui Pitagora* în $\triangle A'AB$, $AA' = 4\sqrt{5}$ cm, înălțimea prisme este de $4\sqrt{5}$ cm.
b) $DA \perp (ABB')$ (justificați) și $(ABB') \parallel (CDD')$, deci $d((ABB'), (CDD')) = AD = 8$ cm.
c) Analog punctului anterior, $d((BCC'), (ADD')) = 8$ cm.



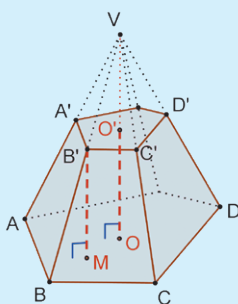
Înălțimea trunchiului de piramidă / a trunchiului de con circular drept

Definiție

Se numește *înălțime* a unui trunchi de piramidă distanța dintre planele bazelor.

Înălțimea trunchiului de piramidă, reprezentat în figura alăturată, corespunde segmentului OO' sau segmentului $B'M$ (aflate pe drepte perpendiculare pe baze).

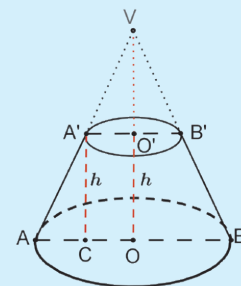
Prin *înălțime* a trunchiului de piramidă vom înțelege, după caz, atât segmentul, cât și lungimea acestuia.



Se numește *înălțime* a trunchiului de con circular drept distanța dintre planele bazelor.

Înălțimea trunchiului de con circular drept reprezentat în figura alăturată corespunde segmentului OO' (determinat de centrele bazelor) sau segmentului $A'C$.

Prin *înălțime* a trunchiului de con vom înțelege, după caz, atât segmentul, cât și lungimea acestuia.



Orice două înălțimi ale unui trunchi de piramidă sau ale unui trunchi de con circular drept sunt congruente. De obicei, alegem ca înălțime segmentul determinat de baze pe înălțimea corpului din care provine trunchiul.

Exersăm împreună!

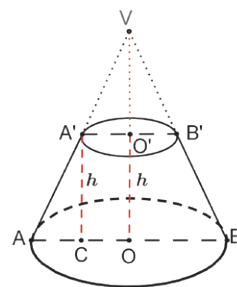
Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari de 12 cm, raza bazei mici de 8 cm și generatoarea de $\sqrt{65}$ cm. Calculați:

- a) înălțimea trunchiului de con; b) înălțimea conului din care provine trunchiul.

Rezolvare:

- a) $AC = AO - OC = 12 - 8 = 4$ cm; *teorema lui Pitagora în $\triangle A'AC$: $A'C = 7$ cm*

- b) $\frac{VO'}{VO} = \frac{A'O'}{AO}$ (justificați) $\Leftrightarrow \frac{VO'}{VO' + 7} = \frac{8}{12} \Rightarrow VO' = 14$ cm, deci înălțimea conului este de 21 cm.



Exersați

- Considerăm prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, $AB = 6$ cm și punctul D , mijlocul segmentului $B'C'$.
 - Demonstrați că $A'D \perp (BCC')$.
 - Calculați distanța de la A' la planul (BCC') .
 - Calculați înălțimea prisme, știind că $AD = 6\sqrt{3}$ cm.
 - Punctele M și N împart segmentul AD în trei segmente congruente. Determinați înălțimile celor două prisme obținute în urma secționării prisme cu un plan paralel cu bazele, care conține punctul M .
- Fie O centrul triunghiului echilateral ABC și un punct V aparținând perpendicularei în O pe planul triunghiului. Latura triunghiului ABC este de 12 cm, iar lungimea segmentului VA este de $4\sqrt{7}$ cm. Punctul M este situat pe muchia laterală VA , astfel încât $AM = \sqrt{7}$ cm.
 - Demonstrați că $VA \equiv VB \equiv VC$.
 - Calculați înălțimea piramidei.
 - Calculați distanța de la M la planul (ABC) .
 - Ce sunt cele două corpuri obținute prin secționarea piramidei $VABC$ cu un plan paralel cu (ABC) , construit prin punctul M ? Determinați înălțimile acestora (ca lungimi).
- Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$ și înălțimea ei SO , $O \in (ABC)$.
 - Demonstrați că O este centrul pătratului $ABCD$.
 - Calculați înălțimea piramidei dacă $AB = 14$ cm și $SA = 7\sqrt{6}$ cm.
 - Prin punctul $O' \in SO$, cu $SO' = 4$ cm, construim un plan α paralel cu baza. Calculați înălțimea, muchia și latura bazei mici a trunchiului de piramidă obținut în urma secționării piramidei $SABCD$ cu planul α .
- Calculați înălțimea unui con circular drept, știind că lungimea generatoarei acestuia este de 14 cm, iar lungimea razei bazei este de 10 cm. Determinați aria secțiunii și înălțimea trunchiului de con obținute în urma secționării conului printr-un plan ce conține un punct al generatoarei care împarte generatoarea în raportul $2/3$.
- Într-un trunchi de con circular drept, raza bazei mari este de 9 cm, raza bazei mici este de 3 cm, iar înălțimea trunchiului este de 8 cm. Calculați înălțimea și generatoarea conului din care provine trunchiul.
- Pe planul dreptunghiului $ABCD$, $AB = 11$ cm și $BC = 7$ cm, se ridică perpendicularele AA' și BB' , cu $A' \notin (ABC)$ și $B' \notin (ABC)$. Demonstrați că planele $(AA'D)$ și $(BB'C)$ sunt paralele și calculați distanța dintre ele.
- Considerăm un cub $ABCA'B'C'D'$ cu latura de 8 cm. Calculați:
 - $d(A, CD)$;
 - $d(B', CC')$;
 - $d(A', B'D')$;
 - $d(A', (BCC'))$;
 - $d(C, (ABB'))$;
 - $d(AA', BB')$;
 - $d(AA', CC')$;
 - $d(A'C', AC)$;
 - $d((ABC), (B'C'D'))$;
 - $d((A'AD), (C'CB))$;
 - $d((A'B'C'), (D'C'A'))$.
- Un cilindru circular drept cu înălțimea $OO' = 21$ cm este secționat cu un plan paralel cu bazele, care intersectează înălțimea OO' în punctul M astfel încât $2OM = 5MO'$. Calculați înălțimile celor doi cilindri obținuți în urma secționării.
- Un trunchi de piramidă patrulateră regulată este secționat cu un plan ce conține mijlocul înălțimii trunchiului. Dacă notăm cu S_B și S_b aria bazei mari, respectiv aria bazei mici a trunchiului de piramidă, și cu S aria secțiunii, demonstrați relația $\sqrt{S_B} + \sqrt{S_b} = 2\sqrt{S}$. Se păstrează relația dacă trunchiul de piramidă regulată are bazele triunghiuri?
- Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α , demonstrați că distanța de la orice punct al dreptei d la planul α reprezintă un segment de lungime constantă.
- Dacă două plane α și β sunt paralele, iar A și B sunt două puncte din planul α , demonstrați că distanțele de la punctele A și B la planul β sunt egale.



Aplicație practică

Folosind plastilina, modelați cât mai multe corpuri geometrice studiate.

Folosind un instrument de tăiat, tăiați în câte două părți (secționați) corpurile modelate. Imaginați tăieturile pentru a obține, după caz:

- tăieturi paralele cu baza;
- tăieturi care conțin înălțimea;
- tăieturi care conțin diagonale ale corpurilor.



Reflectăm!

În definiția 4 din cartea a XI-a din *Elementele lui Euclid*, acesta definește planele perpendiculare astfel:

Un plan este perpendicular pe un alt plan dacă dreptele incluse în unul dintre plane, perpendiculare pe dreapta de intersecție a planelor, sunt perpendiculare pe celălalt plan. Comparați cele două definiții și explicați de ce prima definiție acoperă definiția dată de Euclid. Faceți o analogie între aceste definiții și definiția și proprietățile dreptei perpendiculare pe plan!



Atenție!

Rețineți că, pentru a demonstra că o dreaptă este perpendiculară pe un plan:

- este *necesar* ca dreapta să fie perpendiculară pe cel puțin o dreaptă din planul respectiv;
- este *suficient* ca dreapta să fie perpendiculară pe toate dreptele planului;
- este *necesar și suficient* ca dreapta să fie perpendiculară pe exact două drepte concurente conținute în plan.

Formulați enunțuri similare de tip *necesar – suficient* în raport cu demonstrația perpendicularității a două plane!



Reflectăm!

Explicați de ce în prismele triunghiulare nu există secțiuni diagonale!

Plane perpendiculare

Aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate



Reflectăm!

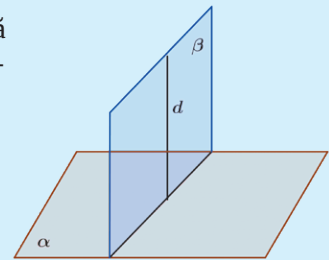
Discutați despre noile corpuri obținute în urma secționării, în cazul aplicației practice propuse. În ce cazuri s-au obținut părți asemenea corpurilor inițiale? Ce tip de suprafețe au fost obținute la tăiere?

Considerăm un plan α și o dreaptă d perpendiculară pe acesta. Construim prin dreapta d un plan β . Despre planul β spunem că este perpendicular pe planul α .

Definiție

Două plane sunt *perpendiculare* dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt:

$\beta \perp \alpha$ dacă există $d \subset \beta$ astfel încât $d \perp \alpha$



Rețineți!

Reținem o serie de consecințe ale teoremelor și definițiilor perpendicularității în spațiu:

Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci o perpendiculară construită dintr-un punct oarecare al unuia dintre plane pe celălalt plan este inclusă în primul plan.

Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci o perpendiculară construită dintr-un punct al unuia dintre plane pe dreapta de intersecție a celor două plane este perpendiculară pe al doilea plan.

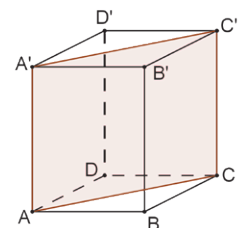


Exersăm împreună!

Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$. Demonstrați că $(AA' B') \perp (ABC)$ și că $(ACC') \perp (ABC)$.

Indicație. Planele $(AA' B')$ și (ACC') conțin dreapta $A' A \perp (ABC)$.

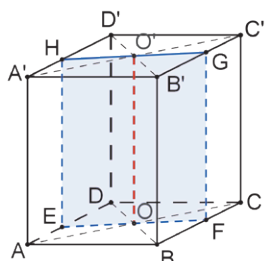
Planul (ACC') determină în prisma dată secțiunea $ACC' A'$, numită *secțiune diagonală*. Dreptunghiul $BDD' B'$ reprezintă altă *secțiune diagonală* a prismei. Precizați alte secțiuni diagonale prin prismă.



Rețineți!

O secțiune diagonală printr-o prismă este o secțiune care conține o diagonală a prisme și o latură a unei fețe a acesteia.

Exersăm împreună!



Considerăm prismă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, iar O și O' centrele bazelor $ABCD$, respectiv $A' B' C' D'$. Alegând un punct oarecare al prisme, simetricul său față de OO' este un punct situat tot pe prismă. Patrulaterul $EFGH$ este obținut prin secționarea prisme cu un plan ce conține dreapta OO' . Demonstrați că:

a) $EFGH$ este dreptunghi; b) $(EFGH) \perp (ABCD)$.

Indicație. Folosiți faptul că $OO' \perp (ABC)$ și proprietățile planelor paralele (teorema fierăstrăului).

Despre dreapta OO' spunem că este o *axă de simetrie* a corpului, iar secțiunea $EFGH$, obținută prin secționarea prisme cu planul ce conține axa OO' , o numim *secțiune axială*.

Rețineți!

O dreaptă este *axă de simetrie* a unui corp geometric dacă simetricul oricărui punct al corpului față de dreapta dată aparține corpului. Pentru un corp ce admite axă de simetrie, numim *secțiune axială* o secțiune prin corp determinată de un plan ce conține axa de simetrie.

Proiect

1. Împărțiți în grupe, desenați, apoi descrieți câte un tip de corp, din punctul de vedere al existenței, al numărului de axe de simetrie și al formelor diferitelor secțiuni axiale prin acesta, analizând:

– prismă dreaptă, cu baza:

a) paralelogram; b) dreptunghi; c) romb; d) pătrat; e) hexagon regulat;
– piramida în care proiecția vârfului pe planul bazei este centrul bazei, cu baza:

a) paralelogram; b) dreptunghi; c) romb; d) pătrat; e) hexagon regulat.
– trunchiul de piramidă în care dreapta determinată de centrele bazelor este perpendiculară pe baze, iar bazele sunt de formă:

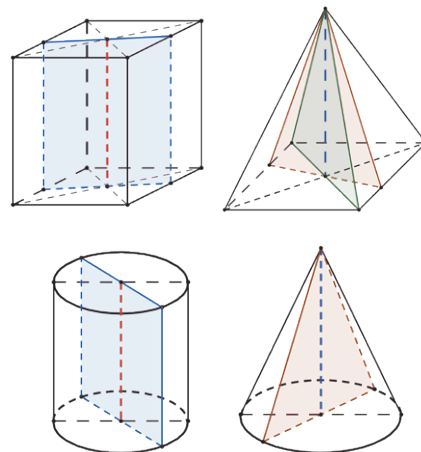
a) paralelogram; b) dreptunghi; c) romb; d) pătrat; e) hexagon regulat;
– cilindru circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept.

2. Explicați principiul de funcționare a unei roți de olărit și faceți legătura cu noțiunea de axă de simetrie.



Exemple

Exemple de corpuri ce admit axe de simetrie:



Refaceți desenele pe caiete și notați axele de simetrie în fiecare caz. Ce alte semnificații putem atribui acestora?



Proiect

Folosind un aparat de fotografiat, realizați fotografii ale unor obiecte din realitate (acasă, drumul spre școală, școală, obiecte personale sau construcții etc.) care vă sugerează că admit axe de simetrie. Prezentați fotografiile în cadrul orei și discutați asupra proprietăților de simetrie studiate. Evidențiați axa sau axele de simetrie, după caz. Evidențiați secțiuni axiale prin corpurile fotografiate și precizați ce figuri geometrice reprezintă. Cum trebuie făcută fotografia unui corp ce admite axă de simetrie, astfel încât conturul corpului fotografiat să aibă aceeași formă cu secțiunea axială?

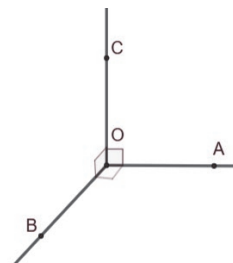


Reflectăm!

Ce tip de secțiuni putem construi printr-un tetraedru regulat? Argumentați!

Exersați

1. În figura alăturată sunt reprezentate semidreptele OA , OB și OC , perpendiculare două câte două. Demonstrați că planele (AOB) , (AOC) și (BOC) sunt, două câte două perpendiculare. Dacă M este un punct oarecare al dreptei AB , demonstrați că $(COM) \perp (AOB)$.



2. Considerăm prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ și punctul M , mijlocul segmentului $B'C'$. Demonstrați că:

a) $(A'AB) \perp (ABC)$; b) $(A'AM) \perp (BCC')$; c) $(A'MB) \perp (BCC')$.

3. Considerăm piramida triunghiulară regulată $SABC$, punctul M , mijlocul laturii AB și N un punct oarecare al segmentului SC . Demonstrați că $(SAB) \perp (SMC)$, $(SMC) \perp (ABC)$ și $(SMC) \perp (ABN)$.

4. În figura alăturată sunt reprezentate un pătrat $ABCD$ și $\triangle EAB$ isoscel, $EA \equiv EB$, situate în plane perpendiculare. Știind că $AB = 10$ cm și $EA = 13$ cm, calculați distanța de la E la planul (ABC) și distanța de la C la planul (EAB) .

5. O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm și înălțimea de $8\sqrt{2}$ cm. Demonstrați că secțiunea diagonală a prisme este un pătrat.

6. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ și punctele $\{O\} = AC \cap BD$, $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$, M mijlocul laturii AB și N un punct situat pe latura AB , diferit de M . Determinați ce figură geometrică este secțiunea obținută și ce corpuri geometrice se obțin în urma secționării prisme în fiecare dintre următoarele situații:

- secționăm prisma corespunzător planului care conține muchia AA' și diagonala AC' ;
- secționăm prisma corespunzător planului care conține muchia AB și diagonala AC' ;
- secționăm prisma corespunzător planului care conține punctul M și dreapta OO' ;
- secționăm prisma corespunzător planului care conține punctul N și dreapta OO' .

7. Considerăm prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ și planele $\alpha = (AA', CC')$, $\beta = (AA', DD')$ și $\delta = (AA', EE')$. Demonstrați că cele trei plane sunt perpendiculare pe planul bazei prisme. Determinați ce figură geometrică este secțiunea obținută și ce corpuri geometrice se obțin în urma secționării prisme cu:

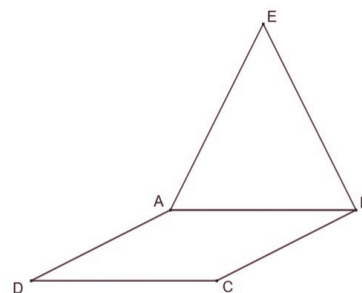
- planul α ;
- planul β ;
- planele α și β ;
- planele α , β și δ .

8. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$, O centrul pătratului $ABCD$ și M mijlocul segmentului BC .

- Demonstrați că $(SAC) \perp (ABC)$.
- Demonstrați că $(SAC) \perp (SBD)$.
- Demonstrați că $(SBC) \perp (SOM)$.
- Explicați cum construim o perpendiculară din punctul O pe planul (SBC) .
- Dacă latura bazei piramidei este de 7 cm, iar aria secțiunii prin piramidă determinate de planul (SAC) este de 35 cm^2 , calculați înălțimea piramidei.

9. O secțiune axială a unui con circular drept este triunghiul echilateral VAB , V vârful conului, cu latura de 6 cm. Desenați conul și o altă secțiune axială a acestuia ce conține punctul C situat pe unul dintre semicercurile $\widehat{AB}$, astfel încât $\widehat{AC} = 2 \cdot \widehat{CB}$. Calculați raza și înălțimea conului.

10. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria de 64 cm^2 . Determinați lungimea razei și a înălțimii cilindrului. Explicați cum desenați o altă secțiune axială a cilindrului astfel încât planele celor două secțiuni să fie perpendiculare.



Activitate în perechi

1. Folosiți cinci secțiuni printr-un con circular drept pentru a obține, după secționare, unul dintre corpuri de tip paralelipiped dreptunghic. Ce condiție ar trebui îndeplinită de con pentru ca prin cele cinci secțiuni să se obțină un cub (cu pierdere minimă de material)?

2. Care este valoarea de adevăr a următoarelor afirmații?

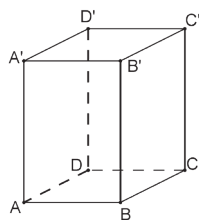
Având două plane perpendiculare, orice dreaptă inclusă în unul dintre plane este perpendiculară pe celălalt plan.

Orice două drepte situate fiecare în câte unul dintre două plane perpendiculare sunt perpendiculare.

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare

Test de evaluare

Cerințele 1–5 se referă la prisma patrulateră regulată $ABC-DA'B'C'D'$, în care cunoaștem $AB = 8$ cm și $BC' = 17$ cm. Alegeți li-
tera corespunzătoare răspunsului corect.



- Dintre următoarele drepte, cea perpendiculară pe planul (ABB') este:
a) AB ; b) CC' ; c) BC ; d) $D'C'$.
- O înălțime a prisme este:
a) AB ; b) CC' ; c) $B'C'$; d) $C'D'$.
- Distanța de la punctul C la planul $(A'B'C')$ este egală cu:
a) 17 cm; b) 15 cm; c) 10 cm; d) 8 cm.
- Distanța dintre planele (BCC') și (ADD') este egală cu:
a) 8 cm; b) 10 cm; c) 15 cm; d) 17 cm.

- Dacă $A'C' \cap B'D' = \{O\}$, atunci înălțimea piramidei $OABCD$ este egală cu:

a) 8 cm; b) 10 cm; c) 15 cm; d) 17 cm.

Cerințele 6–9 se referă la textul:

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara BM , $M \notin (ABC)$. Se cunosc $AB = 16$ cm, $BC = 9$ cm și $BM = 12$ cm.

- Demonstrați că $DA \perp (ABM)$.
- Arătați că planele (MBD) și (ABC) sunt perpendiculare.
- Calculați lungimile segmentelor AM și CM .
- Dacă E este piciorul perpendicularei din B pe MC , demonstrați că AE este înălțime în triunghiul ACM .

Punctaj: câte 1p problema și 1p din oficiu
Timp de lucru: 50 de minute.

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

- Considerăm un tetraedru regulat $ABCD$ și punctul E mijlocul muchiei AB . Demonstrați că $AB \perp (ECD)$.
- Considerăm triunghiul dreptunghic isoscel ABC , $\angle A = 90^\circ$, $AB = 8$ cm și punctul M mijlocul segmentului BC . Pe planul triunghiului se construiește perpendiculara MN , $N \notin (ABC)$, astfel încât triunghiul AMN este isoscel. Demonstrați că:
a) $BC \perp (MAN)$; b) $NA \equiv NB \equiv NC$;
c) $\triangle NAB$ este echilateral;
d) $AN \perp (BCP)$, unde P este mijlocul segmentului AN .
- Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendicularele AM și CN , cu M și N de aceeași parte a planului (ABC) . Se cunosc $AB = 10$ cm, $AM = 15$ cm și $CN = 10$ cm.
a) Demonstrați că punctele A , C , M și N sunt coplanare.
b) Demonstrați că $BD \perp (AMN)$ și calculați distanța de la B la planul (AMN) .
c) Demonstrați că $\triangle DMN \equiv \triangle BMN$.
d) Demonstrați că triunghiul BDN este echilateral.
e) Calculați lungimea segmentului MN .

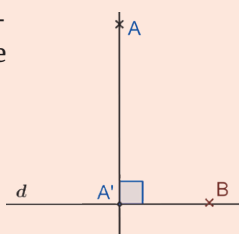
- Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD , $D \notin (ABC)$. Se cunosc $BC = 4$ cm, $AC = 4\sqrt{2}$ cm, $BD = 4\sqrt{6}$ cm și $CD = 4\sqrt{7}$ cm.
a) Calculați lungimea segmentului AD .
b) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.
c) Demonstrați că $CB \perp BD$.
- Considerăm triunghiul ABC , $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 7$ cm și o dreaptă d perpendiculară în A pe planul triunghiului. Calculați lungimea segmentului AD , $D \in d$, pentru care triunghiul DBC este dreptunghic.
- Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$, O centrul bazei $ABCD$, SM , cu $M \in BC$, apotema piramidei și P piciorul perpendicularei din O pe planul (SBC) . Se cunosc $AB = 10$ cm și $SO = 5\sqrt{3}$ cm.
a) Calculați lungimea muchiei piramidei.
b) Calculați lungimea apotemei piramidei.
c) Demonstrați că $(SBC) \perp (SOM)$.
d) Demonstrați că $OP \perp (SBC)$.
e) Calculați lungimea segmentului OP .

Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan

Rețineți!

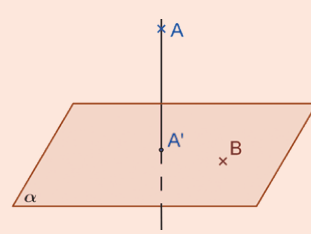
Se numește *proiecție ortogonală a unui punct pe o dreaptă* piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

- Notăm $pr_d A = A'$, $AA' \perp d$, $A' \in d$ și $A \notin d$.
- Dacă $B \in d$, $pr_d B = B$.



Se numește *proiecție ortogonală a unui punct pe un plan* piciorul perpendicularei duse din acel punct pe plan.

- Notăm $pr_\alpha A = A'$, $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$ și $A \notin \alpha$.
- Dacă $B \in \alpha$, $pr_\alpha B = B$.



Activitate în cooperare

Identificați la nivelul încăperii în care sunteți proiecții ale colțurilor pe planele determinate de pereți. Sunt aceste proiecții unice?

Discutați la nivelul clasei argumente care susțin ideea exprimată prin fraza:

Proiecția unui punct pe un plan este unică.

În cele ce urmează, ne vom exprima prin *proiecție* înțelegând că ne referim la *proiecția ortogonală*.

Reflectăm!

Figurile geometrice sunt mulțimi de puncte, deci pentru a proiecta o figură geometrică pe un plan proiectăm toate punctele figurii pe planul respectiv.



Exersăm împreună!

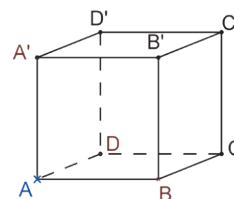
În cubul $ABCD A'B'C'D'$, determinați proiecțiile punctului A pe planele (BCC') , (CDD') , $(A'B'C')$, (BCD) .

Rezolvare.

$$AB \perp (BCC') \text{ și } B \in (BCC') \Rightarrow pr_{(BCC')} A = B;$$

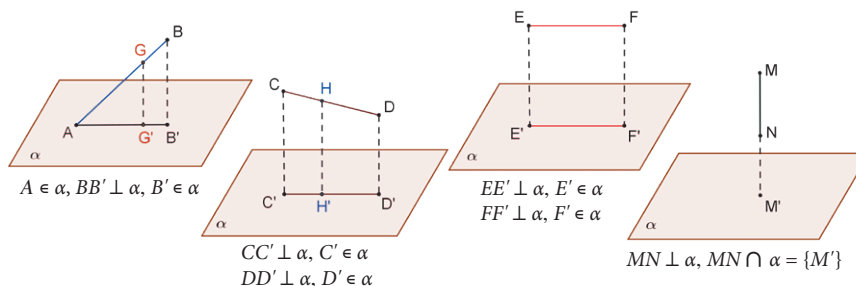
$$A \in (BCD) \Rightarrow pr_{(BCD)} A = A.$$

Determinați celelalte două proiecții.



Observații

Să observăm următoarele construcții geometrice:



✓ $A \in \alpha \Rightarrow pr_\alpha A = A$, $pr_\alpha B = B'$ și $pr_\alpha G = G'$, $G' \in AB'$; proiecția punctului G , ca punct ce aparține segmentului AB , este punctul G' , situat pe segmentul AB' .

✓ $pr_\alpha C = C'$, $pr_\alpha D = D'$, $pr_\alpha H = H'$; H este situat pe segmentul CD , iar proiecția lui este situată pe segmentul determinat de proiecțiile punctelor C și D ; $CC'D'D'$ este trapez dreptunghic și $CD > C'D'$ (CD nu este paralelă cu planul dat).

✓ Punctele unui segment inițial se proiectează pe un plan formând un segment, inclus în acel plan, determinat de proiecțiile capetelor segmentului inițial.

✓ Dacă $EF \parallel \alpha$, iar E' și F' sunt proiecțiile capetelor segmentului EF , atunci $EFF'E'$ este un dreptunghi și $EF = E'F'$.

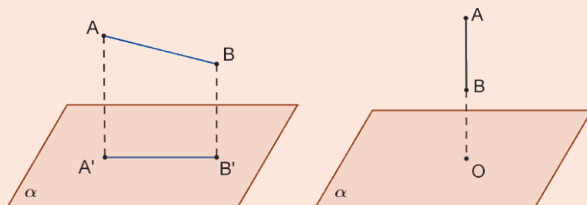
✓ Dacă $MN \perp \alpha$ și $MN \cap \alpha = \{M'\}$, atunci punctul M' reprezintă proiecția tuturor punctelor segmentului MN pe planul α .

Rețineți!

✓ Proiecția unui segment pe un plan este un segment sau un punct:

• $pr_{\alpha} AB = A'B'$, $A' = pr_{\alpha} A$, $B' = pr_{\alpha} B$, $A' \neq B'$, dacă AB nu este perpendicular pe planul α ; $A'B' \leq AB$;

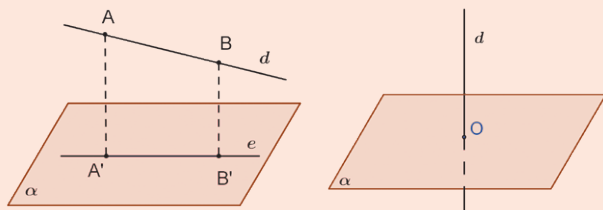
• $pr_{\alpha} AB = O$, $\{O\} = AB \cap \alpha$, dacă $AB \perp \alpha$.



✓ Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct:

• dacă o dreaptă nu este perpendiculară pe plan, proiecția sa este o dreaptă determinată de proiecțiile a două puncte ale dreptei d ; $pr_{\alpha} d = e$, dreapta e fiind determinată de proiecțiile A' și B' ale punctelor distincte A și B de pe dreapta d ;

• dacă o dreaptă d este perpendiculară pe plan, proiecția sa este punctul de intersecție al dreptei cu planul; $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{O\}$, $pr_{\alpha} d = O$.



Exersăm împreună!

În cubul $ABCD A'B'C'D'$, determinați proiecțiile segmentului AD' pe planele (ABC) , (CDD') și (BCC') .

Rezolvare.

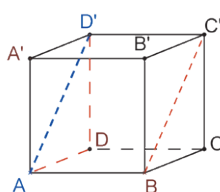
$D'D \perp (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)} D' = D$ și cum $A \in (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)} AD' = AD$;

$AD \perp (CDD') \Rightarrow pr_{(CDD')} A = D$ și cum $D' \in (CDD') \Rightarrow pr_{(CDD')} AD' = DD'$;

$AB \perp (BCC') \Rightarrow pr_{(BCC')} A = B$

$D'C' \perp (BCC') \Rightarrow pr_{(BCC')} D' = C' \Rightarrow pr_{(BCC')} AD' = BC'$.

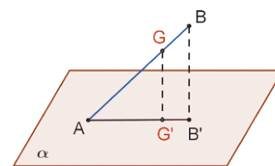
Ce reprezintă proiecția segmentului AD' pe planul (ADD') ?



Activitate în cooperare

Discutați observațiile făcute la imaginile anterioare.

Referitor la prima configurație, observând că punctul A și dreapta BB' formează un plan, răspundeți la următoarele întrebări:



$A \in \alpha$, $BB' \perp \alpha$, $B' \in \alpha$

• Care este poziția acestui plan față de planul α ?

• Ce legătură este între dreapta AB' și cele două plane?

• De ce proiecția punctului G este situată pe segmentul AB' ?

• Dacă G este mijlocul segmentului AB , unde se va situa G' pe AB' ?

• Mai general, ce puteți afirma despre proiecțiile a trei puncte coliniare (pe un plan)? Compuneți un set asemănător de întrebări pentru a studia și celelalte configurații.



Activitate pe grupe

Folosind desenul cubului de la problema alăturată formulați, lucrând pe grupe, raționamente pentru a determina următoarele proiecții de segmente: $pr_{(ABC)} AB'$; $pr_{(ABC)} AC'$; $pr_{(ABC)} BB'$; $pr_{(BCC')} AC'$. Prezentați-le colegilor din celelalte grupe și colaborați pentru a obține concluzii care sprijină învătarea. Propuneți celorlalte grupe determinarea unor proiecții de segmente pe cubul alăturat.



Proiect

Discutați la nivelul clasei sau pe grupe ce figuri se pot obține prin următoarele proiecții. Analizați situațiile particulare de poziționare a planelor figurilor în raport cu planul de proiecție, construind desene corespunzătoare ca parte a **portofoliului personal**.

- proiecția unui paralelogram pe un plan
 - proiecția unui dreptunghi pe un plan
 - proiecția unui pătrat pe un plan
 - proiecția unui triunghi echilateral pe un plan
 - proiecția unui triunghi isoscel pe un plan
 - proiecția unui triunghi dreptunghic pe un plan.
- Discutați la nivelul clasei concluziile.

Exersați

- Segmentul AB are capătul A situat într-un plan α și $B \notin \alpha$. Punctul B' este proiecția punctului B pe planul α . Realizați un desen conform datelor problemei și demonstrați că proiecția punctului M , mijlocul segmentului AB , pe planul α este mijlocul segmentului AB' .
- Reluați problema anterioară în condițiile în care $A \notin \alpha$, iar punctele A și B sunt situate de aceeași parte a planului α . Realizați un desen pentru cazul în care A și B nu sunt situate de aceeași parte a planului α și nu aparțin planului, iar $AB \cap \alpha = \{M\}$, care este mijlocul segmentului AB . Identificați un paralelogram care are ca diagonală segmentul AB . Comparați între voi identificările făcute, justificându-le.
- Trei puncte coliniare A , B și C se proiectează pe un plan în punctele distincte A' , B' , respectiv C' . Demonstrați că $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.
- Proiecția unui triunghi ABC pe un plan α este triunghiul $A'B'C'$. Demonstrați că proiecția centrului de greutate al triunghiului ABC pe planul α reprezintă centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.
- În piramida patrulateră regulată $VABCD$, punctul O este centrul bazei $ABCD$, iar punctul M este mijlocul segmentului BC . Determinați:
 - $pr_{(ABC)} V$; b) $pr_{(VAC)} B$; c) $pr_{(VOM)} B$; d) $pr_{(ABC)} VA$;
 - $pr_{(ABC)} VO$; f) $pr_{(ABC)} VM$; g) $pr_{(VAC)} VB$; h) $pr_{(VAC)} AB$; i) $pr_{(VOM)} VB$.
- În piramida triunghiulară regulată $VABC$, punctul O este centrul bazei ABC , iar punctul M este mijlocul segmentului BC . Determinați:
 - $pr_{(ABC)} V$; b) $pr_{(ABC)} AV$; c) $pr_{(ABC)} VM$; d) $pr_{(VAM)} AC$; e) $pr_{(VAM)} VB$; f) $pr_{(VAM)} BC$.
- În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, punctele M și M' sunt mijloacele segmentelor BC , respectiv $B'C'$. Determinați:
 - $pr_{(ABC)} AB'$; b) $pr_{(ABC)} CB'$; c) $pr_{(ABC)} A'M$; d) $pr_{(ABC)} A'B'$; e) $pr_{(BCC')} AA'$; f) $pr_{(AMM')} AB'$.
- În prisma patrulateră regulată $ABCA'D'B'C'D'$, punctele O și O' sunt centrele bazelor. Determinați:
 - proiecția lui AD' pe planele (ABC) , $(A'B'C')$, (BCC') și (ABB') ;
 - proiecția lui BD' pe planele (ABC) , $(A'B'C')$, (ADD') și (ABB') ;
 - proiecția pe planul (BDD') a segmentelor AA' , AD' , AB și AD .
- Considerăm cubul $ABCA'D'B'C'D'$, $AB = 6$ cm și punctul M mijlocul laturii $B'C'$. Determinați lungimile proiecțiilor:
 - $pr_{(ABC)} AB'$; b) $pr_{(ABC)} AC'$; c) $pr_{(ABC)} A'C'$; d) $pr_{(ABC)} AM$; e) $pr_{(DCC')} AM$.
- Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu toate muchiile de lungime 8 cm, și O centrul bazei $ABCD$. Demonstrați că lungimile proiecțiilor $pr_{(ABC)} VA$, $pr_{(VAC)} AB$ și $pr_{(VAC)} VB$ sunt egale.
- Triunghiul echilateral ABC , cu latura de 10 cm, are latura BC inclusă într-un plan α și punctul $A \notin \alpha$. Punctul A' este proiecția punctului A pe planul α .
 - În ce condiții $A' \in BC$? b) Dacă $\angle BA'C = 90^\circ$, calculați AA' . c) Poate fi măsura unghiului $BA'C$ de 60° ?
- Dacă a și b sunt două drepte paralele, ce puteți spune despre proiecțiile lor pe un plan α ?
- Unghiul ABC are măsura de 90° și latura AB paralelă cu un plan α . Punctele A' , B' și C' sunt proiecțiile punctelor A , B , respectiv C pe planul α . Demonstrați că: a) $AB \perp (BCC')$; b) $\angle A'B'C' = 90^\circ$.
- Considerăm un plan α și două drepte perpendiculare a și b neconținute în acesta. Dacă proiecțiile dreptelor a și b pe planul α sunt perpendiculare, demonstrați că $a \parallel \alpha$ sau $b \parallel \alpha$.
- Secționăm piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu un plan paralel cu baza ce conține mijlocul înălțimii și fie $A'B'C'D'$ secțiunea obținută.
 - Ce figură geometrică este proiecția patrulaterului $A'B'C'D'$ pe planul (ABC) ?
 - Calculați aria proiecției patrulaterului $A'B'C'D'$ pe planul (ABC) , știind că $AB = 16$ cm.
- Considerăm un plan α și punctele distincte A , B , C astfel încât $A = pr_\alpha B$ și $AC \subset \alpha$.
 - Demonstrați că $B \notin \alpha$ și că $(ABC) \perp \alpha$.
 - Dacă D este un punct astfel încât $DC \perp (ABC)$, demonstrați că $D \in \alpha$ și calculați măsura unghiului dintre dreptele AB și CD .

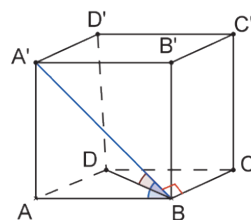
Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Exersăm împreună!

În cubul $ABCD A'B'C'D'$, dreapta $A'B$ formează:

- cu AB unghi cu măsura de 45° ;
- cu BD unghi cu măsura de 60° ($\triangle A'BD$ este echilateral);
- cu BC unghi drept.

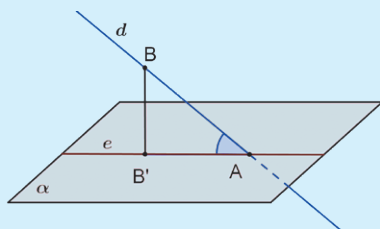
Dintre cele trei măsuri de unghiuri formate de $A'B$ cu cele trei drepte din planul (ABC) , cea mai mică este cea formată cu proiecția dreptei $A'B$ pe planul (ABC) .



Definiție

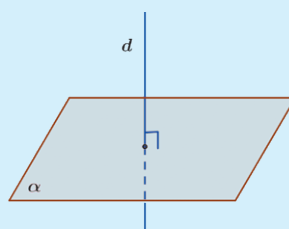
Unghiul dintre o dreaptă care nu este perpendiculară pe un plan și planul respectiv este unghiul dintre acea dreaptă și proiecția ei pe plan.

Dacă $d \not\perp \alpha$,
 $\angle(d, \alpha) = \angle(d, e)$, unde $e = pr_\alpha d$.



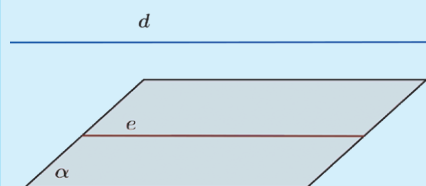
Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, atunci unghiul dintre dreaptă și plan este unghi drept.

Dacă $d \perp \alpha$,
 atunci $\angle(d, \alpha) = 90^\circ$.



Dacă dreapta este paralelă cu planul sau inclusă în acesta, atunci măsura unghiului dintre dreaptă și plan este de 0° .

Dacă $d \parallel \alpha$,
 $\angle(d, \alpha) = 0^\circ$ sau $e \subset \alpha$,
 $\angle(e, \alpha) = 0^\circ$.

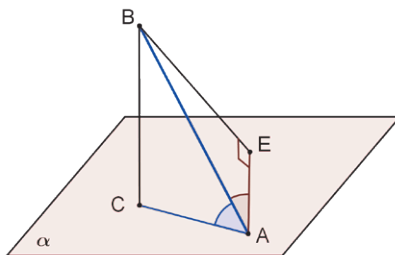


Exersăm împreună!

Considerăm un plan α și segmentul AB , $A \in \alpha$ și $B \notin \alpha$. Punctul C este proiecția punctului B pe planul α , deci AC este proiecția lui AB pe planul α . În planul α considerăm o dreaptă diferită de AC și un punct E pe aceasta, astfel încât $BE \perp AE$. Comparați măsurile unghiurilor BAC și BAE .

Rezolvare.

În $\triangle BAC$, $\angle C = 90^\circ$, $\sin BAC = \frac{BC}{AB}$, iar în $\triangle BAE$, $\angle E = 90^\circ$ și $\sin BAE = \frac{BE}{AB}$.
 $BC \perp \alpha \Rightarrow BC < BE$ (justificați), deci $\sin BAC < \sin BAE$, ceea ce implică faptul că $\angle BAC < \angle BAE$.



Reflectăm!

În aplicația alăturată se stabilește o analogie între distanța de la un punct la un plan și măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan. Astfel, așa cum distanța de la un punct la un plan este cea mai mică dintre distanțele de la respectivul punct la punctele din plan, la fel măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan este cea mai mică dintre măsurile unghiurilor formate de acea dreaptă cu dreptele din planul dat.

Rețineți!

- ✓ Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan este cuprinsă între 0° și 90° , putând lua inclusiv valorile de 0° (dreaptă paralelă cu planul sau inclusă în plan) și de 90° (dreaptă perpendiculară pe plan).
- ✓ Unghiul dintre o dreaptă și un plan este cel mai mic dintre unghiurile formate de acea dreaptă cu dreptele din planul dat.



Reflectăm!

Discutați în perechi legătura între poziția unei drepte față de un plan, proiecțiile dreptei pe plan și măsurile unghiului dintre dreaptă și plan. Formulați fiecare câte o cerință pentru colegul pereche. Evaluați răspunsul colegului.



Știați că?

Turnul din Pisa este cea mai faimoasă clădire înclinată din lume și punctul de reper al orașului Pisa din Italia. În 1990 turnul era aplecat la un unghi de 5,5 grade în raport cu o verticală a locului, dar în urma lucrărilor de remediere, între 1993 și 2001, acesta a fost redus la 3,97 grade. În aceste condiții, care este măsura unghiului dintre turn și planul bazei?



Reflectăm!

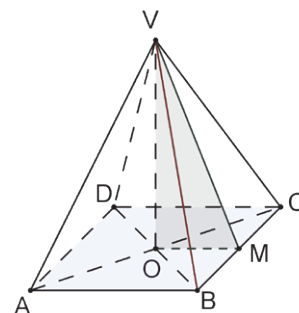
Ce relație putem stabili între lungimea segmentului AB și lungimea proiecției lui pe un plan, $A'B'$, dacă $AB \parallel \alpha$? Ce puteți spune despre $A'B'$, dacă $AB \perp \alpha$?

Exersăm împreună!

Considerăm o piramidă patrulateră $VABCD$ cu toate muchiile de lungime 10 cm, punctul O centrul pătratului $ABCD$ și punctul M mijlocul segmentului BC . Determinați $\angle(VB, (ABC))$, $\angle(VB, (VOM))$, $\angle(VM, (ABC))$ și măsura sau cosinusul acestor unghiuri.

Rezolvare

- ✓ $pr_{(ABC)} VB = OB \Rightarrow \angle(VB, (ABC)) = \angle VBO$; $BO = 5\sqrt{2}$ cm, $VO = 5\sqrt{2}$ cm (calculați), deci $\triangle VOB$ este dreptunghic isoscel, $\angle VBO = 45^\circ$.
- ✓ $pr_{(VOM)} VB = VM$ (justificați), $\angle(VB, (VOM)) = \angle BVM = 30^\circ$.
- ✓ $pr_{(ABC)} VM = OM \Rightarrow \angle(VM, (ABC)) = \angle VMO$; $OM = 5$ cm, $VO = 5\sqrt{2}$ cm, $VM = 5\sqrt{3}$ cm și $\cos VMO = \frac{OM}{VM}$, deci $\cos VMO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Observații

✓ Dacă la determinarea măsurii unui unghi se folosesc elementele de trigonometrie (sinus, cosinus, tangent sau cotangent), iar rapoartele asociate lor reprezintă rapoarte din tabelele studiate, se va finaliza cu menționarea uneia dintre măsurile unghiului, după caz, de 0° , 30° , 45° , 60° sau 90° ; în caz contrar, referirea la unghi se va face prin elementele de trigonometrie.

✓ Referitor la problema anterioară, OM este proiecția segmentului VM pe planul bazei, iar $\angle VMO$ este unghiul dintre VM și planul bazei; în triunghiul dreptunghic VMO am stabilit relația $\cos VMO = \frac{OM}{VM}$.

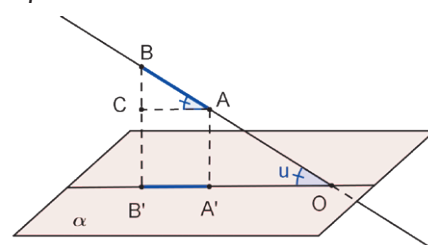
✓ Este adevărată afirmația: Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan dat este egală cu măsura unghiului dintre dreaptă și orice alt plan paralel cu planul dat? Argumentați.

✓ Discutați la nivelul clasei și evidențiați pașii de construcție a unghiului dintre o dreaptă și un plan (dreapta nu este nici paralelă cu planul, nici inclusă în plan). Notați pașii pe caiete!

Lungimea proiecției unui segment pe un plan.

Considerăm un plan α și un segment AB astfel încât $\angle(AB, \alpha) = u^\circ \in (0^\circ; 90^\circ)$. Dacă $A'B'$ este proiecția segmentului AB pe planul α , atunci $A'B' = AB \cdot \cos u$.

Indicație. Construim $AC \parallel A'B'$, $C \in BB'$, $\angle BAC = u^\circ$ și $AC = A'B'$.



Exersați



- Care este poziția unei drepte d în raport cu un plan α , dacă:
a) $\angle(d, \alpha) = 0^\circ$; b) $\angle(d, \alpha) = 40^\circ$; c) $\angle(d, \alpha) = 90^\circ$?
- Ținem un creion cu vârful pe o masă, astfel încât lungimea proiecției lui pe masă să fie egală cu jumătate din lungimea lui. Determinați măsura unghiului format de creion cu planul mesei.
- Un segment MN , cu lungimea de 12 cm, se proiectează pe un plan α după un segment $M'N'$. Calculați lungimea segmentului $M'N'$ în cazurile:
a) $MN \parallel \alpha$; b) $\angle(MN, \alpha) = 30^\circ$; c) $\angle(MN, \alpha) = 45^\circ$; d) $\angle(MN, \alpha) = 60^\circ$.
- Considerăm un plan α , un segment AB exterior acestuia și $A'B' = pr_\alpha AB$. Determinați lungimea segmentului AB în fiecare dintre cazurile:
a) $\angle(AB, \alpha) = 0^\circ$ și $A'B' = 9$ cm; b) $\angle(AB, \alpha) = 30^\circ$ și $A'B' = 6$ cm;
c) $\angle(AB, \alpha) = 45^\circ$ și $A'B' = 5$ cm; d) $\angle(AB, \alpha) = 60^\circ$ și $A'B' = 8$ cm.
- Proiecția segmentului AB pe un plan α este segmentul CD . Calculați tangenta unghiului dintre AB și α dacă $CD = \frac{4}{5}AB$.
- Dintr-un punct A exterior unui plan α se construiesc două oblice, care intersectează planul în punctele B și C . Dacă $AB = 20$ cm, $AC = 16$ cm și proiecția segmentului AB pe plan are lungimea de 15 cm, calculați cosinusul unghiului dintre AC și planul α .
- În piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu O centrul bazei $ABCD$ și M mijlocul segmentului BC , precizați:
a) $\angle(SA, (ABC))$; b) $\angle(SA, (SBD))$; c) $\angle(SM, (ABC))$; d) $\angle(SB, (SOM))$.
- În piramida triunghiulară regulată $SABC$, cu O centrul bazei ABC și M mijlocul segmentului BC , precizați:
a) $\angle(SA, (ABC))$; b) $\angle(SM, (ABC))$; c) $\angle(SB, (SOM))$.
- Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic isoscel. Calculați măsura unghiului dintre o generatoare a conului și planul bazei.
- În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 8$ cm și $AA' = 8\sqrt{2}$ cm, calculați:
a) măsura unghiului dintre BD' și (ABC) ;
b) măsura unghiului dintre BD' și (BCC') ;
c) tangenta unghiului dintre AD' și (ABC) ;
d) lungimea proiecției segmentului AD' pe (BDD') .
- În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, $AB = 8$ cm, $AA' = 8\sqrt{3}$ cm, punctul M este mijlocul laturii BC .
a) Determinați măsura unghiului dintre AC' și (ABC) .
b) Determinați tangenta unghiului dintre $C'M$ și (ABC) .
c) Demonstrați că $AM \perp (BCC')$.
d) Determinați lungimea proiecției segmentului AC' pe (BCC') .
e) Calculați sinusul unghiului dintre AC' și (BCC') .
- În piramida triunghiulară $VABC$, muchiile laterale formează cu planul (ABC) unghiuri cu măsuri egale. Demonstrați că fețele laterale sunt triunghiuri isoscele și că piciorul înălțimii din V pe baza ABC este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .



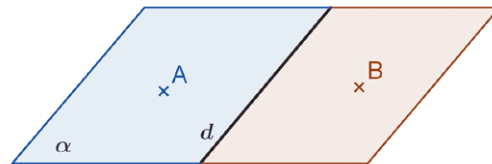


Unghi diedru, unghi plan corespunzător unghiului diedru. Unghiul a două plane



Ne amintim!

O dreaptă delimitează într-un plan două semiplane. Dreapta respectivă este *frontiera* celor două semiplane.



Pentru desenul alăturat, dreapta d delimitează în planul α :

- ✓ semiplanul delimitat de dreapta d și punctul A , notat (d, A)
- ✓ semiplanul delimitat de dreapta d și punctul B , notat (d, B)



Exemple

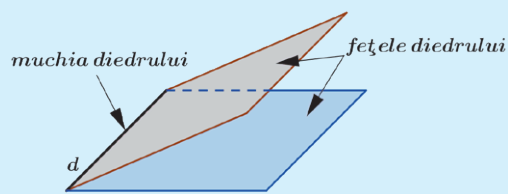
- Dacă deschideți una dintre cărțile de pe masă, cele două coperte formează un unghi diedru în care *muchia diedrului* este cotorul cărții, iar cele două coperte sunt *fețele diedrului*. Oricare două file ale cărții formează un unghi diedru.
- Deschideți ușa clasei și observați un unghi diedru; specificați muchia și fețele diedrului.
- Doi pereți ai clasei, care au o muchie comună formează un unghi diedru.
- Realizați un exemplu de unghi diedru cu ajutorul unei coli de hârtie.

Definiție

Figura geometrică formată din două semiplane care au aceeași frontieră se numește *unghi diedru*.

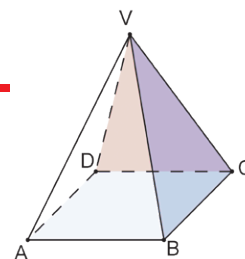
Cele două semiplane se numesc *fețele diedrului*.

Frontiera comună a celor două semiplane se numește *muchia diedrului*.



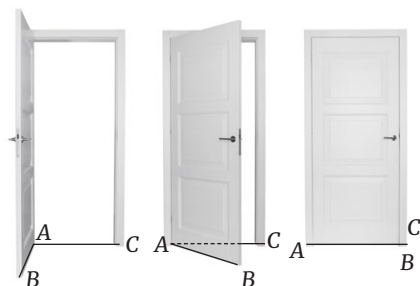
Exersăm împreună!

În piramida patrulateră $VABCD$ din figura alăturată observăm unghiul diedru determinat de fețele (VBC) și (VDC) , având muchia CV . Precizați și alte diedre care se pot pune în evidență pe figură.



Observație

Observați ușile din imaginea următoare. Putem compara cât sunt ele de *deschise* comparând măsurile unghiurilor CAB în fiecare dintre situațiile date.

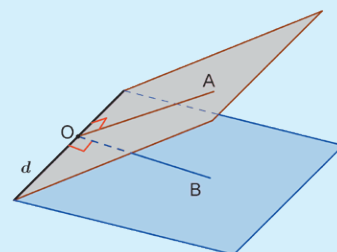


Definiție

Numim *unghi plan corespunzător diedrului* unghiul format de două semidrepte cu originea într-un punct de pe muchia diedrului, conținute respectiv în fețele diedrului și perpendiculare pe muchia acestuia.

Se numește *măsura unghiului diedru* măsura unui unghi plan corespunzător diedrului.

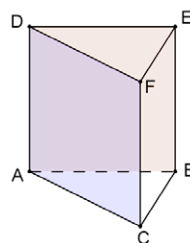
Pentru diedrul din figura alăturată: $OA \subset (d, A)$; $OA \perp d$; $OB \subset (d, B)$; $OB \perp d$, iar $\angle AOB$ este un unghi plan corespunzător diedrului.



Exersăm împreună!

În prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$, unghiul CAB este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele $ACFD$ și $ABED$ pentru că:

- ✓ AD este muchia diedrului;
- ✓ $CA \perp AD$, $CA \subset (ACFD)$;
- ✓ $BA \perp AD$, $BA \subset (ABED)$.



Unghiul FDE este tot un unghi plan corespunzător aceluiași diedru. Explicați de ce $\sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle FDE$ au aceeași măsură. Evidențiați un unghi plan corespunzător diedrului determinat de alte două fețe laterale ale prisme.

În ce condiții unghiul FCB poate fi unghi plan corespunzător diedrului determinat de fața laterală $ACFD$ și baza ACB ?



Reflectăm!

Discutați la nivelul clasei cum se determină un unghi plan corespunzător unui diedru determinat de o față laterală și una dintre baze. Scrieți sub forma unui plan etapele de construcție a desenului prin care evidențiem unghiul plan corespunzător unui unghi diedru.



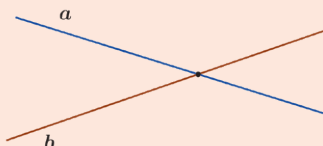
Rețineți!

În plan

Două drepte concurente determină patru unghiuri, două câte două opuse la vârf (opuse și congruente).

Măsura unghiului dintre două drepte concurente este cea mai mică dintre măsurile unghiurilor determinate de acestea.

Notăm $\sphericalangle(a, b)$ măsura unghiului dintre dreptele a și b .



Măsura unghiului a două plane secante este măsura unghiului dintre două drepte conținute respectiv în cele două plane, perpendiculare pe dreapta de intersecție a celor două plane.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ a \subset \alpha, a \perp d \\ b \subset \beta, b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b)$$

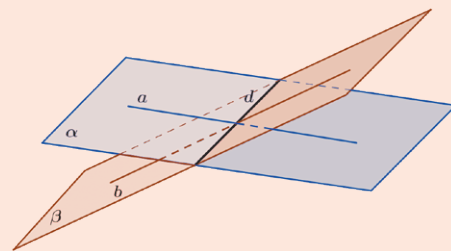
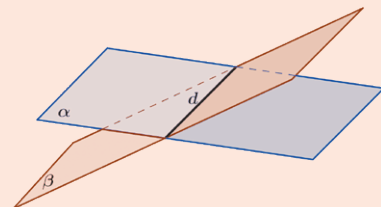
Două plane sunt perpendiculare dacă măsura unghiului dintre ele este de 90° .

În spațiu

Două plane secante determină patru diedre, care au două câte două aceeași măsură.

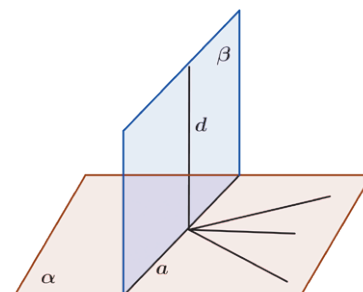
Măsura unghiului dintre două plane secante este cea mai mică dintre măsurile diedrelor formate de acestea.

Notăm $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ măsura unghiului dintre planele α și β .



Reflectăm!

Am afirmat că două plane sunt perpendiculare atunci când unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt. Dreapta respectivă este perpendiculară și pe dreapta de intersecție a celor două plane, precum și pe orice dreaptă din celălalt plan. Observați figura alăturată și argumentați enunțul ce face legătura între plane perpendiculare și măsura unghiului diedru format de acestea.





Reflectăm!

➤ Planele de la punctul a) al problemei alăturate sunt perpendiculare. Demonstrați, folosind definiția.

➤ Sunt situații în care măsura unghiului dintre plane se poate afla cu exactitate aplicând proprietăți ale figurii. De exemplu, la punctul b), CB' este diagonală a pătratului, deci putem afirma că $\angle B'CB = 45^\circ$. Pentru punctul c), folosind tabelele trigonometrice, am putea afla că măsura unghiului $A'O A$ are o valoare situată în intervalul $(54^\circ; 55^\circ)$, adică este aproximativ $54^\circ 30'$. Într-un astfel de caz, de regulă, cerința este de a determina o funcție trigonometrică a acestuia.

➤ Planele $(A'BD)$ și (ABC) formează diedrul determinat de semiplanele (BD, A') și (BD, A) , precum și diedrul determinat de semiplanele (BD, A') și (BD, C) .

De ce $\angle((A'BD), (ABC)) = \angle(A'OA)$ și nu $\angle((A'BD), (ABC)) = \angle(A'OC)$? În formularea răspunsului țineți cont de faptul că unul dintre unghiuri este ascuțit (de ce?), iar celălalt obtuz.

Exersăm împreună!

Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$, cu latura de 10 cm. Determinați:

- măsura unghiului dintre planele (ABB') și (ABC) ;
- măsura unghiului dintre planele $(A'B'C)$ și (ABC) ;
- tangenta unghiului dintre planele $(A'BD)$ și (ABC) .

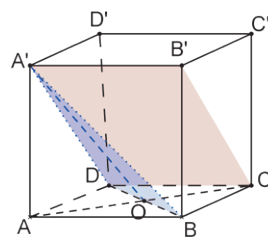
Rezolvare.

$$\left. \begin{array}{l} (ABB') \cap (ABC) = AB \\ B'B \perp AB, B'B \subset (ABB') \\ CB \perp AB, CB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((ABB'), (ABC)) = \angle B'BC = 90^\circ;$$

$$\left. \begin{array}{l} (A'B'C) \cap (ABC) = CD \\ B'C \perp CD, B'C \subset (A'B'C) \\ BC \perp CD, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((A'B'C), (ABC)) = \angle B'CB = 45^\circ \text{ (justificați!);}$$

$$\left. \begin{array}{l} (A'BD) \cap (ABC) = BD \\ A'O \perp BD, A'O \subset (A'BD) \\ AC \perp BD, AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((A'BD), (ABC)) = \angle(A'OA).$$

în triunghiul dreptunghic $A'AO$: $\operatorname{tg} A'OA = \frac{A'A}{AO} = \sqrt{2}$ (verificați calculele!)



Exersați

1. Măsura unui diedru este măsura unghiului determinat de orice două semidrepte incluse, respectiv, în fețele diedrului? Observați figura alăturată și stabiliți ce condiții trebuie să îndeplinească OA și OB astfel încât măsura unghiului AOB să fie măsura diedrului.

2. Pătratele $ABCD$ și $ABEF$ au latura AB comună și determină un diedru cu măsura de 90° .

a) Precizați două unghiuri plane corespunzătoare diedrului. Justificați alegerea.

b) Dacă $AB = 10$ cm, calculați DF .

c) Calculați măsura unghiului CAE .

3. Desenați o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Demonstrați că:

a) $\angle ABC$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele $ABB'A'$ și $BCC'B'$;

b) $\angle AA'D'$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele $ABB'A'$ și $A'B'C'D'$;

c) $\angle A'BA$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele $A'BCD'$ și $ABCD$.

4. Considerăm tetraedrul regulat $ABCD$ și M și N mijloacele muchiilor AB , respectiv CD . Demonstrați că:

a) $\angle CMD$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele ABC și ABD ;

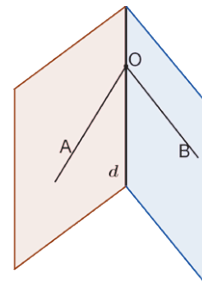
b) $\angle ANB$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele ACD și BCD .

5. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ considerăm M mijlocul segmentului BC , O centrul pătratului $ABCD$ și E situat pe muchia VB astfel încât $AE \perp VB$. Demonstrați că:

a) $\angle VMO$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele VBC și $ABCD$;

b) $\angle AEC$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele VAB și VBC ;

c) $\angle AOB$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de triunghiurile VOA și VOB .



6. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, punctele M , N și P sunt mijloacele muchiilor BC , BB' , respectiv CC' . Demonstrați că:

- $\angle B'A'C'$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de fețele $ABB'A'$ și $ACC'A'$;
- $\angle AMA'$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de triunghiurile ABC și $A'BC$;
- $\angle A'RA$ este un unghi plan corespunzător diedrului determinat de triunghiurile $A'NP$ și ANP , unde R este mijlocul segmentului NP .

7. O coală de carton dreptunghiulară $ABCD$, $BC = 12$ cm, este așezată astfel încât AB să fie conținută în planul mesei, iar distanța de la C la planul mesei să fie de 6 cm. Determinați măsura unghiului dintre planul colii de carton și planul mesei.

8. Pe planul triunghiului echilateral ABC , cu latura de 8 cm, se ridică perpendiculara AM , $M \notin (ABC)$ și $AM = 4\sqrt{3}$ cm. Punctul D este mijlocul segmentului BC .

- Demonstrați că $BD \perp (MAC)$.
- Determinați măsurile unghiurilor dintre planele: i) (MAB) și (MAC) ; ii) (MBC) și (ABC) .

9. Un carton în formă de pătrat $ABCD$, cu lungimea diagonalei de 8 cm, se îndoaie după diagonala AC astfel încât măsura unghiului dintre planele (DAC) și (CAB) să fie de u° . Determinați lungimea segmentului BD (după îndoire) în fiecare dintre situațiile: a) $u^\circ = 60^\circ$; b) $u^\circ = 90^\circ$.

10. Un carton în formă de triunghi isoscel ABC , $AB = AC$ și $BC = 10$ cm, se îndoaie după mediana AD , $D \in BC$ astfel încât distanța dintre punctele B și C (după îndoire) să fie de 5 cm. Determinați măsura unghiului dintre planele (ABD) și (ACD) .

11. Pătratul $ABCD$ cu latura de 10 cm și triunghiul echilateral ABE au latura AB comună și sunt așezate astfel încât planele lor să fie perpendiculare. Determinați:

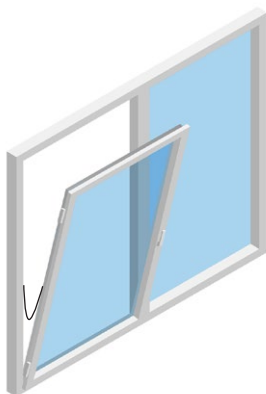
- măsura unghiului dintre planele (EBC) și (ABC) ;
- lungimea proiecției segmentului DE pe planul (ABC) ;
- tangenta unghiului dintre planele (ECD) și (ABC) ;
- aria proiecției triunghiului ECD pe planul (ABC) .

12. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC , $\angle A = 90^\circ$, se ridică perpendiculara BM , $M \notin (ABC)$. Se știe că $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm și $BM = 8$ cm.

- Determinați $\angle((MBA), (MBC))$.
- Demonstrați că $(MAB) \perp (ABC)$.
- Demonstrați că $CA \perp (MAB)$.
- Determinați $\angle((MAC), (ABC))$.

Știați că?

La un avion, unghiul format de orizontală cu linia mediană a unei aripi poartă numele de „unghi diedru al aripii”.



Proiect

În imaginea alăturată este reprezentată o fereastră cu deschidere verticală, cu înălțimea de 90 cm. Se dorește montarea unui lăncșor (cablu) la o distanță de 60 cm față de balama (față de baza fixă a ferestrei), care să limiteze deschiderea ferestrei la maximum 30° față de ramă. Calculați lungimea acestui lăncșor (cablu).

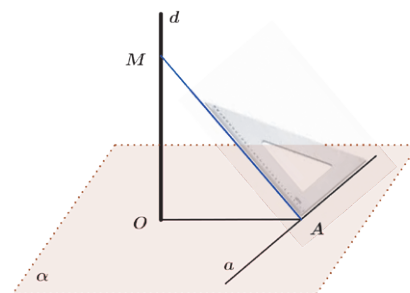
Teorema celor trei perpendiculare

Activitate practică

Pe o coală de hârtie desenăm o dreaptă a , un punct $O \notin a$ și perpendiculara $OA \perp a$, $A \in a$. Fixăm cu bolduri în colțuri hârtia pe un polistiren și înfigem în punctul O o vergea (un băț, de exemplu), astfel încât aceasta să fie perpendiculară pe planul colii de hârtie.

În desenul alăturat, am notat cu α planul colii de hârtie și cu d vergeaua $d \perp \alpha$.

Înfigeți un bold în punctul A și legați punctul A de un punct oarecare $M \in d$ cu o sfoară. Verificați cu ajutorul unui echer perpendicularitatea dintre dreptele a și MA . Schimbați poziția punctului pe dreapta d și verificați perpendicularitatea celor două drepte.



Exersăm împreună!

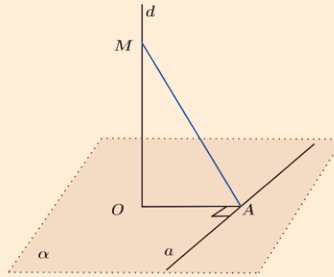
Să considerăm configurația din aplicația practică anterioară, în fiecare dintre următoarele cazuri:

Cazul 1		Cazul 2		Cazul 3	
știm:	cercetăm:	știm:	cercetăm:	știm:	cercetăm:
$a \subset \alpha$ $d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\}$ $OA \perp a, A \in a$	relația dintre a și $MA, M \in d$	$a \subset \alpha$ $d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\}$ $MA \perp a, M \in d, A \in a$	relația dintre OA și a	$a \subset \alpha, A \in a$ $OA \perp a, OA \subset \alpha$ $MA \perp a, M \notin \alpha$ $MO \perp OA$	relația dintre MO și planul α
$d \perp \alpha, a \subset \alpha \Rightarrow d \perp a$				$\left. \begin{array}{l} a \perp OA \\ a \perp MA \\ OA \cap MA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (MOA)$ $\text{cum } MO \subset (MOA) \Rightarrow a \perp MO$ $\left. \begin{array}{l} MO \perp OA \\ MO \perp a \\ OA, a \subset \alpha \\ OA \cap a = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow MO \perp \alpha$	
$\left. \begin{array}{l} a \perp OA \\ a \perp d \\ d \cap OA = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (d, OA)$ pentru orice $M \in d$, $MA \subset (d, OA)$ deci $a \perp MA \Leftrightarrow MA \perp a$		$\left. \begin{array}{l} a \perp d \\ a \perp MA \\ d \cap MA = \{M\} \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (d, MA)$ $O \in d, A \in MA \Rightarrow OA \subset (d, MA)$ deci $a \perp OA \Leftrightarrow OA \perp a$			

Teoremă

Teorema celor trei perpendiculare.

Dacă o dreaptă a este inclusă într-un plan α , o dreaptă d este perpendiculară pe planul α și îl intersectează în punctul O , OA este perpendiculara din O pe dreapta a , $A \in a$ și M este un punct oarecare al dreptei d , atunci dreapta MA este perpendiculară pe dreapta a .

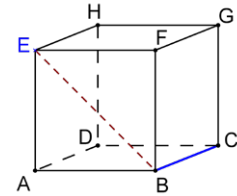


$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ OA \perp a, A \in a \end{array} \right\} \Rightarrow MA \perp a, \text{ oricare ar fi punctul } M \in d.$$

Observăm că *teorema celor trei perpendiculare* corespunde cazului 1 din aplicația anterioară, unde este prezentată și o demonstrație a acesteia. Celelalte două cazuri reprezintă *reciprocele* teoremei, pe care le prezentăm în cele ce urmează.

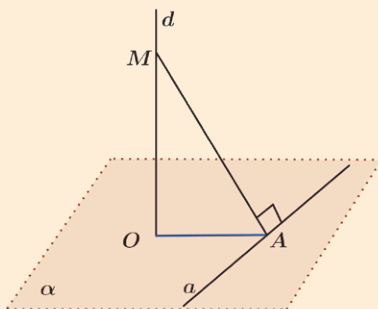
**Activitate pe grupe**

Referitor la cubul $ABCDEFGH$ din figura următoare, identificați un plan din care face parte BC și o perpendiculară pe planul respectiv, astfel încât să putem demonstra că $EB \perp BC$ folosind *teorema celor trei perpendiculare*. Comparați rezolvările între grupe. Explicați de ce au fost posibile variante diferite?

**Reciproca 1**

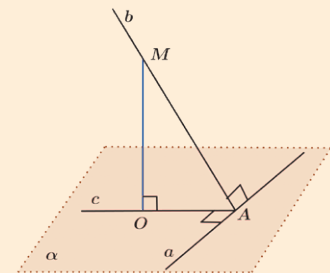
Dacă o dreaptă a este inclusă într-un plan α , o dreaptă d este perpendiculară pe planul α și îl intersectează în punctul O , M este un punct oarecare al dreptei d și MA este perpendiculara din M pe dreapta a , $A \in a$, atunci OA este perpendiculară pe dreapta a .

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ MA \perp a, M \in d, A \in a \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp a$$

**Reciproca 2**

Dacă într-un punct A aparținând unei dreptei a dintr-un plan α se construiesc două perpendiculare pe dreaptă – dreapta b exterioră planului și dreapta c inclusă în plan –, atunci perpendiculara dintr-un punct al dreptei b (cea exterioră) pe dreapta c (cea interioară) este perpendiculară pe planul α .

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha, A \in a \\ b \perp a, b \not\subset \alpha, b \cap a = \{A\} \\ c \perp a, c \subset \alpha, c \cap a = \{A\} \\ MO \perp c, M \in b, O \in c \end{array} \right\} \Rightarrow MO \perp \alpha$$





Reflectăm!

În plan, construcția unei perpendiculare pe o dreaptă se face cu ajutorul echerului. În spațiu, am observat că reprezentările figurilor geometrice (în plane diferite de cele verticale) nu păstrează (întotdeauna) măsurile unghiurilor, deci nu putem folosi echerul nici pentru a desena și nici pentru a verifica o perpendicularitate. *Teorema celor trei perpendiculare* ne ajută să construim perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă situată într-un plan, folosind proprietățile figurii din acel plan. În problema alăturată, am stabilit perpendicularitatea lui MO pe BD folosind *teorema celor trei perpendiculare*. Discutați la nivelul clasei o altă metodă pentru a demonstra că $MO \perp BD$, O mijlocul segmentului BD , studiind, de exemplu, triunghiul MBD .



Exersăm împreună!

Pe planul pătratului $ABCD$, cu latura de 6 cm, se ridică perpendiculara AM , $M \notin (ABC)$ și $AM = 3\sqrt{3}$ cm. Determinați:

- distanța de la M la BD ;
- distanța de la A la (MBD) .

Rezolvare.

a) Distanța de la punctul M la BD reprezintă distanța de la M la piciorul perpendicularei din M pe BD , deci trebuie să construim această perpendiculară. În pătratul $ABCD$ diagonalele sunt perpendiculare, deci $AO \perp BD$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Se creează astfel oportunitatea aplicării *teoremei celor trei perpendiculare*:

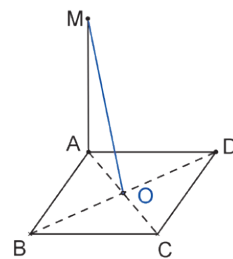
$$\left. \begin{array}{l} MA \perp (ABC) \\ AO \perp BD \\ AO, BD \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T3\perp} MO \perp BD, \text{ deci } d(M, BD) = MO$$

$AO = AC : 2 = 3\sqrt{2}$ cm și, aplicând *teorema lui Pitagora* în triunghiul dreptunghic MAO , $MO = 3\sqrt{5}$ cm.

b) Pentru a calcula distanța de la A la planul (MBD) trebuie să construim perpendiculara din A pe plan.

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp BD, AO \notin (MBD) \\ MO \perp BD, MO \subset (MBD) \\ \text{Construim } AE \perp MO, E \in MO \end{array} \right\} \Rightarrow AE \perp (MBD), \text{ deci } d(A, (MBD)) = AE$$

Realizați desenul corespunzător și calculați lungimea segmentului AE , știind că este înălțime în triunghiul dreptunghic MAO .



Atenție!

Distanța de la un punct la o dreaptă, respectiv la un plan, înseamnă lungimea segmentului corespunzător unei perpendiculare duse din punctul respectiv pe dreaptă, respectiv plan, determinat de punct și proiecția punctului pe dreaptă, respectiv plan. *Teorema celor trei perpendiculare* și cele două reciproce ale acesteia reprezintă una dintre metodele cel mai des folosite pentru construcția unor astfel de perpendiculare.

Exersați

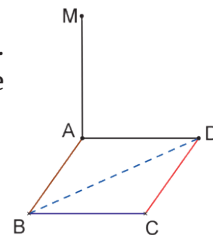
1. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ și perpendiculara MA pe planul acestuia. Construiți perpendicularele din punctul M pe dreptele AB , BC , CD și BD , precizând în fiecare caz etapele de construcție.

2. Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$, cu latura de 8 cm și punctul M mijlocul muchiei BC .

- Determinați perpendicularele din B' pe AD , AC și AM .
- Calculați distanțele de la B' la AD , AC și AM .

3. Pe planul triunghiului isoscel ABC , $AB = AC = 12$ cm și $BC = 16$ cm, se ridică perpendiculara AD , $D \notin (ABC)$, $AD = 8$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului BC .

- Demonstrați că triunghiul DBC este isoscel.
- Demonstrați că $DM \perp BC$ prin două metode.
- Calculați $d(D, BC)$.
- Calculați distanța de la A la planul (DBC) .
- Calculați sinusul unghiului dintre planele (DBC) și (ABC) .



4. Considerăm prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, cu $AB = 10$ cm, $AA' = 5$ cm și punctul M mijlocul segmentului BC . Calculați:

- a) $d(A', BC)$; b) $d(C', AM)$; c) $d(A, (A'BC))$.

5. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ ridicăm perpendiculara AM , $M \notin (ABC)$.

a) Demonstrați că $MB \perp BC$ și $MD \perp DC$.

b) Explicați etapele de construcție a unei perpendiculare din M pe BD .

6. Pe planul triunghiului ABC ridicăm perpendiculara AM , $M \notin (ABC)$. Dacă $MN \perp BC$, $N \in BC$, demonstrați că AN este înălțime în triunghiul ABC .

7. Considerăm romb $ABCD$ cu $AB = AC = 6$ cm. Punctul M este situat în exteriorul planului rombului astfel încât $MA \perp (ABC)$ și $MA = 6$ cm. Calculați $d(M, BD)$ și $d(M, BC)$.

8. Considerăm paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 2\sqrt{6}$ cm. Calculați:

- a) $d(A', BC)$; b) $d(A', CD)$; c) $d(A', BD)$; d) $d(A', BC')$.

9. Considerăm un cerc de centru O și rază 12 cm și două puncte A și B aparținând acestuia astfel încât $\widehat{AB} = 120^\circ$. În centrul cercului ridicăm perpendiculara OC pe planul acestuia, $OC = 6$ cm.

a) Calculați: $d(C, AB)$ și $d(O, (ABC))$.

b) Calculați distanța de la C la o dreaptă d tangentă la cerc în punctul A .

c) Dacă M , N și P sunt mijloacele segmentelor OA , OB , respectiv OC , demonstrați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele și calculați distanța dintre acestea.

10. Considerăm un dreptunghi $ABCD$, $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm și un punct M pe diagonala AC astfel încât $MC = 2MA$. În punctul M se ridică perpendiculara MN pe planul dreptunghiului, $MN = 4$ cm. Calculați distanțele de la N la dreptele AB și AD .

11. Pe planul trunghiului oarecare ABC , $AC = 16$ cm, se ridică perpendiculara BE , $BE = 28$ cm. Se consideră punctul $F \in AC$ astfel încât $EF \perp AC$ și $EF = 35$ cm. Calculați aria triunghiului ABC .

12. Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$, cu latura de 12 cm, se ridică perpendiculara AM , $AM = 6$ cm. Calculați:

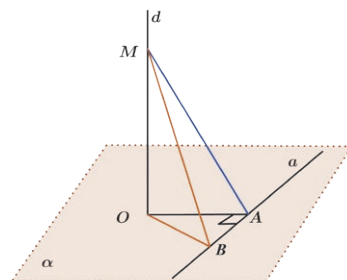
- a) $d(M, BC)$; b) $d(M, CD)$; c) $d(M, BE)$; d) $d(M, BD)$; e) $d((MAB), (NDE))$, unde $ND \perp (ABC)$, $N \notin (ABC)$.

13. Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel ABC , $AB = AC = 10$ cm, și înălțimea AD a acestuia, $D \in BC$. Pe planul triunghiului se ridică perpendiculara DM , $DM = 5\sqrt{3}$ cm. Determinați:

- a) $d(M, AC)$; b) $d(D, (MAB))$.

14. În figura alăturată observăm o reprezentare a teoremei celor trei perpendiculare: $MO \perp \alpha$, $OA \perp a$, $OA, a \subset \alpha \Rightarrow MA \perp a$. Punctul B este un punct oarecare al dreptei a , diferit de punctul A .

Notând, de exemplu, $MO = x$, $OA = y$ și $AB = z$ (lungimi de segmente), demonstrați că $\triangle MAB$ este dreptunghic (o altă demonstrație a teoremei celor trei perpendiculare).



Recapitulare



1. În piramida $VABCD$, punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv BC , iar punctele E și F sunt centrele de greutate ale triunghiurilor VDC , respectiv VAD . Demonstrați că M, N, E și F sunt coplanare.

2. Paralelogramul $ABCD$ și triunghiul ABE au latura AB comună și sunt situate în plane diferite. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AE , respectiv BE . Demonstrați că dreptele CN și DM sunt concurente.

3. Pătratul $ABCD$ și triunghiul ABE au latura AB comună și sunt situate în plane diferite. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor EA , respectiv EB , iar punctul O este centrul pătratului $ABCD$. Demonstrați că:

- a) $MN \parallel (ABC)$; b) $DC \subset (MNC)$;
- c) DB este secantă planului (CAE) ;
- d) dreptele AB și CE sunt paralele cu planul (MNO) .

4. Pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ABE au latura AB comună și sunt situate în plane diferite, astfel încât $\angle DAE = 90^\circ$. Demonstrați că:

- a) $DA \perp (ABE)$; b) $CB \perp BE$; c) $EC \equiv ED$.

5. În tetraedrul $ABCD$, punctele M, N, P și R sunt mijloacele muchiilor AB, AC, DC , respectiv DB . Demonstrați că:

- a) $MNPR$ este paralelogram;
- b) dreptele AD și BC sunt paralele cu planul (MNP) ;
- c) dacă $\angle DBC = \angle ADB = 90^\circ$, atunci $DB \perp (MNP)$.

6. În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$, punctele O_1, O_2 și O_3 sunt centrele fețelor laterale.

- a) Demonstrați că $(O_1O_2O_3) \parallel (ABC)$.
- b) Calculați raportul ariilor triunghiurilor $O_1O_2O_3$ și ABC .
- c) Demonstrați că distanța dintre planele $(O_1O_2O_3)$ și (ABC) este egală cu distanța dintre planele $(O_1O_2O_3)$ și $(A'B'C')$.

7. În paralelogramul $ABCD$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC , respectiv AD . Punctul P este situat în exteriorul planului (ABC) , astfel încât $\angle PMC = 125^\circ$ și $\angle PMN = 75^\circ$. Determinați măsurile $\angle(PM, AD)$ și $\angle(PM, CD)$.

8. În tetraedrul regulat $ABCD$, cu latura de 12 cm, considerăm $AO \perp (DBC)$, $O \in (DBC)$ și M mijlocul muchiei AD . Determinați:

- a) $d(O, AD)$; b) $d(O, (ABC))$;
- c) sinusul unghiului $\angle(OM, AC)$.

9. Considerăm un unghi AOB inclus într-un plan α și un punct M care nu aparține planului. Știind că proiecția punctului M pe planul α aparține bisectoarei unghiului AOB , demonstrați că M este egal depărtat de laturile unghiului.

10. Considerăm trapezul $ABCD$ și perpendicularele pe planul acestuia AM și CN .

- a) Demonstrați că $AM \parallel CN$.
- b) Demonstrați că $(ABM) \parallel (CDN)$.
- c) Dacă $DA \perp BM$, demonstrați că trapezul $ABCD$ este dreptunghic.
- d) În ce condiții dreapta MN este paralelă cu planul trapezului?

11. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de 12 cm. Un plan α paralel cu planul (BCC') intersectează muchiile $AB, CD, C'D'$ și $A'B'$ în punctele E, F, G , respectiv H , iar $AE = 3$ cm.

- a) Demonstrați că $EFGH$ este pătrat.
- b) Calculați $d(\alpha, (BCC'))$.
- c) Determinați valoarea raportului $\frac{A'H}{B'H}$.
- d) Calculați distanța de la B' la CE .
- e) Calculați distanța de la B' la (ECC') .
- f) Demonstrați că planele (ECC') și (AFG) sunt paralele.
- g) Calculați distanța dintre planele (ECC') și (AFG) .

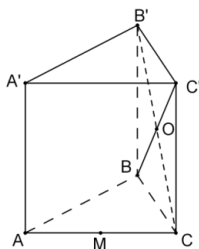
12. Pătratul $ABCD$, cu latura de 10 cm, și triunghiul echilateral BCE sunt situate în plane diferite. Știind că măsura unghiului dintre dreapta BE și planul (ABC) este de 30° , determinați tangenta unghiului dintre planele (EBC) și (ABC) .

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare

Test de autoevaluare

Cerințele 1–5 se referă la textul:

În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, având toate muchiile cu lungimea de 12 cm, M mijlocul segmentului AC și $BC' \cap B'C = \{O\}$. Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.



- $pr_{(ABC)} BC'$ este segmentul:
a) AB ; b) AC ; c) BC ; d) BB' .
- Măsura $\angle(BC', (A'B'C'))$ este egală cu:
a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 90° .
- Distanța de la O la (ABC) este egală cu:
a) 12 cm; b) 10 cm; c) 8 cm; d) 6 cm.
- Lungimea proiecției segmentului $B'M$ pe (ABC) este egală cu:
a) 6 cm; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) $6\sqrt{3}$ cm; d) 12 cm.

5. Măsura unghiului dintre planele $(BB'M)$ și (ACC') este egală cu:

- a) 90° ; b) 60° ; c) 45° ; d) 30° .

Cerințele 6–9 se referă la textul:

Fie prisma patrulateră regulată $ABCA'B'C'D'$, $AB = 10$ cm, $AA' = 10\sqrt{5}$ cm și punctul M mijlocul segmentului $D'C'$.

- Demonstrați că $MB = 25$ cm.
- Calculați cosinusul unghiului dintre dreptele BM și AA' .
- Calculați sinusul unghiului dintre planele $(BB'M)$ și $(AA'M)$.
- Dacă N și P sunt mijloacele segmentelor BC , respectiv CC' , iar O este centrul pătratului $ABCD$, demonstrați că $(NOP) \parallel (ABM)$.

Punctaj: câte 1p problema și 1p din oficiu
Timp de lucru: 50 de minute.

Test de evaluare

Cerințele 1–5 se referă la textul:

Considerăm un plan α , punctele A și B în exteriorul acestuia și M mijlocul segmentului AB . Alegeți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Dacă $AB = 14$ cm, atunci lungimea maximă a proiecției segmentului AB pe planul α este egală cu:
a) 0 cm; b) 7 cm; c) 14 cm; d) 28 cm.
- Dacă lungimea proiecției segmentului AB pe planul α este egală cu 8 cm, atunci lungimea minimă a segmentului AB este egală cu:
a) 16 cm; b) 8 cm; c) 4 cm; d) 0 cm.
- Dacă $AB = 20$ cm și lungimea proiecției lui pe planul α este egală cu 10 cm, atunci $\angle(AB, \alpha)$ este egal cu:
a) 0° ; b) 30° ; c) 45° ; d) 60° .
- Dacă $pr_\alpha AB = A'B'$, $pr_\alpha M = M'$, $AA' = 16$ cm și $BB' = 8$ cm, atunci lungimea segmentului MM' este egală cu:
a) 16 cm; b) 12 cm; c) 8 cm; d) 4 cm.

5. Dacă $\angle(AB, \alpha) = 45^\circ$ și $A'B' = 7$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:

- a) 7 cm; b) $7\sqrt{2}$ cm; c) $7\sqrt{3}$ cm; d) 14 cm.

Cerințele 6–9 se referă la textul:

În piramida patrulateră regulată $SABCD$, $AB = 8$ cm și $SA = 9$ cm. Punctele M , N și P sunt situate pe muchiile SA , SB , respectiv SC , astfel încât $SM = 3$ cm, $SN = \frac{1}{3}SB$ și $PC = 2SP$.

- Demonstrați că înălțimea piramidei este de 7 cm.
- Demonstrați că $(MNP) \parallel (ABC)$.
- Calculați distanța dintre planele (MNP) și (ABC) .
- Calculați tangenta unghiului dintre planul bazei piramidei și planul unei fețe laterale.

Punctaj: câte 1p problema și 1p din oficiu
Timp de lucru: 50 de minute.

FIȘA DE OBSERVARE A COMPORTAMENTULUI

La finalul fiecărei unități de învățare (un set de lecții) este util să vă autoevaluați comportamentul în procesul de învățare și nivelul de competențe atins, completând o fișă de observare după modelul acesteia. Ea se referă la implicarea voastră pe parcursul unității de învățare și la rezultatul obținut la testul de autoevaluare propus la finalul ei. Adăugați fișele la portofoliul personal.

Am colaborat cu colegii la activitățile propuse*	M-am pregătit pentru fiecare lecție*	Am întrebat când am avut nelămuriri*	Am progresat în învățare prin parcurgerea acestui set de lecții	Referitor la test	
				Punctaj obținut	Ce am recitat înainte și după test pentru a îmbunătăți performanța

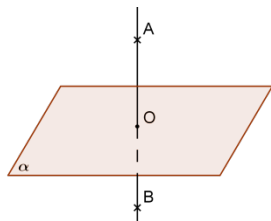
*Răspunsuri posibile: nu, parțial, da

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ avem $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm și $AA' = 6$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei $B'C'$. Determinați:

- lungimea proiecției segmentului AM pe planul (BCC') ;
- tangenta unghiului dintre planele (MAB) și (ABC) ;
- aria proiecției triunghiului MAD pe planul (ABC) .

2. În figura alăturată sunt reprezentate un plan α și punctele A și B situate de o parte și de alta a planului astfel încât $AB \perp \alpha$ și $AO \equiv OB$. Demonstrați că, oricare ar fi un punct $P \in \alpha$, are loc congruența $PA \equiv PB$.



Observație. Planul α descris în problemă (perpendicular pe un segment în mijlocul acestuia) se numește *plan mediator* al segmentului AB .

3. Considerăm trei puncte necoliniare A , B și C și planele α și β – planele mediatoare ale segmentelor AB , respectiv AC (vezi problema anterioară). Demonstrați că planele α și β sunt concurente, iar dreapta lor de intersecție este perpendiculară pe planul (ABC) .

4. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ construim perpendiculara MA , $M \notin (ABC)$, astfel încât $MA = 5$ cm. În punctul M construim drepte distincte $EM \perp AM$ și $FM \perp AM$ astfel încât $BE = 5$ cm.

- Demonstrați că $(MEF) \parallel (ABC)$.
- Determinați $d((MEF), (ABC))$ și $d(B, (MEF))$.
- Demonstrați că punctele A , B , E și M sunt coplanare.

5. Considerăm cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de 16 cm, punctele M , N și P mijloacele muchiilor BC , $C'D'$, respectiv AD și punctul O centrul bazei $A'B'C'D'$.

- Determinați tangenta unghiului dintre BP și $A'B'$.
- Determinați lungimile proiecțiilor segmentului MN pe planele (ABC) , respectiv (BCC') .
- Demonstrați că $(DMN) \parallel (BOP)$.
- Calculați distanța dintre planele (DMN) și (BOP) .

6. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, $AB = 12$ cm, $AA' = 8$ cm, G este centrul triunghiului ABC , iar O intersecția diagonalelor dreptunghiului $BCC'B'$. Determinați:

- sinusul unghiului dintre OG și (ABC) ;
- tangenta unghiului dintre OG și AA' ;
- lungimile proiecțiilor segmentului $A'G$ pe planele (ABC) , respectiv (BCC') .

7. Considerăm triunghiul isoscel ABC , $AB = AC = 8$ cm, $\angle BAC = 120^\circ$, punctul D mijlocul segmentului BC și perpendiculara $MA \perp (ABC)$, $M \notin (ABC)$, $MA = 8$ cm. Determinați:

- lungimea proiecției segmentului MD pe (ABC) ;
- distanța de la punctul C la planul (MAB) ;
- măsura unghiului dintre (MAB) și (MAC) ;
- tangenta unghiului dintre planele (MBC) și (ABC) ;
- distanța de la punctul A la planul (MBC) .

8. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, fețele laterale sunt triunghiuri dreptunghice, M este mijlocul segmentului AC , iar lungimea laturii bazei este de 12 cm.

- Demonstrați că $VA = 6\sqrt{2}$ cm.
- Calculați măsura unghiului dintre planele (VMB) și (VAC) .
- Determinați lungimea proiecției segmentului AC pe planul (VAB) .
- Determinați măsura unghiului dintre VM și (VBC) .

ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

*Legile naturii sunt
doar gândurile matematice
ale lui Dumnezeu.*

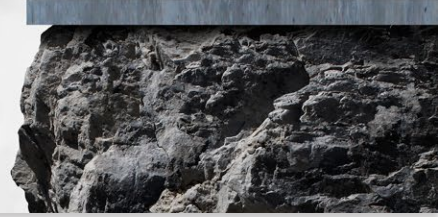


„În geometrie nu există drumuri speciale pentru regi.”

Euclid (323 î.H. – 285 î.H.)



Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate



Distanța de la un punct la un punct, la o dreaptă sau la un plan



Ne amintim!

Activitate în echipe. Formați echipe și recapitulați în cadrul acestora:

- ✓ distanța dintre două puncte;
- ✓ distanța de la un punct la o dreaptă;
- ✓ distanța de la un punct la un plan;
- ✓ teorema celor trei perpendiculare și cele două reciproce ale acesteia.

Pentru fiecare dintre acestea, aveți în vedere o recapitulare a etapelor de calcul.

Exersăm împreună!

Considerăm un cub $ABCA'B'C'D'$ cu latura de 12 cm și punctul E mijlocul muchiei $C'D'$.

Ne propunem să calculăm următoarele distanțe:

I. $d(A, C)$, $d(A, C')$ și $d(A, E)$

✓ $d(A, C)$ reprezintă lungimea segmentului AC , pe care o putem calcula folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC , $AC = 12\sqrt{2}$ cm.

AC este diagonală a pătratului $ABCD$, iar formula diagonalei unui pătrat este

$d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2}$, l fiind lungimea laturii pătratului.

✓ $d(A, C')$ reprezintă lungimea segmentului AC' , pe care o putem calcula, de exemplu, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ACC' (justificați că $C'C \perp AC$): $AC' = 12\sqrt{3}$ cm.

AC' este diagonală a cubului și putem observa o formulă de calcul a acesteia: $d_{\text{cub}} = l\sqrt{3}$, unde l este lungimea muchiei cubului.

✓ $d(A, E)$ reprezintă lungimea segmentului AE .

O variantă de calcul se bazează pe observația că $ED' \perp (ADD') \Rightarrow ED' \perp AD'$, care ne duce la posibilitatea aplicării teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $AD'E$: $AE = 18$ cm (verificați calculele!).

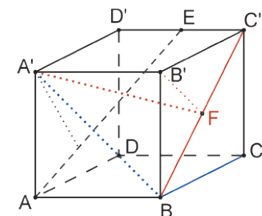
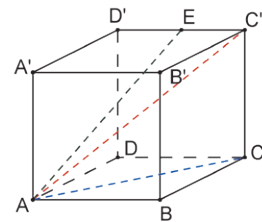
Triunghiul $AA'E$ este și el tot un triunghi dreptunghic, din care putem calcula AE .

II. $d(A', BC)$, $d(A', BC')$ și $d(A', AE)$

✓ Pentru $d(A', BC)$ trebuie să construim perpendiculara din A' pe BC .

Folosind $T_3 \perp$ avem: $A'A \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $AB, BC \subset (ABC) \Rightarrow A'B \perp BC$, deci $d(A', BC) = A'B = 12\sqrt{2}$ cm.

✓ Pentru $d(A', BC')$, construim $A'F \perp BC'$ folosind aceeași idee: includem BC' în planul $(BB'C')$ și aplicăm $T_3 \perp$, calculul lui $A'F$ realizându-se în triunghiul dreptunghic $A'B'F$.



Pe de altă parte, $\Delta A'BC'$ este un triunghi echilateral (laturile lui sunt diagonale ale fețelor cubului), iar $d(A', BC')$ reprezintă lungimea unei înălțimi a acestuia.

✓ Pentru $d(A', AE)$, construcția unei perpendiculare din A' pe AE folosind $T_3 \perp$ ar putea fi mai anevoioasă. Punctele A' , A și E determină triunghiul $A'AE$, triunghi care se poate constata ușor că este unul dreptunghic. $d(A', AE)$ reprezintă înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în acest triunghi, deci $d(A', AE) = \frac{A'A \cdot A'E}{AE} = 4\sqrt{5}$ cm, folosind formula $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{i}$.

III. $d(A', (BB'C'))$, $d(A', (BB'D'))$ și $d(A', (AB'D'))$

✓ Pentru a calcula $d(A', (BB'C'))$ trebuie mai întâi să construim sau să identificăm o perpendiculară din A' pe planul $(BB'C')$ și, cum $A'B' \perp (BB'C')$ (justificați!), obținem $d(A', (BB'C')) = A'B' = 12$ cm.

✓ Pentru a calcula $d(A', (BB'D'))$ studiem dacă nu este deja construită o perpendiculară din A' pe planul $(BB'D')$. Nu există, deci trebuie construită. Observăm că $(BB'D') \perp (A'B'C')$ (justificați!), deci o perpendiculară din A' pe planul $(BB'D')$ va fi o perpendiculară pe dreapta de intersecție a celor două plane. În consecință $d(A', (BB'D')) = A'O' = 6\sqrt{2}$ cm, unde $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.

O variantă de construcție a perpendicularei se putea baza și pe faptul că $(AA'C') \perp (AB'D')$, dar această perpendicularitate se observă mai greu.

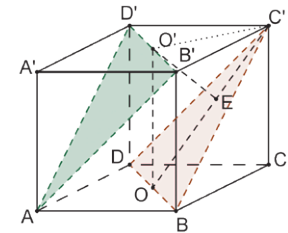
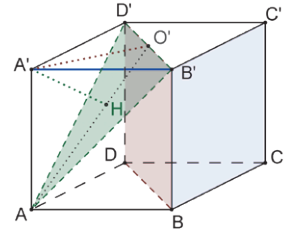
✓ Pentru a calcula $d(A', (AB'D'))$ construim, folosind reciproca teoremei celor trei perpendiculare, o perpendiculară din A' pe planul $(AB'D')$: $B'D' \subset (AB'D')$, $AO' \perp B'D'$, $AO' \subset (AB'D')$, $A'O' \perp B'D'$; construind $A'H \perp AO'$ obținem $A'H \perp (AB'D')$, deci $d(A', (AB'D')) = A'H = 4\sqrt{3}$ cm (verificați calculele!).

IV. Demonstrați că $(AB'D') \parallel (BC'D)$ și calculați $d((AB'D'), (BC'D))$

✓ Demonstrați paralelismul celor două plane.

Pentru a calcula distanța dintre cele două plane este suficient să calculăm distanța de la un punct situat în unul dintre cele două plane la celălalt plan. Alegem punctul $O' \in (AB'D')$ (mijlocul segmentului $B'D'$) și construim perpendiculara din acesta pe planul $(BC'D)$: $BD \subset (BC'D)$, $C'O \perp BD$, $C'O \subset (BC'D)$, $O'D \perp BD$ și, construind $O'E \perp C'O$, obținem $O'E \perp (BC'D)$.

În concluzie $d((AB'D'), (BC'D)) = d(O', (BC'D)) = O'E = 4\sqrt{3}$ cm (verificați calculele!).



Observații

✓ Calculul distanței dintre două puncte se bazează, de cele mai multe ori, pe identificarea unui triunghi dreptunghic care are una dintre laturi segmentul determinat de cele două puncte, urmată de aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul identificat.

✓ Calculul distanței de la un punct la o dreaptă se bazează pe:

- studierea figurii, pentru identificarea existenței perpendicularei din punct pe dreaptă;
- aplicarea teoremei celor trei perpendiculare, pentru construcția perpendicularei din punct pe dreaptă și calcularea lungimii acesteia;
- identificarea unui triunghi în care punctul este unul dintre vârfuri, iar latura opusă acestuia este inclusă în dreapta respectivă și calcularea înălțimii triunghiului corespunzătoare laturii respective.

✓ Calculul distanței de la un punct la un plan se bazează pe:

- studierea figurii, pentru identificarea existenței perpendicularei din punct pe plan;
- aplicarea reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, pentru construcția perpendicularei din punct pe plan și calcularea lungimii acesteia;
- construcția perpendicularei din punct pe plan prin alte metode – de exemplu, folosind definiția sau proprietățile planelor perpendiculare și calcularea lungimii acesteia.

Măsura unghiului dintre două drepte, dintre o dreaptă și un plan, dintre două plane



Ne amintim!

Activitate în echipe. Formați echipe și recapitulați în cadrul acestora:

- ✓ măsura unghiului dintre două drepte;
- ✓ măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan;
- ✓ măsura unghiului dintre două plane.

Pentru fiecare dintre acestea, aveți în vedere o recapitulare a etapelor de calcul.

Exersăm împreună!

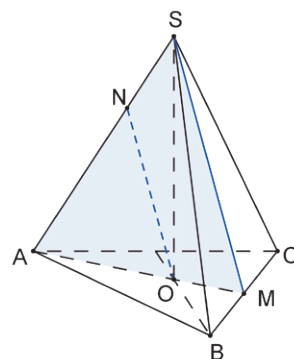
În piramida triunghiulară regulată $SABC$, $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $SO = 4$ cm, punctul M este mijlocul laturii BC , iar N este situat pe SA astfel încât $\frac{SN}{SA} = \frac{1}{3}$.

1. Calculați măsura $\sphericalangle(SA, BC)$ și sinusul unghiului $\sphericalangle(NO, SC)$.

Rezolvare. $BC \perp (SAM)$ (justificați) și $SA \subset (SAM) \Rightarrow BC \perp SA$, deci $\sphericalangle(SA, BC) = 90^\circ$.

Identificăm o paralelă la ON care să intersecteze dreapta SC : O este centrul triunghiului echilateral ABC , deci $\frac{OM}{AM} = \frac{1}{3}$, și cum $\frac{SN}{SA} = \frac{1}{3}$, aplicând reciproca *teoremei lui Thales* obținem $ON \parallel SM$.

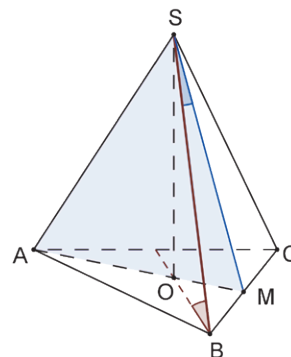
$$\sphericalangle(NO, SC) \stackrel{ON \parallel SM}{=} \sphericalangle(SM, SC) = \sphericalangle MSC \Rightarrow \sin(\sphericalangle MSC) = \frac{MC}{SC}, \sin(\sphericalangle MSC) = \frac{3\sqrt{39}}{26} \text{ (verificați!).}$$



2. Calculați tangentele unghiurilor dintre: a) SB și (ABC) ; b) SB și (SAM) .

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} pr_{(ABC)} S = O \\ B \in (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow pr_{(ABC)} SB = OB \Rightarrow \sphericalangle(SB, (ABC)) = \sphericalangle SBO, \operatorname{tg}(\sphericalangle SBO) = \frac{2}{3};$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} pr_{(SAM)} B = M \\ S \in (SAM) \end{array} \right\} \Rightarrow pr_{(SAM)} SB = SM \Rightarrow \sphericalangle(SB, (SAM)) = \sphericalangle BSM, \operatorname{tg}(\sphericalangle BSM) = \frac{3\sqrt{3}}{5}.$$



3. Calculați:

a) cosinusul unghiului dintre (SBC) și (ABC) ;

b) cosinusul unghiului dintre (SOB) și (SAM) ;

c) măsura unghiului dintre (SAM) și (SBC) .

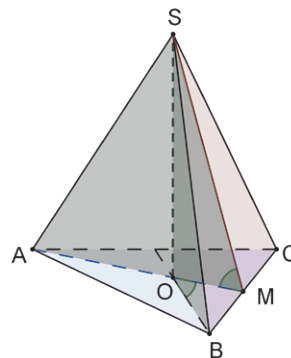
Rezolvare:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \\ OM \perp BC, OM \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((SBC), (ABC)) = \sphericalangle SMO;$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} (SOB) \cap (SAM) = SO \\ BO \perp SO, BO \subset (SOB) \\ MO \perp SO, MO \subset (SAM) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((SOB), (SAM)) = \sphericalangle BOM.$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} BC \perp (SAM) \\ BC \subset (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow (SBC) \perp (SAM) \Rightarrow \sphericalangle((SBC), (SAM)) = 90^\circ.$$

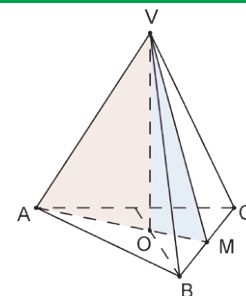
Justificați perpendicularitățile anterioare și calculați cosinusurile celor două unghiuri.



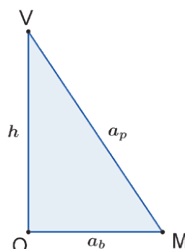
Relații între elemente în piramida regulată

Considerăm piramida triunghiulară regulată $VABC$, O centrul bazei și M mijlocul segmentului BC . În triunghiul echilateral ABC , notând cu l lungimea laturii:

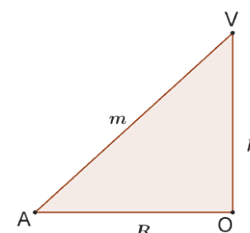
- AM este mediană și înălțime, $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$;
- OM este apotema triunghiului și este o treime din mediana AM , $OM \stackrel{\text{notată}}{=} a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6}$;
- OA este raza cercului circumscris triunghiului și este egală cu două treimi din mediana AM , $OA = R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$.



Triunghiul dreptunghic VOM face *legătura* între înălțimea piramidei (h), apotema bazei (a_b) și apotema piramidei (a_p): $h^2 + a_b^2 = a_p^2$.



Triunghiul dreptunghic VOA face *legătura* dintre înălțimea piramidei (h), raza cercului circumscris bazei (R) și muchia piramidei (m): $h^2 + R^2 = m^2$.



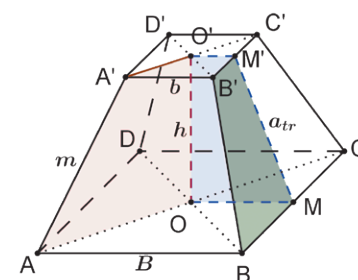
Activitate în echipe

Studiați raționamentele realizate anterior pentru o piramidă triunghiulară regulată și, lucrând în echipe, realizați raționamente echivalente pentru o piramidă patrulateră regulată, respectiv pentru o piramidă hexagonală regulată. Individual, realizați câte o fișă pentru fiecare dintre cele trei tipuri de piramide regulate și păstrați fișele în **portofoliul personal**.

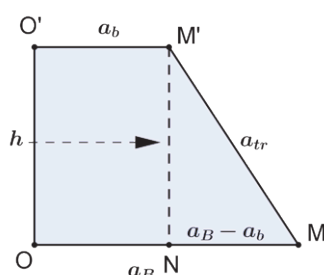
Relații între elemente în trunchiul de piramidă regulată

Considerăm trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, O și O' centrele bazelor și M și M' mijloacele segmentelor BC , respectiv $B'C'$. În reprezentarea din figura alăturată am notat cu B lungimea laturii bazei mari, b lungimea laturii bazei mici, h înălțimea trunchiului, m muchia trunchiului și a_{tr} apotema trunchiului.

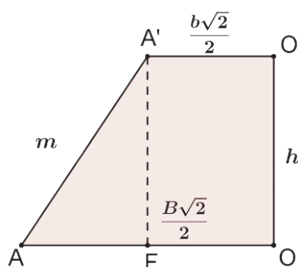
- ✓ OM și $O'M'$ sunt apotemele bazelor, $OM = a_B = \frac{B}{2}$ și $O'M' = a_b = \frac{b}{2}$;
- ✓ OA și $O'A'$ sunt razele cercurilor circumscrise bazelor, $OA = \frac{B\sqrt{2}}{2}$, $O'A' = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.



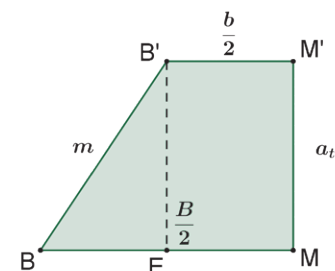
Cele trei trapeze dreptunghice evidențiate în figură realizează *legăturile* între elementele trunchiului de piramidă. Studiați imaginile din tabelul următor și justificați relațiile corespunzătoare.



$$h^2 + (a_B - a_b)^2 = a_{tr}^2$$



$$h^2 + \left(\frac{B\sqrt{2}}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = m^2$$



$$a_{tr}^2 + \left(\frac{B}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 = m^2$$



Activitate în echipe

Discutați, în echipe, cum se modifică relațiile anterioare în cazul trunchiului de piramidă triunghiulară regulată, respectiv în cel al trunchiului de piramidă hexagonală regulată. Individual, realizați câte o fișă pentru fiecare dintre cele trei tipuri de trunchi de piramidă regulată și păstrați fișele în **portofoliul personal**.

Exersați

- În piramida triunghiulară regulată $VABC$, înălțimea are lungimea de $6\sqrt{3}$ cm, iar măsura unghiului dintre (VBC) și (ABC) este de 60° . Punctul M este mijlocul segmentului BC .
 - Calculați lungimile apotemei VM , a muchiei laterale a piramidei și a laturii bazei.
 - Calculați sinusul unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei.
 - Calculați tangenta unghiului dintre VB și (VAM) .
 - Calculați distanța de la O la (VBC) .
 - Calculați distanța de la A la (VBC) .
 - Dacă punctele D și E aparțin muchiilor VA , respectiv AB , astfel încât $AD = 4\sqrt{7}$ cm și $AE = 8\sqrt{3}$ cm, atunci:
 - demonstrați că $(DEO) \parallel (VBC)$;
 - calculați $d((DEO), (VBC))$;
 - calculați $d(D, (ABC))$ și $d(D, (VBC))$.
- În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $\angle((B'AC), (ABC)) = 30^\circ$. Determinați:
 - măsura unghiului dintre planele $(B'AC)$ și $(D'AC)$;
 - măsura unghiului dintre planele $(BB'D')$ și (ABB') ;
 - lungimea înălțimii prisme;
 - distanța de la centrul bazei $ABCD$ la AC' ;
 - tangenta unghiului dintre AC' și (ADD') .
- În piramida patrulateră regulată $VABCD$, secțiunea axială VAC este un triunghi echilateral cu latura de $12\sqrt{2}$ cm. Calculați:
 - lungimea muchiei bazei;
 - apotema piramidei;
 - înălțimea piramidei;
 - măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei;
 - distanța de la centrul bazei la o muchie laterală;
 - distanța de la centrul bazei la o față laterală;
 - tangenta unghiului dintre o față laterală și planul bazei;
 - sinusul unghiului dintre două fețe laterale alăturate;
 - sinusul unghiului dintre două fețe laterale opuse.
- Bazele unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ de centre O , respectiv O' . Știind că $AB = 24$ cm, $A'B' = 12$ cm, iar distanța de la punctul O' la AB este de $12\sqrt{2}$ cm, determinați:
 - lungimile înălțimii, apotemei și muchiei laterale ale trunchiului de piramidă;
 - tangenta unghiului dintre o față laterală și planul bazei;
 - măsura unghiului dintre $O'P$ și (ABC) , unde P este mijlocul segmentului BC .
- În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, $AB = 16$ cm, $A'B' = 10$ cm și $\angle A'AB = 60^\circ$. Calculați:
 - lungimile muchiei laterale, apotemei și înălțimii trunchiului de piramidă;
 - tangenta unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei mari a trunchiului de piramidă;
 - sinusul unghiului dintre o față laterală și planul bazei mici a trunchiului de piramidă.



$$A_f = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_r = a^2 \sqrt{3}$$

$$n = \frac{1}{3}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$A_1 = 3 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Arii și volume ale unor corpuri geometrice

Aria și volumul cubului, ale paralelipipedului dreptunghic și ale prisme drepte



Ne amintim!

Un poliedru este un corp geometric delimitat de fețe plane de formă poligonală.

Aria unui poliedru este egală cu suma ariilor tuturor fețelor sale.

Aria unui poliedru este egală cu aria oricărei desfășurări a lui.

Volumul unui poliedru este o caracteristică prin care măsurăm spațiul ocupat de acesta.

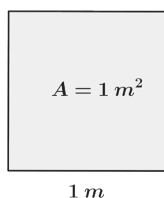
Volumul unui corp obținut prin alăturarea altor corpuri este egal cu suma volumelor corpurilor respective.

Aria și volumul cubului

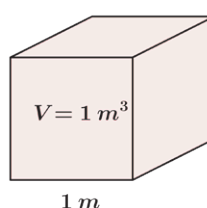


Ne amintim!

Unitatea de măsură pentru arie este metrul pătrat (m^2), care reprezintă aria unui pătrat cu latura de 1 m.



Unitatea de măsură pentru volum este metrul cub (m^3), care reprezintă volumul unui cub cu latura de 1 m



Cele șase suprafețe care delimitează un cub sunt pătrate congruente.

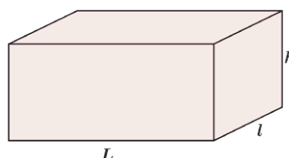
Aria unui cub cu latura l este egală cu $6l^2$.

Volumul unui cub cu latura l este egal cu l^3 .

Aria și volumul paralelipipedului dreptunghic

Un paralelipiped dreptunghic este determinat de cele trei dimensiuni ale sale: lungimea (L), lățimea (l) și înălțimea (h).

Aria unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L , l și h este $A = 2 \cdot (L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h)$.



Activitate practică

➤ Diana dorește să cumpere o coală de împachetat, pentru a împacheta o carte în formă de paralelipiped. Ea îi spune vânzătorului că grosimea cărții este de 4 cm, iar coperta are lungimea de 25 cm, respectiv lățimea de 15 cm. Acesta îi spune că, pentru a împacheta complet cartea dintr-o singură coală, are la dispoziție doar coli de formă pătrată cu latura de 30 cm, 40 cm, 50 cm și, respectiv, 60 cm, dar i-o recomandă pe cea cu latura de 40 cm.

Explicați ce raționament a făcut vânzătorul. În perechi, alegeți un obiect de pe bancă și stabiliți dimensiunile minime ale unei coli de hârtie în care se poate ambala. Puteți folosi ca obiect manualul de matematică!

➤ Bogdan este pasionat de plantele aromatice. Știe că, pentru o dezvoltare armonioasă a acestora, ghiveciul trebuie să fie



proporțional cu dimensiunea plantei și că este util să schimbe periodic pământul. Astfel, tufa lui de lavandă, care a crescut, necesită

mutarea într-un alt vas. A ales unul cubic, de latură 15 cm, iar acum are nevoie să cumpere o pungă cu pământ. Vânzătoarea îi recomandă să achiziționeze punga cu cantitatea cea mai mică de pământ, de 2 kg, care corespunde bine unei capacități de 2 litri, asigurându-l că îi va ajunge și chiar îi va rămâne o parte.

Care sunt informațiile esențiale de care a ținut cont vânzătoarea? Ce noțiuni de matematică au necesitat?

Exersăm împreună!

Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 4 m, 2 m și 3 m. Calculați aria lui.

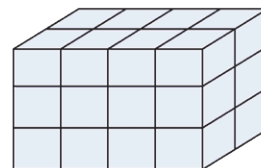
Rezolvare: $A = 2 \cdot (4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \Rightarrow A = 52 \text{ m}^2$.

Ce semnificație dăm produselor din paranteză? Ce semnificație dăm înmulțirii cu 2 a parantezei?

Descompunem paralelipipedul în cuburi de latură 1 m și obținem astfel $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ astfel de cuburi, fiecare cu volumul de 1 m^3 . Putem astfel afirma că volumul paralelipipedului este 24 m^3 .

În imagine putem observa că la descompunerea paralelipipedului s-au format, după înălțime, 3 straturi, fiecare strat fiind format din câte $4 \cdot 2$ cuburi de latură 1! Rețineți observația și identificați pe parcursul lecției unde poate fi utilizată!

Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L , l și h este $V = L \cdot l \cdot h$.



Convenții și notații

➤ Notăm, în general, cu A_b , A_l și A_t aria bazei, aria laterală, respectiv aria totală ale unei prisme.

➤ Folosind noile notații, putem spune că pentru un cub aria laterală este $A_l = 4l^2$, iar aria totală este $A_t = 6l^2$, care corespunde ariei cubului (conform definiției).

➤ În cazul unui paralelipiped dreptunghic, $A_l = 2 \cdot (L \cdot h + l \cdot h)$, în contextul în care considerăm bază fața ale cărei dimensiuni le-am notat cu L și l . Formula ariei laterale poate fi scrisă astfel: $A_l = 2 \cdot (L + l) \cdot h \Leftrightarrow A_l = P_b \cdot h$, unde am notat cu P_b perimetrul bazei.

Aria și volumul prisme drepte

Cubul și paralelipipedul dreptunghic sunt cazuri particulare de prisme. Ele au proprietatea că oricare dintre fețe poate fi considerată bază, ceea ce nu este valabil, de exemplu, într-o prismă triunghiulară. Din acest motiv, pentru o prismă oarecare facem distincție între fețele laterale și bazele acesteia și, implicit, și între ariile acestor suprafețe.

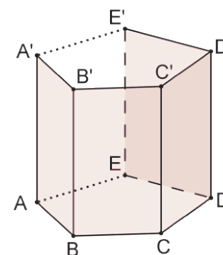
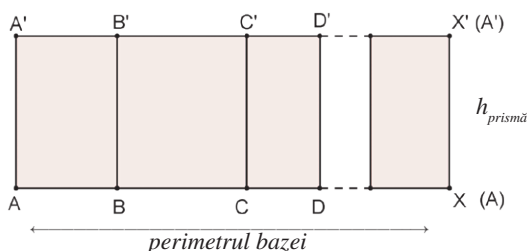
Definiție

Se numește *arie laterală* a unei prisme suma ariilor fețelor laterale.

Se numește *arie totală* a unei prisme suma ariilor tuturor fețelor prisme.

Aria totală a unei prisme este suma dintre *arie laterală* a prisme și dublul *ariei bazei*.

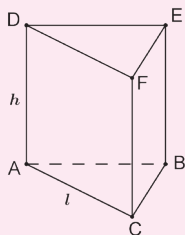
Considerăm o prismă dreaptă oarecare $ABCD \dots A'B'C'D' \dots$ și desfășurarea suprafeței laterale a acesteia, prezentată în figura alăturată. Calculul ariei laterale a prisme se reduce la calculul ariei dreptunghiului $AA'X'X$ (muchia $X'X$ este muchia $A'A$ înainte de decupare). Una dintre laturile dreptunghiului este formată din laturile poligonului bazei, deci lungimea ei este egală cu perimetrul bazei. Cealaltă latură reprezintă muchia laterală a prisme drepte, deci este înălțimea acesteia.



Rețineți!

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prisme: $A_l = P_b \cdot h$, unde P_b este perimetrul bazei prisme, iar h este înălțimea acesteia.

Prismă triunghiulară regulată

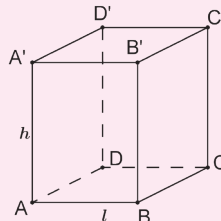


$$A_l = P_b \cdot h \Leftrightarrow A_l = 3l \cdot h$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

$$A_b = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Prismă patrulateră regulată

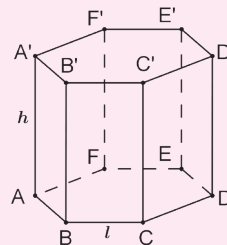


$$A_l = P_b \cdot h \Leftrightarrow A_l = 4l \cdot h$$

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

$$A_b = l^2$$

Prismă hexagonală regulată



$$A_l = P_b \cdot h \Leftrightarrow A_l = 6l \cdot h$$

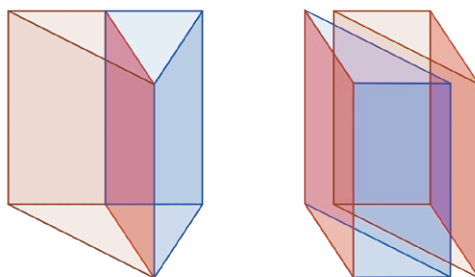
$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

$$A_b = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{2}$$

Considerăm o prismă triunghiulară regulată pe care o secționăm cu un plan ce conține două înălțimi paralele ale bazelor (planul roșu). Rearanjăm cele două corpuri obținute în urma secționării, astfel încât să obținem un paralelipiped dreptunghic.

Prisma triunghiulară inițială și paralelipipedul obținut:

- ✓ au aceeași înălțime;
- ✓ au baze cu aceeași arie;
- ✓ au același volum.


 Rețineți!

Volumul unei prisme drepte este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțimea prisme: $V = A_b \cdot h$

**Reflectăm!**

Când vorbim despre *volum* ne referim la spațiul ocupat de corp, exprimat în unități metrice (m^3 , multipli sau submultipli ai acestuia).

Dacă ne referim la o cantitate de lichid cu care să umplem respectivul spațiu, vom determina *capacitatea* corpului, exprimată în litri, multipli sau submultipli ai acestuia.

Legătura dintre volum și capacitate este obținută din relația: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$.

**Reflectăm!**

Orice triunghi se poate *transforma* prin decupare (în două sau mai multe părți) și rearanjare într-un dreptunghi. Așadar, orice prismă triunghiulară dreaptă are același volum cu acela al unui paralelipiped dreptunghic cu aria dreptunghiului de la bază egală cu aria triunghiului de la baza prisme triunghiulare, în condiția în care înălțimile celor două corpuri sunt egale.

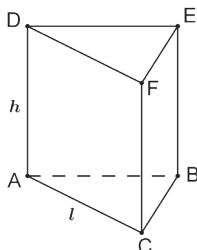
Secționăm o prismă triunghiulară dreaptă cu plane ce conțin drepte perpendiculare pe planul bazei, în patru părți care, prin realăturare, să formeze un paralelipiped dreptunghic! Reduțeți întâi problema la un triunghi oarecare!

Orice poligon poate fi descompus în triunghiuri, deci volumul unei prisme drepte cu baza un poligon oarecare este egal cu suma volumelor prismelor triunghiulare corespunzătoare unei partiționări a bazei în triunghiuri. Realizați un desen și evidențiați planele de secțiune și prismele triunghiulare obținute. Comparați cu desenele altor colegi!



Exersăm împreună!

Prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$ are $AB = 6$ cm și $AD = 8$ cm. Calculați volumul prisme.



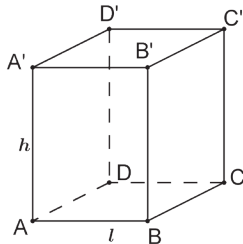
$$A_b = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_b = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h \Leftrightarrow V = 72\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Capacitatea prisme:

$$72\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 72\sqrt{3} \cdot 0,001 \text{ dm}^3 = 0,072\sqrt{3} \text{ l} = 72\sqrt{3} \text{ ml}$$

O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm și înălțimea de 10 cm. Calculați volumul prisme.

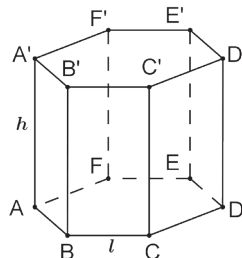


$$A_b = 8^2 \Leftrightarrow A_b = 64 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h \Leftrightarrow V = 640 \text{ cm}^3$$

Încap 500 ml de apă într-un vas cu forma și dimensiunile prisme?
 $640 \text{ cm}^3 = 0,640 \text{ dm}^3 = 0,640 \text{ l} = 640 \text{ ml} > 500 \text{ ml}$

Latura bazei unui vas în formă de prismă hexagonală regulată este de 12 cm, iar înălțimea de 9 cm. Calculați volumul vasului.



$$A_b = \frac{3 \cdot 12^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A_b = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h \Leftrightarrow V = 1944\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Verificați dacă se pot pune 3,5 litri de apă în vas. Folosiți în calcul faptul că $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$!



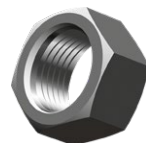
Observații

Când spunem *prismă regulată* ne referim atât la baze, care trebuie să fie poligoane regulate congruente, cât și la faptul că muchiile laterale sunt și înălțimi ale corpurilor respective.



Aplicație practică

O piuliță are, pe exterior, formă de prismă hexagonală, iar pe interior, formă cilindrică. Care credeți că sunt motivele pentru care forma obișnuită a piuliței este aceasta?



Exersați

1. Completați răspunsul pentru a obține propoziții adevărate:

- Diagonala unui cub cu latura de 10 cm este egală cu ... cm.
- Aria unui cub cu latura de 10 dm este egală cu ... dm².
- Volumul unui cub cu latura de 5 m este ... m³.
- Dacă aria totală a unui cub este egală cu 216 cm², atunci latura cubului este egală cu ... cm.
- Dacă volumul unui cub este egal cu 216 dm³, atunci latura cubului este egală cu ... dm.
- Dacă diagonala unui cub are lungimea de $4\sqrt{3}$ dm, atunci volumul cubului este egal cu ... dm³.

2. Un cub are aria unei fețe de 81 cm². Calculați:

- aria totală a cubului;
- lungimea muchiei cubului;
- volumul cubului.

3. Diagonala unei fețe a unui cub are lungimea de 12 cm. Calculați:

- lungimea muchiei cubului;
- lungimea diagonalei cubului;
- aria laterală și aria totală a cubului;
- volumul cubului.

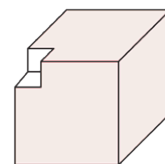
4. Un cub $ABCD A'B'C'D'$ are aria secțiunii diagonale $ACC'A'$ de $64\sqrt{2}$ cm². Calculați:

- lungimea muchiei cubului;
- lungimea diagonalei cubului;
- aria laterală și aria totală a cubului;
- volumul cubului.

5. Un cub din lemn cu latura de 20 cm este vopsit pe toate fețele. Tăiem cubul în cubulețe cu latura de 10 cm.

- Câte cubulețe se obțin?
- Dacă pentru vopsirea cubului inițial s-au folosit 480 g de vopsea, ce cantitate este necesară pentru vopsirea suprafețelor nevopsite ale cubulețelor?

6. Încap 8 litri de apă într-un vas în formă de cub care are latura de 21 cm?
7. Un bloc de piatră din granit are formă cubică cu latura de 25 cm. Calculați masa blocului de granit, știind că densitatea acestuia este de 2600 kg/m^3 .
8. Dintr-un cub de lemn cu latura de 4 dm se îndepărtează dintr-un colț o bucată în formă de cub cu latura de 1 dm. Calculați aria și volumul corpului obținut.



9. Completați răspunsul pentru a obține propoziții adevărate:
- Diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 3 cm, 4 cm și 12 cm este egală cu ... cm.
 - Aria unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 5 cm, 8 cm și 10 cm este egală cu ... cm^2 .
 - Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 3 cm, 4 cm și 5 cm este egal cu ... cm^3 .
 - Înălțimea unui paralelipiped dreptunghic care are $L = 8 \text{ cm}$, $l = 6 \text{ cm}$ și $V = 240 \text{ cm}^3$ este egală cu ... cm.
10. Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ are $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ și $AA' = 3 \text{ cm}$. Calculați:
- lungimea diagonalei;
 - volumul paralelipipedului;
 - aria laterală a paralelipipedului, dacă baza acestuia este $ABCD$;
 - aria laterală a paralelipipedului, dacă baza acestuia este $ABB' A'$.
11. Două cuburi, fiecare dintre ele cu latura de 5 cm, se așază unul lângă altul astfel încât să aibă o față comună. Calculați aria totală și volumul corpului obținut.
12. a) Calculați de câte ori se mărește volumul unui cub dacă i se dublează latura.
b) Calculați de câte ori se mărește volumul unui paralelipiped dreptunghic dacă i se dublează înălțimea.
13. Baza unui gard are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 12 m, lățimea de 25 cm și înălțimea de 30 cm și este realizată din beton. Câți metri cubi de beton au fost necesari pentru construcția ei?
14. Dimensiunile unei cărămizi sunt de 250 mm, 300 mm și 238 mm. Consumul este de 52 de cărămizi la un metru cub de zidărie. Cât la sută din volumul unui metru cub de zidărie reprezintă mortarul folosit la lipirea cărămizilor?
15. Un corp de sticlă în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ are dimensiunile $AB = 20 \text{ cm}$, $BC = 30 \text{ cm}$, $AA' = 60 \text{ cm}$ și conține o anumită cantitate de lichid. Dacă este așezat cu fața $ABCD$ pe un plan orizontal, atunci apa se ridică până la înălțimea de 15 cm. La ce înălțime este apa, dacă așezăm corpul pe fața:
- $ABB' A'$?
 - $BCC' B'$?
16. Secțiunea diagonală $ACC' A'$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ este un pătrat cu aria de 144 cm^2 , iar $BC = 6 \text{ cm}$. Calculați diagonala, aria totală și volumul paralelipipedului.
17. O piscină în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 12 m și lățimea de 6 m. Datorită căldurii excesive s-a evaporat apă din bazin, iar nivelul apei a scăzut cu 5 cm. Câți hectolitri de apă s-au evaporat?
18. O ladă cu capac este confecționată din scândură cu grosimea de 2 cm, având formă de paralelipiped dreptunghic. Dimensiunile lăzii, măsurate pe exterior, sunt $L = 1,5 \text{ m}$, $l = 1,2 \text{ m}$ și $h = 0,6 \text{ m}$. Determinați:
- volumul interior al lăzii;
 - masa lăzii goale, știind că densitatea lemnului este de $0,72 \text{ g/cm}^3$.
 - Se poate introduce în ladă o tijă subțire de lungime 2 m, astfel încât să se închidă capacul?
19. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt direct proporționale cu numerele 3, 4 și 12, iar diagonala acestuia este de 26 cm. Calculați aria și volumul paralelipipedului.
20. Completați răspunsul pentru a obține propoziții adevărate, folosind, după caz, transformări ale unităților de măsură:
- Volumul unei prisme patrulater regulate, cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 0,5 dm, este ... cm^3 .
 - Diagonala unei prisme patrulater regulate, cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de $4\sqrt{2} \text{ cm}$, este ... cm.
 - Aria laterală a unei prisme patrulater regulate, cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 0,5 dm, este ... cm^2 .
 - Înălțimea unei prisme patrulater regulate, cu latura bazei de 4 cm și $V = 240 \text{ cm}^3$, este egală cu ... cm.
 - Latura bazei unei prisme patrulater regulate, cu înălțimea de 10 cm și $A_l = 240 \text{ cm}^2$, este egală cu ... cm.
 - Dacă volumul unei prisme triunghiulare regulate este egal cu 200 m^3 și aria bazei este egală cu 10 m^2 , atunci lungimea muchiei laterale este egală cu ... m.
 - Dacă aria totală a unei prisme triunghiulare regulate, cu latura bazei de 8 cm, este de 448 cm^2 , atunci lungimea înălțimii este de ... cm.



21. Într-o prismă triunghiulară regulată, latura bazei este de 6 cm, iar aria laterală este de 108 cm^2 . Calculați aria totală și volumul prisme.

22. O prismă triunghiulară regulată are diagonală unei fețe laterale de 13 cm, iar latura bazei de 5 cm. Calculați înălțimea, aria totală și volumul prisme.

23. Aria laterală a unei prisme triunghiulare regulate este de 300 cm^2 și aria totală este de $50(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$. Calculați volumul prisme.

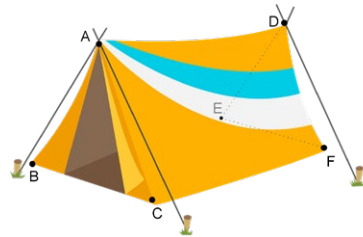
24. Aria laterală a unei prisme triunghiulare regulate este de 36 cm^2 și volumul este de $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Calculați aria totală a prisme.

25. O prismă triunghiulară regulată are fețele laterale pătrate cu aria de 32 cm^2 . Calculați aria totală și volumul prisme.

26. Un cort are forma unei prisme triunghiulare regulate $ABCDEF$, cu $AB = 4 \text{ m}$ și $AD = 6 \text{ m}$.

a) Calculați cantitatea de material necesară pentru confecționarea acestui cort, ținând cont că nu se folosește material pentru fața $BCFE$ (care este pe sol) și că 10% din material se folosește la îmbinările cortului.

b) Care este numărul maxim de oameni care pot fi în cort la un moment dat, dacă fiecare persoană care se află în cort are nevoie de cel puțin 2 m^3 de aer?



27. Într-o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, perimetrul bazei este egal cu 24 cm, iar diagonală prismei este egală cu 12 cm. Asociați fiecărui element de pe coloana A valoarea corespunzătoare din coloana B.

A	B
a) aria bazei	1) $72(1 + 2\sqrt{2})$
b) aria laterală	2) 72
c) aria totală	3) $144\sqrt{2}$
d) volumul	4) 36
e) aria patrulaterului $ACC'A'$	5) $216\sqrt{2}$
	6) 64

28. Volumul unei prisme patrulater regulate este de 288 cm^3 și latura bazei este de 6 cm. Determinați aria laterală și aria totală.

29. Aria laterală a unei prisme patrulater regulate este de 196 cm^2 și volumul este de 343 cm^3 . Determinați aria totală a prisme.

30. Un cort din pânză are forma unei prisme patrulater regulate, cu latura bazei de 4 m și înălțimea de 240 cm. Câtă pânză este necesară pentru confecționarea cortului? Se va ține cont de faptul că se folosește pânză doar pentru pereți și tavan și 15% din pânză este folosită la realizarea îmbinărilor.

31. O prismă patrulateră regulată are muchia bazei de 8 cm și diagonală unei fețe laterale de 10 cm. Determinați aria totală și volumul prisme.

32. Măsura unghiului dintre diagonală unei prisme patrulater regulate și planul bazei este de 30° . Determinați aria totală și volumul prisme, dacă muchia bazei este de $4\sqrt{2} \text{ cm}$.

33. Completați răspunsul pentru a obține propoziții adevărate:

a) Volumul unei prisme hexagonale regulate, cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 6 cm, este ... cm^3 .

b) Diagonală cea mai lungă a unei prisme hexagonale regulate, cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de $4\sqrt{2} \text{ cm}$, este ... cm.

c) Aria laterală a unei prisme hexagonale regulate, cu latura bazei de 8 cm și înălțimea de 10 cm, este ... cm^2 .

d) Înălțimea unei prisme hexagonale regulate, cu latura bazei de 4 cm și $V = 480\sqrt{3} \text{ cm}^3$, este egală cu ... cm.

e) Latura bazei unei prisme hexagonale regulate, cu înălțimea de 10 cm și $A_l = 240 \text{ cm}^2$, este egală cu ... cm.

34. O prismă hexagonală regulată are toate muchiile egale cu 16 cm. Determinați aria totală, volumul și cea mai lungă dintre diagonalele prisme.

35. O bară din aluminiu în formă de prismă dreaptă are baza un hexagon regulat cu latura de 3 cm și lungimea de 1 m. Știind că bara cântărește 6196,5 g, determinați densitatea aluminiului. Folosiți în calcule valoarea aproximativă $\sqrt{3} \approx 1,7$.

36. Considerăm prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$, $AB = 5 \text{ cm}$, în care măsura unghiului dintre AC' și planul bazei este de 30° . Determinați înălțimea, aria totală și volumul prisme.

Aria și volumul piramidei și ale trunchiului de piramidă regulată

Aria și volumul piramidei



Ne amintim!

O piramidă are fețele laterale triunghiuri, iar baza un poligon.

Definiție

Aria laterală a unei piramide este suma ariilor fețelor laterale.

Aria totală a unei piramide este suma ariilor tuturor fețelor.

Aria totală este suma dintre aria laterală și aria bazei.

Exersăm împreună!

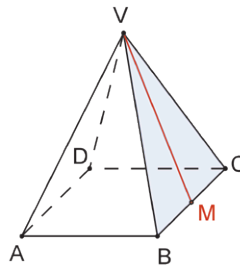
Considerăm piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 10$ cm și apotema $VM = 6$ cm, M mijlocul laturii BC . Calculați:

- aria $\triangle VBC$;
- aria laterală a piramidei;
- aria totală a piramidei.

Rezolvare. a) Baza $ABCD$ este pătrat, deci $BC = AB = 10$ cm și VM este înălțime în $\triangle VBC$, așadar $A_{\triangle VBC} = \frac{BC \cdot VM}{2} \Leftrightarrow A_{\triangle VBC} = 30$ cm².

b) Într-o piramidă regulată fețele laterale sunt triunghiuri congruente, deci $A_l = 4 \cdot A_{\triangle VBC} \Rightarrow A_l = 120$ cm².

c) $A_{ABCD} = AB^2 \Leftrightarrow A_{ABCD} = 100$ cm², deci $A_t = A_l + A_{ABCD} \Leftrightarrow A_t = 220$ cm².



Rețineți!

Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu jumătate din produsul dintre perimetrul bazei și apotema piramidei: $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, unde am notat cu P_b perimetrul bazei și cu a_p apotema piramidei.

Exersăm împreună!

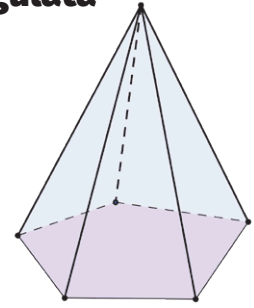
În piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, latura bazei este de 8 cm, iar înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm. Calculați aria laterală și aria totală a sa.

Rezolvare.

În hexagonul regulat $ABCDEF$, apotema $OM = 4\sqrt{3}$ cm; apotema piramidei, VM , calculată din triunghiul dreptunghic VOM , este $VM = 5\sqrt{3}$ cm.

$$A_l = \frac{P_{ABCDEF} \cdot VM}{2} \Rightarrow A_l = 120\sqrt{3} \text{ cm}^2;$$

$$A_b = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2, \text{ iar } A_t = A_l + A_b \Rightarrow A_t = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



Convenții și notații

La piramidă notăm, în general, cu A_b , A_l și A_t aria bazei, aria laterală, respectiv aria totală, acestea fiind în relația: $A_t = A_l + A_b$.



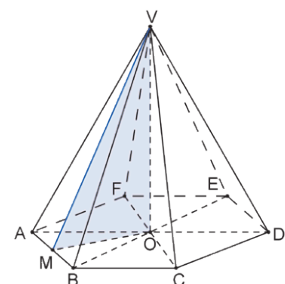
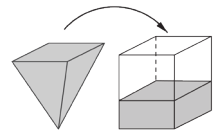
Reflectăm!

În problema alăturată, să notăm cu l lungimea laturii pătratului și cu a_p apotema piramidei. Aria feței VBC va fi egală cu $\frac{l \cdot a_p}{2}$, iar aria laterală va fi $A_l = 4 \cdot \frac{l \cdot a_p}{2} = 2 \cdot l \cdot a_p$. Baza piramidei fiind un pătrat, $4l$ reprezintă perimetrul bazei, deci $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, în care am notat cu P_b perimetrul bazei. Se modifică această formulă dacă poligonul bazei este un triunghi echilateral? Dar dacă este un hexagon regulat sau un poligon regulat oarecare?



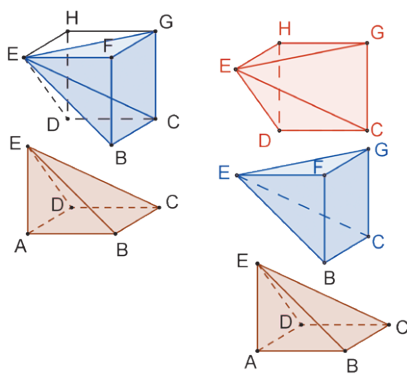
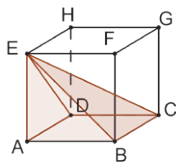
Activitate practică

Dintr-un carton mai gros construieți o piramidă patrulateră regulată, fără a lipi și baza, și o prismă patrulateră regulată, fără baza superioară, ambele cu aceeași înălțime și cu bazele pătrate congruente. Umpleți piramida cu nisip și vărsați conținutul în prismă. Repetați operația până când prisma se umple. Ce constatați?



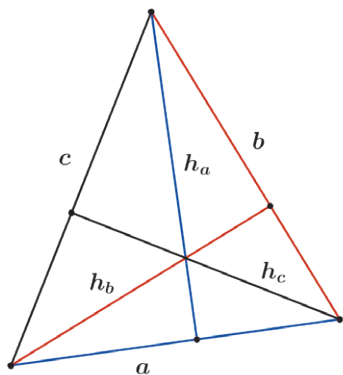
Observații

Considerăm un cub $ABCDEFGH$ și piramidele patrulater $EABCD$, $EBCGF$ și $ECGHD$. Observați în desenul următor modul în care cele trei piramide compun cubul. Justificați *congruența* celor trei piramide și observați că volumul fiecăreia dintre ele este egal cu o treime din volumul cubului.



Reflectăm!

În clasele anterioare ați învățat că pentru calculul ariei unui triunghi putem folosi oricare dintre laturile sale, asociind înălțimea corespunzătoare. Mai mult, folosind formula ariei triunghiului ați dedus că înălțimile unui triunghi sunt invers proporționale cu lungimile laturilor corespunzătoare: $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. Deduceți o regulă și o formulă asemănătoare pentru un tetraedru.



Rețineți!

Volumul unei piramide este o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei.

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Exersăm împreună!

1. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ se cunosc latura bazei $AB = 12$ cm și muchia laterală $VA = 8$ cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul piramidei.

Rezolvare. Fie M mijlocul segmentului BC și VM apotema piramidei. Calculând VM în triunghiul dreptunghic VMB : $VM = 2\sqrt{7}$ cm (verificați!)

$$A_l = \frac{P_{\triangle ABC} \cdot VM}{2} \Rightarrow A_l = 36\sqrt{7} \text{ cm}^2; A_b = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2, \text{ deci } A_t = 36(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

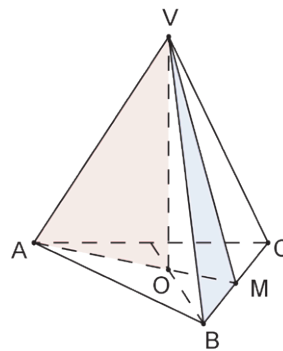
Pentru calculul volumului este necesar să determinăm înălțimea piramidei.

În triunghiul echilateral ABC :

$$AM = 6\sqrt{3} \text{ cm, deci } AO = \frac{2}{3} \cdot AM = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Aplicând *teorema lui Pitagora* în triunghiul dreptunghic VOA , obținem $VO = 4$ cm. Așadar

$$V = \frac{A_{\triangle ABC} \cdot VO}{3} \Rightarrow V = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$



2. Considerăm cubul $ABCA'D'B'C'D'$ cu latura de 6 cm.

a) Calculați volumul tetraedrului $B'ABC$.

b) Calculați distanța de la punctul B la planul $(B'AC)$.

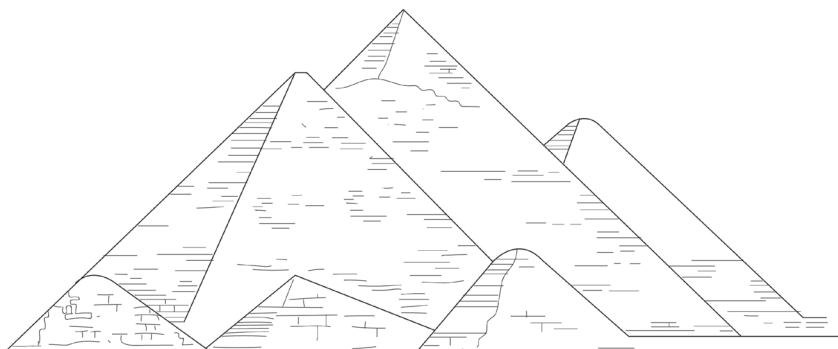
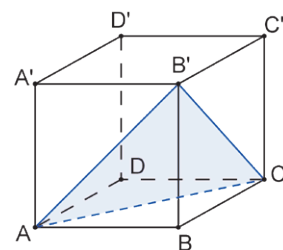
Rezolvare.

a) Tetraedru $B'ABC$, cu baza triunghiul dreptunghic ABC , are înălțimea $B'B = 6$ cm;

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} = 18 \text{ cm}^2 \Rightarrow V_{B'ABC} = \frac{A_{\triangle ABC} \cdot B'B}{3} \Rightarrow V_{B'ABC} = 36 \text{ cm}^3.$$

b) Distanța de la B la planul $(B'AC)$ reprezintă înălțimea corespunzătoare bazei $B'AC$ în tetraedru $B'ABC$, pe care o notăm cu h . Folosind valoarea volumului calculată la punctul anterior, avem $V_{B'ABC} = \frac{A_{\triangle B'AC} \cdot h}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 36 = \frac{18\sqrt{3} \cdot h}{3} \text{ și obținem } h = 2\sqrt{3} \text{ cm, deci } d(B, (B'AC)) = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$



Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată



Ne amintim!

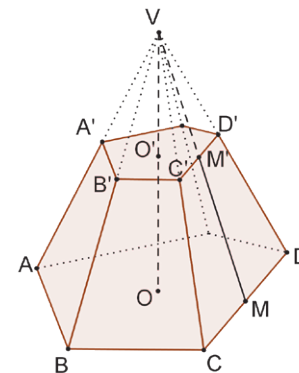
Corpul geometric format prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza și înlăturarea piramidei mici obținute se numește *trunchi de piramidă*.

Într-un trunchi de piramidă regulată:

- ✓ fețele laterale sunt trapeze isoscele congruente;
- ✓ înălțimea unei fețe laterale este apotema trunchiului;
- ✓ înălțimea trunchiului de piramidă este determinată de centrele bazelor acestuia.

Conform notațiilor din desenul alăturat, au loc egalitățile:

$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM} = k$, unde k reprezintă *raportul de asemănare* dintre lungimile corespunzătoare din piramida obținută prin secționare și piramida inițială. Raportul este util în calcule și raționamente care implică cele trei corpuri (cel inițial și cele obținute prin secționare).



Exersăm împreună!

Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ este obținut prin secționarea piramidei patrulateră regulate $VABCD$ cu un plan paralel cu baza. Punctele O și O' sunt centrele celor două baze, $AB = 12$ cm, $A'B' = 4$ cm și $AA' = 8$ cm. Calculați:

- a) aria feței $BCC'B'$;
- b) aria laterală a trunchiului de piramidă;
- c) înălțimea OO' a trunchiului de piramidă;
- d) înălțimea piramidei $VABCD$;
- e) volumul piramidei $VA'B'C'D'$;
- f) volumul trunchiului de piramidă.

Rezolvare. Observați desenul alăturat și cele două trapeze dreptunghice evidențiate. Recapitulați etapele de calcul al elementelor în trunchiul de piramidă.

a) Notând cu M și M' mijloacele segmentelor BC , respectiv $B'C'$, segmentul MM' reprezintă apotema trunchiului de piramidă, dar și înălțimea trapezului $BCC'B'$.

$$M'M = 4\sqrt{3} \text{ cm (verificați calculele!)}, A_{BCC'B'} = \frac{(BC + B'C') \cdot M'M}{2} \Rightarrow A_{BCC'B'} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

b) $A_l = 4 \cdot A_{BCC'B'} \Rightarrow A_l = 128\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și observăm că:

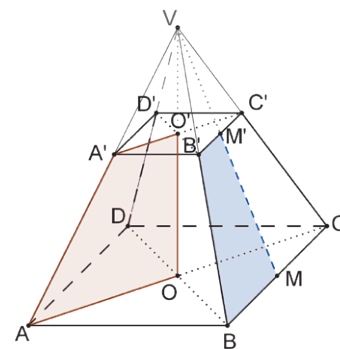
$$A_l = 4 \cdot \frac{(BC + B'C') \cdot M'M}{2} \Leftrightarrow A_l = \frac{(4 \cdot BC + 4 \cdot B'C') \cdot M'M}{2} \Leftrightarrow A_l = \frac{(P_{ABCD} + P_{A'B'C'D'}) \cdot M'M}{2}.$$

c) $OO' = 4\sqrt{2} \text{ cm}$ (verificați calculele!).

d) Folosim relația $\frac{VO'}{VO} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{VO - 4\sqrt{2}}{VO} = \frac{4}{12}$, deci $VO = 6\sqrt{2} \text{ cm}$.

e) $V_{VA'B'C'D'} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ (verificați!).

f) Pentru a calcula volumul trunchiului de piramidă, vom scădea din volumul piramidei $VABCD$ volumul piramidei $VA'B'C'D'$: $V_{ABCD} = 288\sqrt{2} \text{ cm}^3$, deci $V_{ABCD A'B'C'D'} = \frac{832\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.



**Reflectăm!**

- Calculați raportul de asemănare al celor două piramide din problema anterioară, precum și raportul volumelor lor. Ce constatați?
- Ne amintim că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare. Formulați o propoziție analoagă pentru volumul a două piramide asemenea și verificați relația folosind datele din problema anterioară.

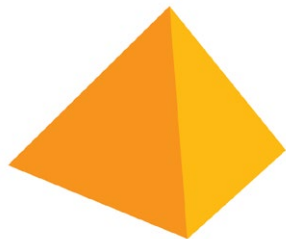
**Rețineți!**

Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată se poate calcula cu formula $A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_{tr}}{2}$, unde am notat cu P_B și P_b perimetrul bazei mari, respectiv perimetrul bazei mici, iar cu a_{tr} apotema trunchiului de piramidă.

Aria totală a unui trunchi de piramidă este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze.

$A_t = A_l + A_B + A_b$, unde am notat cu A_B și A_b aria bazei mari, respectiv aria bazei mici.

Volumul unui trunchi de piramidă este $V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$, unde h reprezintă înălțimea trunchiului de piramidă.

**Exersați****Aria și volumul piramidei**

1. Completați răspunsul pentru a obține propoziții adevărate:

- Aria laterală a unei piramide patrulateră regulate, care are toate muchiile de lungime 8 cm, este egală cu ... cm².
- Aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate, care are muchia bazei de 7 cm și apotema de 6 cm, este egală cu ... cm².
- Volumul unei piramide triunghiulare regulate, cu latura bazei de 10 cm și înălțimea de 12 cm, este egal cu ... cm³.
- Aria totală a unei piramide patrulateră regulate, cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de 3 cm, este egală cu ... cm².
- Aria laterală unei piramide patrulateră regulate, cu latura bazei de 8 cm și înălțimea de 3 cm, este egală cu ... cm².
- Înălțimea unei piramide patrulateră regulate, cu latura bazei de 4 cm și $V = 16$ cm³, este egală cu ... cm.
- Latura bazei unei piramide hexagonale regulate, cu apotema de 10 cm și $A_l = 240$ cm², este egală cu ... cm.
- Volumul unei piramide patrulateră regulate, cu apotema de 5 cm și apotema bazei de 4 cm, este egal cu ... cm³.
- Înălțimea unei piramide patrulateră regulate cu latura bazei de 8 cm și aria totală de 228 cm² este egală cu ... cm.

2. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 4 cm și muchia laterală de 6 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul piramidei.

3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, O și E sunt centrul bazei piramidei, respectiv mijlocul segmentului AB . Dacă $VE = 20$ cm și $VO = 12$ cm, calculați:

- aria totală a piramidei;
- volumul piramidei.

4. O piramidă triunghiulară regulată are înălțimea de 12 cm și apotema de 13 cm. Calculați aria totală și volumul piramidei.

5. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, $AB = 8\sqrt{2}$ cm, iar măsura unghiului dintre VA și (ABC) este de 60°. Determinați:

- lungimea muchiei laterale;
- înălțimea piramidei;
- aria laterală;
- volumul piramidei.

6. Un tetraedru regulat are aria totală de $144\sqrt{3}$ cm². Calculați înălțimea și volumul piramidei.

7. O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de 6 cm și înălțimea de 3 cm. Calculați aria totală și volumul piramidei.

8. O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de $6\sqrt{13}$ cm și latura bazei de 36 cm. Calculați aria totală și volumul piramidei.



Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată

17. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, latura bazei mari este $AB = 18$ cm, latura bazei mici este $A'B' = 6$ cm, iar apotema trunchiului are lungimea de 12 cm. Calculați:

- înălțimea trunchiului de piramidă;
- aria laterală a trunchiului de piramidă;
- aria totală a trunchiului de piramidă;

d) volumul trunchiului de piramidă;

e) înălțimea și volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

18. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria laterală egală cu $160\sqrt{3}$ cm², apotema de $2\sqrt{6}$ cm și latura bazei mici de $8\sqrt{2}$ cm. Calculați:

- înălțimea trunchiului, latura bazei mari și muchia laterală a trunchiului;
- volumul trunchiului de piramidă;
- aria laterală a piramidei din care provine trunchiul.

19. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, aria laterală este egală cu 180 cm², iar laturile bazelor au lungimile de 12 cm, respectiv 6 cm.

- Calculați apotema și înălțimea trunchiului de piramidă.
- Câți litri de apă sunt necesari pentru a umple un recipient cu forma și dimensiunile trunchiului de piramidă de mai sus?
- Calculați aria totală și volumul piramidei din care provine trunchiul.

20. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată, $ABCD A'B'C'D'$, are latura bazei mari de 20 cm, înălțimea de 8 cm și volumul de 1664 cm³. Calculați:

- latura bazei mici a trunchiului de piramidă;
- aria laterală a trunchiului de piramidă;
- aria totală a trunchiului de piramidă;
- volumul piramidei din care provine trunchiul.

21. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are laturile bazelor de 12 cm, respectiv 6 cm și apotema de $2\sqrt{3}$ cm. Calculați înălțimea, muchia, aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

22. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, laturile bazelor sunt de 12 cm și 8 cm, iar înălțimea este de 2 cm. Calculați apotema, muchia laterală, aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

23. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABC A'B'C'$, cu latura bazei mari de 12 cm și latura bazei mici de 6 cm, volumul este de $126\sqrt{3}$ cm³. Calculați:

- înălțimea trunchiului de piramidă;
- apotema trunchiului de piramidă;
- aria laterală și aria totală.

24. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, latura bazei mari este de 9 cm, apotema este de $2\sqrt{3}$ cm, iar aria laterală este de $45\sqrt{3}$ cm². Calculați:

- latura bazei mici și muchia laterală a trunchiului de piramidă;
- aria totală și volumul trunchiului de piramidă;
- aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

25. Un tetraedru regulat $ABCD$, $AB = 12$ cm, se secționează cu un plan paralel cu fața BCD , astfel încât distanța de la vârful A la planul de secțiune să fie de $\sqrt{6}$ cm. Calculați aria laterală și volumul trunchiului de piramidă care se obține.

26. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei mari egală cu 8 cm și înălțimea de 12 cm.

- Calculați aria laterală și volumul piramidei.
- La ce distanță de vârful piramidei trebuie construit un plan paralel cu planul bazei, astfel încât raportul dintre volumul piramidei mici formate și volumul trunchiului de piramidă obținut să fie $\frac{1}{7}$?

27. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată laturile bazelor sunt de 12 cm, respectiv 8 cm, iar apotema este de $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:

- înălțimea trunchiului de piramidă;
- aria laterală și volumul trunchiului de piramidă;
- aria laterală și volumul piramidei din care provine.

28. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, $AB = 6$ cm și $VA \perp VD$, se secționează cu un plan paralel cu baza, obținându-se un trunchi de piramidă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$, cu $A'B' = 3$ cm. Calculați:

- apotema și înălțimea trunchiului de piramidă;
- aria laterală și volumul trunchiului de piramidă;
- aria laterală și volumul piramidei $VABCDEF$.

29. O piramidă hexagonală regulată are latura bazei de 20 cm și înălțimea 75% din latura bazei.

- Calculați aria laterală și volumul piramidei.
- La ce distanță de vârf trebuie făcută o secțiune paralelă cu baza, astfel încât raportul volumelor celor două corpuri formate să fie $\frac{8}{19}$? Calculați dimensiunile trunchiului de piramidă.

30. Un obiect în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată se depozitează într-o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic, cu volum cât mai mic. Bazele trunchiului sunt de 12 cm și 8 cm, iar înălțimea acestuia este de 5 cm. Cât la sută din volumul cutiei ocupă obiectul?

Știați că?

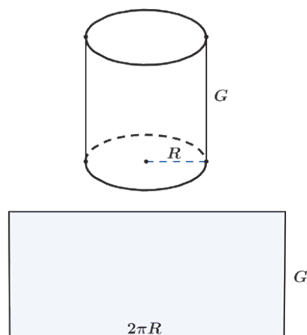
Piramida lui Keops, denumită și Marea Piramidă:

- este una dintre cele șapte minuni ale lumii antice;
- a fost construită între anii 2700 – 2500 î.H;
- timp de 43 de secole, până la construirea Turnului Eiffel, a fost cea mai înaltă construcție din lume (139 m);
- în construcția ei s-au folosit circa 2,3 milioane de blocuri de piatră (fiecare cântărind circa 2,5 t), aduse de la aproximativ 845 km depărtare;
- fiecare fațadă este orientată cu precizie spre câte un punct cardinal: N, E, V, S;
- este așezată exact pe paralela de 30° , cea care separă în mod egal uscatul de apă;
- diagonalele prelungite ale sale traversează centrul fiecărui continent.



Aria și volumul cilindrului circular drept, ale conului circular drept și ale trunchiului de con circular drept

Aria și volumul cilindrului circular drept

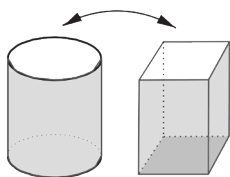


Observați o cutie de conservă de formă cilindru circular drept, care are lipită o etichetă pe toată suprafața laterală. Locul de îmbinare a marginilor etichetei apare sub forma unui segment, acesta reprezentând atât o generatoare a cilindrului, notată G , cât și o înălțime a cilindrului, h . Tăiați eticheta după linia de îmbinare și desfășurați-o. Obțineți astfel desfășurarea cilindrului circular drept sub forma unui dreptunghi. Amintiți-vă ce reprezintă în cilindrul inițial cele două dimensiuni ale desfășurării!



Activitate practică

Dintr-un carton mai gros construiți un cilindru circular drept cu raza bazei de 10 cm și o prismă dreaptă cu baza un dreptunghi cu dimensiunile de 20 cm și 15,7 cm, ambele cu aceeași înălțime. La niciunul dintre corpuri nu lipiți baza superioară. Umpleți unul dintre corpuri cu nisip și vărsați conținutul în celălalt corp. Ce constatați? Observați că ariile bazelor celor două corpuri sunt aproximativ egale.



Observații

Din punct de vedere al determinării matematice a valorilor ariilor de la exercițiul rezolvat 1, rezultatele 1200π și 2000π reprezintă răspunsul corect. Din punct de vedere al utilizării practice, după caz, se utilizează diferite aproximări ale numărului irațional π .

Exprimați ariile anterioare folosind diferite aproximări ale numărului π ! Comparați valorile obținute la utilizarea diferitelor aproximări și alegeți una potrivită pentru a cumpăra o cantitate de vopsea necesară acoperirii suprafeței totale a cilindrului, știind că se consumă 0,4 kg de vopsea la 1 m².



Rețineți!

■ **Aria laterală a unui cilindru circular drept** este egală cu aria desfășurării suprafeței laterale a acestuia.

$$A_l = 2\pi R \cdot G, \quad R \text{ este raza bazei, } G \text{ este generatoarea cilindrului.}$$

Aria totală a unui cilindru circular drept este egală cu suma dintre aria laterală și dublul ariei bazei.

$$A_t = A_l + 2A_b \Leftrightarrow A_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 \Leftrightarrow A_t = 2\pi R \cdot (R + G)$$

■ **Volumul unui cilindru circular drept** se calculează cu formula $V = A_b \cdot h$ ($V = \pi R^2 h$), unde am notat cu A_b aria bazei și cu h înălțimea cilindrului.



Exersăm împreună!

1. Calculați aria laterală și aria totală pentru un cilindru circular drept cu raza de 20 dm și generatoarea de 30 dm.

Rezolvare. $A_l = 2\pi RG \Rightarrow A_l = 1200\pi \text{ dm}^2$; $A_b = \pi R^2 \Rightarrow A_b = 400\pi \text{ dm}^2$; $A_t = A_l + 2A_b \Rightarrow A_t = 2000\pi \text{ dm}^2$.

2. Conductele din figura alăturată sunt realizate din polietilenă (material plastic) și sunt destinate transportului de apă. Fiecare dintre ele are diametrul exterior de 30 cm și cel interior de 26 cm, iar lungimea este de 4 m. Estimați masa unei țevi, știind că densitatea materialului folosit este de 0,97 g/cm³. Folosiți în calcul $\pi \approx 22/7$.



Rezolvare. Pentru a calcula volumul de material folosit, scădem din volumul cilindrului exterior volumul cilindrului interior.

$$V_{\text{ext}} = \pi R_{\text{ext}}^2 h \Leftrightarrow V_{\text{ext}} = \pi \cdot 15^2 \cdot 400 \Leftrightarrow V_{\text{ext}} = 90000\pi \text{ cm}^3.$$

$$V_{\text{int}} = \pi R_{\text{int}}^2 h \Leftrightarrow V_{\text{int}} = \pi \cdot 13^2 \cdot 400 \Leftrightarrow V_{\text{int}} = 67600\pi \text{ cm}^3.$$

$V_{\text{material}} = V_{\text{ext}} - V_{\text{int}} = 22400\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{\text{material}} \approx 70\,400 \text{ cm}^3$, deci masa aproximativă a conductei este $70\,400 \text{ cm}^3 \cdot 0,97 \text{ g/cm}^3 = 68\,288 \text{ kg}$.

Aria și volumul conului circular drept



Ne amintim!

Un con circular drept se obține prin înfășurarea unui sector de cerc. Razele care mărginesc sectorul determină, prin *lipire*, o generatoare a conului.

Măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc se determină din formula $n^\circ = 360^\circ \cdot \frac{R}{G}$, unde R este raza bazei și G este generatoarea conului.



Rețineți!

Aria laterală a unui con circular drept este egală cu aria desfășurării suprafeței laterale a acestuia. Ea se calculează cu formula $A_l = \pi RG$, unde R este raza bazei și G este generatoarea conului.

Aria totală a unui con circular drept este egală cu suma dintre aria laterală și aria bazei conului.

$$A_t = A_l + A_b \Leftrightarrow A_t = \pi R(R + G).$$



Rețineți!

Volumul unui con circular drept este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei conului și înălțimea acestuia: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Exersăm împreună!

Într-un con circular drept generatoarea este de 10 cm, iar raza bazei de 6 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.

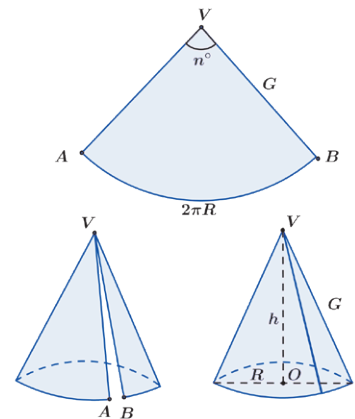
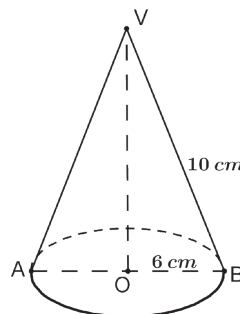
Rezolvare.

$$A_l = \pi RG \Rightarrow A_l = \pi \cdot 6 \cdot 10 \Rightarrow A_l = 60\pi \text{ cm}^2;$$

$$A_b = \pi R^2 \Rightarrow A_b = 36\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow A_t = 96\pi \text{ cm}^2.$$

În triunghiul dreptunghic VOB , $\angle O = 90^\circ$, avem:
 $VO^2 + BO^2 = VB^2 \Rightarrow VO^2 = 100 - 36 \Rightarrow VO = 8 \text{ cm}$, deci înălțimea conului este de 8 cm.

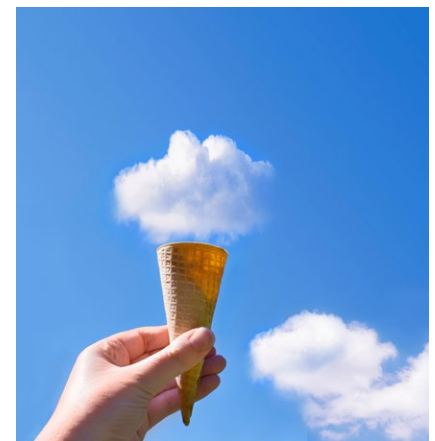
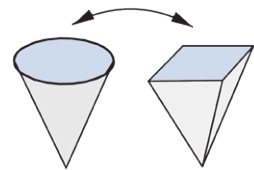
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V = 96\pi \text{ cm}^3.$$



Reflectăm!

➤ Recapitulați calculul ariei unui sector de cerc corespunzător unui unghi la centru cu măsura de n° . Justificați formula ariei laterale a unui con circular drept. Identificați un triunghi dreptunghic și stabiliți o legătură matematică, folosind *teorema lui Pitagora*, între elementele unui con, R , G și h .

➤ Imaginați-vă un experiment bazat pe figura următoare, prin care să comparați volumele celor două corpuri, știind că au aceeași înălțime și baze de suprafețe egale.



Observație

Putem construi un con drept cu raza bazei de 6 cm și generatoarea de 5 cm? Explicați, eventual folosind decupaje de sectoare de cerc cu raza de 5 cm.

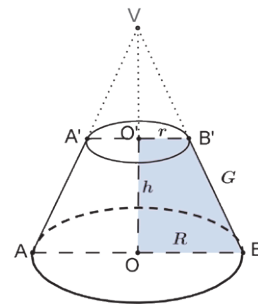
Aria și volumul trunchiului de con circular drept



Ne amintim!

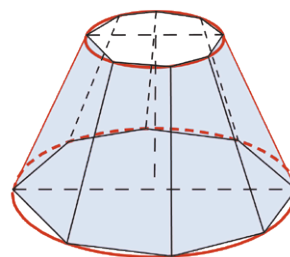
Corpul geometric obținut prin secționarea unui con cu un plan paralel cu baza și înlăturarea conului mic obținut se numește *trunchi de con*.

Observați desenul alăturat și egalitățile $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'O'}{AO} = \frac{VO'}{VO} = k$, precizând ce semnificație asociem valorii k !



Reflectăm!

Trunchiul de piramidă regulată și trunchiul de con circular drept se obțin prin același procedeu – secționarea unei piramide regulate, respectiv a unui con circular drept cu un plan paralel cu baza. În figura alăturată sunt reprezentate un trunchi de piramidă regulată și un trunchi de con circular drept, așezate astfel încât bazele trunchiului de con să fie cercuri circumscrise bazelor trunchiului de piramidă. Cu cât numărul de laturi ale bazelor trunchiului de piramidă este mai mare, cu atât valorile pentru aria și volumul trunchiului de piramidă aproximează mai bine valorile pentru aria și volumul trunchiului de con.



Rețineți!

Aria laterală a unui trunchi de con circular drept se poate calcula cu formula $A_l = \pi G(R + r)$, unde am notat cu G generatoarea trunchiului de con și cu R și r raza bazei mari, respectiv raza bazei mici.

Aria totală a unui trunchi de con circular drept este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze.

$A_t = A_l + A_B + A_b$, unde am notat cu A_B și A_b aria bazei mari, respectiv aria bazei mici, formulă echivalentă cu $A_t = \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$.

Volumul unui trunchi de con circular drept este $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$, unde h reprezintă înălțimea trunchiului de con.

Exersăm împreună!

Vaza din figura alăturată, având forma unui trunchi de con circular drept, este confecționată din ceramică și este smălțuită atât la interior, cât și la exterior. În urma măsurărilor, s-au obținut următoarele valori:

- ✓ la baza mare – diametrul exterior de 12,5 cm, cel interior 12 cm;
- ✓ la baza mică – diametrul exterior de 8,5 cm, cel interior 8 cm;
- ✓ generatoarea – la exterior 11,5 cm, la interior 11 cm.

Calculați, folosind calculatorul și aproximarea $\pi \approx 22/7$:

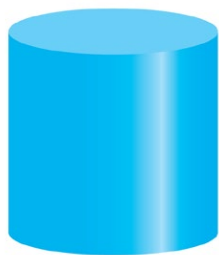
- a) suprafața smălțuită;
- b) volumul de apă conținut, știind că vaza se umple în proporție de 80%.

Rezolvare. Pentru exterior: $A_l = \pi \cdot 11,5 \cdot (6,25 + 4,25) \approx 379,5 \text{ cm}^2$ și $A_b = \pi \cdot 4,25^2 \approx 56,8 \text{ cm}^2$. Pentru interior: $A_l \approx 345,7 \text{ cm}^2$, iar aria bazei mici $A_b \approx 50,3 \text{ cm}^2$. În concluzie, suprafața smălțuită are aria aproximativ egală cu $823,3 \text{ cm}^2$.

Se calculează înălțimea interioară (adâncimea vazei): $h = 3\sqrt{13} \text{ cm}$; volumul $V \approx 861 \text{ cm}^3$, deci volumul de apă este aproximativ 689 cm^3 .



Exersați



Cilindru circular drept

1. Un cilindru circular drept are raza bazei de 6 cm și înălțimea de 8 cm. Calculați:

a) A_l ; b) A_t ; c) V ; d) lungimea diagonalei secțiunii axiale.

2. Raza unui cilindru circular drept este de 12 cm, iar aria laterală este $120\pi \text{ cm}^2$. Calculați aria secțiunii axiale, volumul și aria totală a cilindrului.

Pentru exercițiile 3-4, completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

3. Aria laterală a unui cilindru circular drept este de $96\pi \text{ cm}^2$, iar generatoarea este de 80 mm.

a) Raza cilindrului este egală cu ... cm.

b) Aria bazei cilindrului este egală cu cm^2 .

c) Aria totală a cilindrului este egală cu ... cm^2 .

d) Volumul cilindrului este egal cu ... cm^3 .

4. Dacă volumul unui cilindru circular drept este de $768\pi \text{ cm}^3$, iar aria laterală este de $192\pi \text{ cm}^2$, atunci aria totală a acestuia este egală cu cm^2 .

5. Un cilindru circular drept are desfășurarea suprafeței laterale un dreptunghi cu lungimea egală cu $10\pi \text{ cm}$ și lățimea de 4 cm.

a) Desenați cilindrul.

b) Demonstrați că raza bazei cilindrului are lungimea egală cu 5 cm.

c) Calculați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

6. Dintr-o coală de carton în formă de dreptunghi, cu dimensiunile de 33 cm și 22 cm, se înfășoară un cilindru circular drept. Calculați aria totală și volumul cilindrului, folosind în calcul $\pi = 22/7$. Țineți cont de faptul că sunt două posibilități de calcul!

7. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura de 12 cm. Calculați aria totală și volumul cilindrului.

8. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat cu latura $6\pi \text{ cm}$. Calculați volumul cilindrului.

9. Calculați volumul unei pietre știind că, dacă o scufundăm complet în apă într-un vas cilindric (circular drept) cu raza de 14 cm, nivelul apei se ridică cu 2 cm. Folosiți în calcul $\pi = 22/7$. Calculați masa pietrei știind că densitatea acesteia este de $1,6 \text{ g/cm}^3$.

10. Cu ajutorul unui metru de croitorie a fost măsurată circumferința oalei din imaginea alăturată și s-au obținut 51 cm. Înălțimea ei (măsurată în interior) este de 10 cm. Încap 2 litri de apă în oală? Folosiți în calcul aproximația $\pi \approx 3,14$. Realizați un astfel de experiment pentru una dintre oalele de acasă și verificați calculele folosind un recipient gradat pentru a măsura cantitatea de lichid care încapă în oală.



11. Cum putem face să păstrăm într-un pahar cilindric o cantitate de apă ce reprezintă jumătate din capacitatea acestuia?



Con circular drept

12. Un con circular drept are raza bazei de 3 cm, iar generatoarea de 5 cm. Calculați înălțimea, aria totală și volumul conului.

13. Generatoarea unui con circular drept este de 12 cm, iar înălțimea este de 6 cm. Calculați aria totală și volumul conului.

14. Un con circular drept are raza bazei de 4 cm și înălțimea de 4 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.

15. Într-un con circular drept, raza și înălțimea sunt direct proporționale cu 3 și 4, iar volumul conului este egal cu $96\pi \text{ cm}^3$. Calculați aria totală a conului.

16. Aria laterală a unui con circular drept cu raza de 6 cm este egală cu $72\pi \text{ cm}^2$. Calculați aria totală și volumul conului.

17. Aria secțiunii axiale a unui con circular drept este 12 cm^2 . Știind că înălțimea conului este de 4 cm , calculați generatoarea și volumul conului.
18. Într-un con circular drept, aria laterală este egală cu $96\pi \text{ cm}^2$, iar aria totală este egală cu $160\pi \text{ cm}^2$. Calculați raza, generatoarea, înălțimea și volumul conului.
19. Într-un con circular drept cu diametrul bazei de 10 cm , măsura unghiului dintre o generatoare și planul bazei este de 60° . Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.
20. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic cu cateta de 8 cm . Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.
21. Un con circular drept se obține din înfășurarea unui sector de cerc cu măsura unghiului la centru de 120° și raza de 18 cm . Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.
- a) Raza conului este egală cu ... cm . b) Generatoarea conului este egală cu ... cm .
 c) Înălțimea conului este egală cu ... cm . d) Aria laterală a conului este egală cu ... cm^2 .
 e) Aria totală a conului este egală cu ... cm^2 . f) Volumul conului este egal cu ... cm^3 .
 g) Aria secțiunii axiale a conului este egală cu ... cm^2 .
 h) Cosinusul unghiului format de o generatoare cu planul bazei este egal cu
 i) Distanța de la centrul bazei la o generatoare este egală cu ... cm .
22. O foaie de tablă are forma unui sector de cerc cu măsura unghiului la centru de 240° și cu raza de 42 cm . Din foaia de tablă se formează un recipient în formă de con circular drept, pe care îl umplem cu apă. Estimați volumul maxim de apă care încapă în recipient. Se recomandă folosirea unui calculator și a aproximației $\pi \approx 22/7$.



Trunchi de con circular drept

23. Un trunchi de con circular drept are razele de 2 cm și 6 cm , iar înălțimea de 3 cm . Calculați:
- a) volumul trunchiului de con;
 b) aria laterală a trunchiului de con;
 c) aria totală a trunchiului de con;
 d) aria secțiunii axiale a trunchiului de con;
- e) tangenta unghiului dintre o generatoare a trunchiului de con și planul bazei mari.
24. Razele unui trunchi de con circular drept sunt de 4 cm și 9 cm , iar generatoarea este de 13 cm . Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.
- a) Lungimea înălțimii este egală cu ... cm .
 b) Volumul trunchiului este egal cu ... cm^3 .
 c) Aria totală a trunchiului este egală cu ... cm^2 .
 d) Sinusul unghiului dintre o generatoare și înălțimea trunchiului este egal cu
25. Un trunchi de con circular drept are $R = 8 \text{ cm}$, $r = 5 \text{ cm}$ și aria laterală de $65\pi \text{ cm}^2$. Calculați aria totală și volumul trunchiului de con.
26. Raza bazei mari a unui trunchi de con circular drept are lungimea de 12 cm . Raza bazei mici, înălțimea și generatoarea sunt direct proporționale cu numerele 3 , 4 și 5 .
- a) Arătați că înălțimea trunchiului de con este de 8 cm .
 b) Calculați aria laterală a trunchiului de con.
 c) Calculați volumul conului din care provine trunchiul.
27. Un trunchi de con circular drept are volumul de $815\pi \text{ cm}^3$ și razele de 11 cm , respectiv 3 cm . Calculați înălțimea, generatoarea și aria laterală a trunchiului de con.
28. Un con circular drept, cu raza de 12 cm și înălțimea de 9 cm , se secționează cu un plan paralel cu baza. Știind că aria secțiunii este de $64\pi \text{ cm}^2$, calculați aria totală și volumul pentru fiecare corp obținut.
29. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Calculați aria totală și volumul trunchiului de con, știind că ariile celor două baze ale acestuia sunt egale cu $16\pi \text{ cm}^2$, respectiv $64\pi \text{ cm}^2$.

30. O găleată din tablă are forma unui trunchi de con circular drept. Pe eticheta fabricantului sunt precizate dimensiunile: diametrul bazei mari de 32 cm, diametrul bazei mici de 18 cm, iar adâncimea găleții de 24 cm.

a) Calculați suprafața de tablă necesară la realizarea găleții, ținând cont de faptul că se consumă la îmbinări 10% din suprafața tablei folosite.

b) Verificați dacă încap în găleată 12 litri de apă.

31. Un con circular drept are volumul de $432\pi \text{ cm}^3$. Un plan paralel cu baza, construit la două treimi de bază, împarte conul în două corpuri geometrice. Determinați volumul fiecăruia dintre cele două corpuri.

32. O piesă metalică are forma unui trunchi de con circular drept, în interiorul căruia este o gaură cilindrică – vedeți schema piesei prezentată alăturat. Razele trunchiului de con sunt de 21 cm, respectiv 14 cm, diametrul cilindrului este de 8 cm, iar înălțimea piesei de 25 cm.

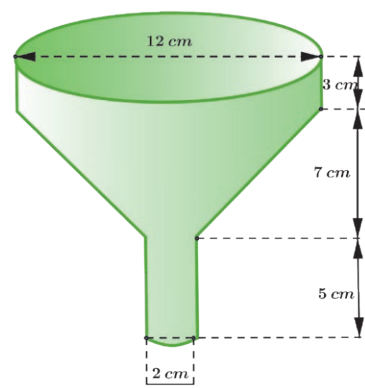
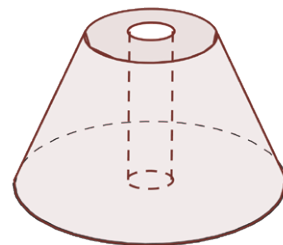
a) Calculați aria totală a piesei.

b) Calculați volumul piesei.

c) Calculați masa piesei, știind că densitatea materialului din care este confecționată este de $8,2 \text{ g/cm}^3$. Folosiți în calcul $\pi = 22/7$.

33. Un recipient în formă de con circular drept este așezat cu vârful în jos și conține 100,48 litri de apă. Nivelul la care se ridică apa în corp este de 6 dm. Știind că adâncimea totală a corpului este de 9 dm, calculați volumul recipientului.

34. Calculați aria suprafeței laterale (exterioare) a pâlniei din reprezentarea alăturată, folosind informațiile din figură.



Sculptură cu secțiuni conice, inspirată de Apollonius din Perga, geometru și astronom grec antic (262 - 200 î.H.) - Antalya, Turcia

Aria și volumul sferei



Ne amintim!

Cercul este mulțimea tuturor punctelor din plan care se află la o distanță R de un punct O , unde R este un număr real pozitiv.

Ce se întâmplă în situația în care eliminăm restricția ca punctele să fie situate într-un plan și o înlocuim cu posibilitatea ca punctele să fie din spațiu?

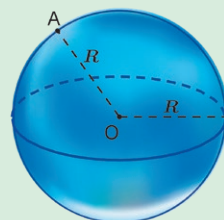
Definiție

Sfera este mulțimea tuturor punctelor din spațiu care se află la o distanță R de un punct O , unde R este un număr real pozitiv.

Punctul O se numește *centrul sferei*, iar R se numește *raza* acesteia.

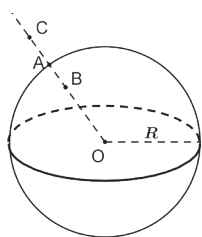
Prin *rază* a sferei vom înțelege, după caz, atât segmentul OA , unde A este un punct al sferei, cât și lungimea acestuia.

Folosim notația $S(O, R)$ pentru sfera de centru O și rază R .

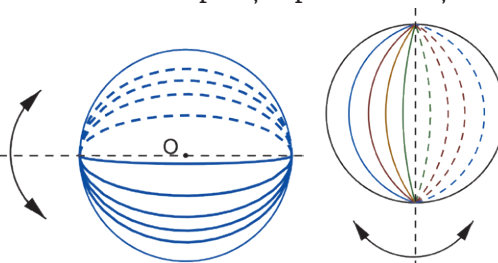


Reflectăm!

Într-un cerc, punctele din interiorul acestuia au proprietatea că sunt situate la o distanță față de centrul cercului mai mică decât raza. Observați desenul alăturat și realizați o caracterizare a poziției punctelor B și C în raport cu sfera de centru O și rază R .



Sfera este un corp de rotație. Ea se poate obține prin rotația unui cerc în jurul unui diametru. Suprafața unei sfere nu se poate desfășura în plan.



Activitate practică

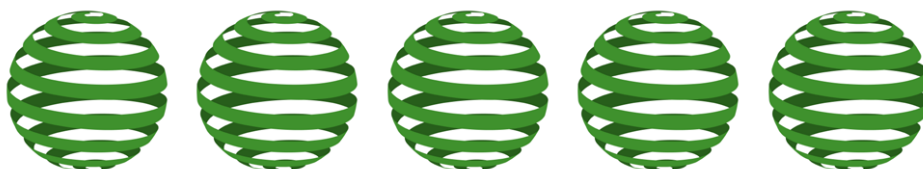
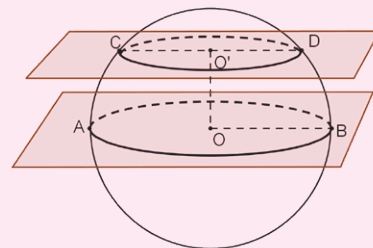
Lipiți de marginea dreaptă (partea care nu este curbă) a unui raportor un pai de băut apă. Introduceți în pai un băț subțire (un băț de frigăruie, de exemplu) și înfigeți bățul într-un polistiren în poziție verticală (bățul să fie perpendicular pe polistirenul așezat în poziție orizontală). Dați un impuls raportorului, astfel încât acesta să realizeze o mișcare de rotație. Semicercul raportorului va descrie în mișcare o suprafață sferică (rotație completă).



Rețineți!

Secțiunea obținută în urma intersecției unei sfere cu un plan este un cerc.

Dacă planul de secțiune conține centrul sferei, atunci cercul de secțiune are raza egală cu raza sferei și este *cel mai mare* dintre cercurile care se pot obține. Un astfel de cerc se numește *cercul mare*.

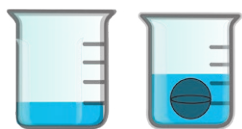


Rețineți!

Aria unei sfere de rază R se poate calcula cu formula $A = 4\pi R^2$.
Volumul unei sfere de rază R se poate calcula cu formula $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Exersăm împreună!

La ora de matematică, s-a realizat următorul experiment pentru determinarea volumului și a razei unui corp sferic (o bilă):



Într-un pahar gradat, în formă de cilindru circular drept cu diametrul bazei de 8 cm, s-a turnat o cantitate de apă. S-a introdus bila în pahar și s-a măsurat diferența de înălțime dintre nivelul apei după introducerea bilei și nivelul apei înainte de introducere: 2,25 cm.

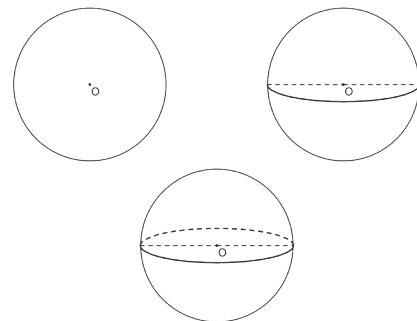
Rezolvare. Volumul sferei reprezintă volumul echivalent al unui cilindru cu raza bazei de 4 cm și înălțimea de 2,25 cm, adică $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 2,25 = 36\pi \text{ cm}^3$; $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi$, deci raza sferei este de 3 cm.



Reflectăm!

Forma planetei noastre se numește geoid. În mod ideal, corpul pe care-l reprezintă Pământul se consideră a fi sferic. Ce semnificație matematică putem da Ecuatorului?

Etape în construcția unei sfere:



Exersați

1. Calculați aria și volumul unei sfere cu raza de 5 cm.

Pentru exercițiile 2-3, completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

2. Aria unei sfere este de $196\pi \text{ cm}^2$. Lungimea razei sferei este egală cu ... cm.

3. Dacă volumul unei sfere este de $288\pi \text{ cm}^3$, atunci:

a) raza sferei are lungimea de ... cm; b) aria sferei este egală cu ... cm^2 .

4. Determinați volumul unei sfere cu aria de $25\pi \text{ cm}^2$.

5. Determinați aria unei sfere cu volumul de $288\pi \text{ cm}^3$.

6. Opt bile metalice, fiecare cu raza de 2 cm, se topesc și, din metalul obținut, se face o bilă mai mare. Calculați raza bilei obținute.

7. Încap șase mingi de tenis de câmp, cu diametrul de 6,5 cm, într-o cutie cilindrică cu raza bazei de 3,5 cm și înălțimea de 40 cm?

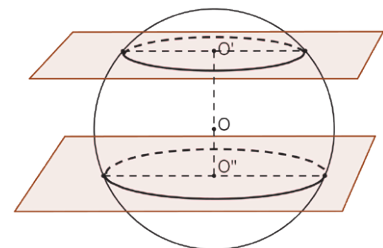
8. Dintr-un cub de lemn cu raza de 4 cm se strunjește un corp în formă sferică cu raza maxim posibilă. Demonstrați că sfera obținută conține mai mult de jumătate din materialul cubului și mai puțin decât două treimi din acesta.

9. Rezervorul unui turn de apă are formă sferică cu raza de 3 m și este plin. El se golește printr-o conductă cilindrică cu diametrul de 20 cm, prin care apa curge cu viteza de 2 m/s. În câte minute se golește rezervorul?

10. O bilă din metal, cu raza de 9 cm, se topește și din materialul obținut se face un corp în formă de con circular drept cu raza bazei de 9 cm. Care este înălțimea conului obținut?

11. Raza secțiunii obținute în urma intersecției unei sfere cu un plan α este de 5 cm. Calculați distanța de la centrul sferei la planul α , știind că raza sferei este de 10 cm.

12. Două plane paralele intersectează o sferă de rază 10 cm, determinând în aceasta două secțiuni cu razele de 8 cm, respectiv 6 cm. Determinați distanța dintre cele două plane.



Recapitulare



1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 3$ cm. Punctele M , N și P aparțin muchiilor $A'B'$, AB , respectiv CD astfel încât $A'M = BN = CP = 2$ cm. Calculați:

- lungimea diagonalei paralelipipedului;
- aria totală și volumul paralelipipedului;
- tangenta unghiului dintre planele (MNP) și (ABC) ;
- distanța de la B' la planul (MNP) .

2. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, cu $AB = 6$ cm și $AA' = \sqrt{3}$ cm, punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AC , respectiv BC . Calculați:

- aria laterală, aria totală și volumul prisme;
- tangenta unghiului dintre planele (ABB') și $(A'MN)$;
- distanța de la A la planul $(A'MN)$.

3. Prisma hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are fețele laterale pătrate, iar latura bazei de lungime egală cu 5 cm. Calculați:

- aria totală și volumul prisme;
- măsura unghiului dintre (BDD') și (CEE') ;
- tangenta unghiului dintre (ADE') și (ABC) ;
- distanța de la B la (ADC') .

4. În piramida regulată $DABC$, cu latura bazei $AB = 6\sqrt{3}$ cm, înălțimea $DO = 4$ cm, punctul M este mijlocul laturii AC . Calculați:

- aria totală și volumul piramidei;
- măsura unghiului dintre AC și planul (MBD) ;
- distanța de la M la BD ;
- distanța de la M la planul (BCD) .

5. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are aria bazei $9\sqrt{3}$ cm² și măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei de 60° . Calculați:

- aria laterală, aria totală și volumul piramidei;
- distanța de la punctul A la planul (VBC) ;
- sinusul unghiului dintre (VAB) și (VBC) .

6. În piramida patrulateră regulată $SABCD$, O este centrul bazei $ABCD$, $AB = 12\sqrt{3}$ cm și $SA = 12\sqrt{6}$ cm. Calculați:

- aria totală și volumul piramidei;

b) măsura unghiului dintre SA și (ABC) ;

c) măsura unghiului dintre SA și (SBD) ;

d) distanța de la O la (SAB) ;

e) distanța de la C la (SAB) .

7. O piramidă hexagonală regulată $VABCDEF$ are muchia laterale $VA = 8\sqrt{2}$ cm și apotema bazei de $4\sqrt{3}$ cm. Calculați:

- aria totală și volumul piramidei;
- măsura unghiului dintre VA și planul (ABC) ;
- cosinusul unghiului dintre dreptele VA și VE .

8. Piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 20$ cm, se secționează cu un plan paralel cu baza. Știind că aria secțiunii este $9\sqrt{3}$ cm², calculați înălțimea și apotema trunchiului de piramidă obținut prin secționare.

9. În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, punctele O și O' sunt centrele bazelor, $A'B' = 12$ cm, $OO' = 9$ cm, iar volumul este de 1776 cm³.

a) Determinați:

- AB ;
- A ;
- A ;
- apotema.

b) Calculați volumul piramidei din care provine trunchiul.

c) Determinați sinusul unghiului dintre planele (ADD') și (BCC') .

10. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru circular drept face cu generatoarea corespunzătoare un unghi cu măsura de 60° . Știind că raza bazei este de 9 cm, calculați:

a) lungimea generatoarei cilindrilor;

b) aria totală a cilindrilor;

c) volumul cilindrilor.

11. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel al cărui perimetru este egal cu 18 cm. Știind că diametrul bazei conului este de 6 cm, determinați:

a) aria laterală a conului;

b) volumul conului;

c) aria laterală și volumul trunchiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza, construit la distanța de $\sqrt{3}$ cm față de baza conului.

Evaluare. Remediere. Consolidare. Aprofundare

Teste de evaluare

TESTUL 1

PARTEA I – Pe foaie scrieți numai rezultatele.

1. Cubul cu diagonala de 9 cm are volumul egal cu ... cm^3 .
2. Aria laterală a unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de 5 cm este egală cu ... cm^2 .
3. Volumul unei piramide patrulatere cu latura bazei de 8 cm și muchia laterală de $4\sqrt{6}$ cm este egal cu ... cm^3 .

PARTEA a II-a – Pe foaie scrieți numai litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Aria laterală a unui con cu raza bazei de 8 cm și înălțimea de 15 cm este egală cu: a) $255\pi \text{ cm}^2$; b) $200\pi \text{ cm}^2$; c) $136\pi \text{ cm}^2$; d) $120\pi \text{ cm}^2$.
5. Aria totală a unui tetraedru regulat cu latura de 10 dm este egală cu: a) $25\sqrt{3} \text{ dm}^2$; b) $50\sqrt{3} \text{ dm}^2$; c) $75\sqrt{3} \text{ dm}^2$; d) $100\sqrt{3} \text{ dm}^2$.
6. Dacă aria laterală a unui cilindru circular drept cu raza bazei de 7 cm este egală cu $140\pi \text{ cm}^2$, atunci aria

totală a cilindrului este egală cu: a) $490\pi \text{ cm}^2$; b) $238\pi \text{ cm}^2$; c) $189\pi \text{ cm}^2$; d) $98\pi \text{ cm}^2$.

PARTEA a III-a – Pentru următoarele probleme se cer rezolvările complete

O piesă din lemn are forma unei prisme patrulatere regulate $ABCD A'B'C'D'$ cu latura bazei de 12 cm și înălțimea de 10 cm. Piesa se transformă, prin cioplire, într-o piramidă patrulateră regulată cu baza pătratul $ABCD$ și vârful centrul bazei superioare a prisme.

7. Știind că densitatea lemnului din care este confecționată piesa este de 720 kg/m^3 , demonstrați că masa piesei este de aproximativ 1 kg.

8. Arătați că aria laterală a piramidei este egală cu $48(3 + \sqrt{34}) \text{ cm}^2$.

9. Pe toate muchiile piramidei se lipește o bandă de protecție. Demonstrați că este necesar mai mult de un metru de bandă.

Punctaj: câte 1p problema și 1p din oficiu
Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 2

PARTEA I – Pe foaie scrieți numai rezultatele.

1. Lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 24 cm, 8 cm și 6 cm este egală cu ... cm.
2. Dacă aria laterală a unei prisme patrulatere regulate este de 168 cm^2 , iar latura bazei este de 6 cm, atunci volumul prisme este egal cu ... cm^3 .
3. Aria unei sfere cu raza de 6 cm este egală cu ... cm^2 .

PARTEA a II-a – Pe foaie scrieți numai litera corespunzătoare răspunsului corect.

4. Lungimea generatoarei unui con circular drept cu raza de 8 cm și înălțimea de 15 cm este egală cu: a) 8 cm; b) 10 cm; c) 15 cm; d) 17 cm.

5. Cantitatea maximă de apă care încapă într-un recipient în formă de prismă triunghiulară regulată cu latura bazei de 25 cm și înălțimea de $16\sqrt{3}$ cm este egală cu: a) 8 litri; b) 7,5 litri; c) 6,5 litri; d) 5 litri.

6. Dacă aria totală a unei piramide patrulatere regulate este de 104 cm^2 și aria laterală este de 72 cm^2 , atunci lungimea laturii bazei piramidei este egală cu: a) $2\sqrt{26}$ cm; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) $4\sqrt{2}$ cm; d) 4 cm

PARTEA a III-a – Pentru următoarele probleme se cer rezolvările complete.

În silozurile din imagine se păstrează cereale. Corpul principal este un cilindru circular drept cu diametrul

bazei de 3 m și înălțimea de 4 m, iar generatoarele celor două conuri identice din capetele cilindrului sunt de 1,7 m.

7. Calculați înălțimea silozurilor (distanța dintre vârfurile conurilor).



8. Demonstrați că în fiecare siloz încap mai mult de 32 metri cubi de cereale. Folosiți în calcul $\pi \approx 3,14$.

9. Se dorește vopsirea exteriorului unui siloz. Consumul de vopsea este de 250 g/m^2 . Calculați cantitatea de vopsea necesară, aproximând prin adaos suprafața care se vopsește la un număr natural. Folosiți în calcul $\pi \approx 3,14$.

Punctaj. Fiecare cerință 1p. Din oficiu 1 punct.

Timp de lucru: 50 de minute.

Activități de remediere/consolidare/aprofundare

1. Volumul prisme triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$ este de 450 cm^3 , iar latura bazei este de 10 cm.

a) Calculați aria laterală și aria totală a prisme.

b) Dacă punctul M este situat pe muchia CC' astfel încât $C'M = \sqrt{3} \text{ cm}$, calculați:

i. măsura unghiului dintre planele (MAB) și $(A'B'C')$;

ii. distanța de la C la planul (MAB) .

2. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, $AB = 12 \text{ cm}$, înălțimea $VO = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, M este situat pe muchia VA astfel încât $\frac{VM}{VA} = \frac{1}{4}$, iar N este mijlocul segmentului BC .

a) Demonstrați că triunghiul MAN este isoscel.

b) Calculați volumul piramidei $VABC$.

c) Determinați sinusul unghiului dintre (MBC) și (ABC) .

d) Demonstrați că distanțele de la punctele B , respectiv C la planul (MAN) sunt egale.

3. Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ are apotema egală cu $6\sqrt{2} \text{ cm}$, iar aria laterală este egală cu $72\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

a) Demonstrați că $AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

b) Calculați volumul piramidei.

c) Determinați măsura unghiului dintre (VAB) și (ABC) .

4. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, latura bazei mari este de $12\sqrt{3} \text{ cm}$, latura bazei mici este de $6\sqrt{3} \text{ cm}$, iar volumul este de $378\sqrt{6} \text{ cm}^3$. Calculați:

a) înălțimea, apotema și muchia laterală a trunchiului de piramidă;

b) aria totală a trunchiului de piramidă;

c) aria laterală și volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

5. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, în care triunghiul VAC este dreptunghic isoscel cu lungimea ipotenuzei de 20 cm. Secționăm piramida cu un plan paralel cu baza, care intersectează înălțimea la o distanță de 5 cm față de vârf. Calculați: a) aria secțiunii; b) aria laterală, aria totală și volumul piramidei $VABCD$; c) volumul trunchiului de piramidă obținut în urma secționării piramidei;

d) distanța de la centrul bazei mici a trunchiului de piramidă la o față laterală a acestuia.

6. Într-o piramidă hexagonală regulată, muchia laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45° , iar raza cercului circumscris bazei este de 4 cm. Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza, astfel încât aria laterală a trunchiului de piramidă obținut prin secționare să fie triplul ariei laterale a piramidei mici formate. Calculați:

a) aria laterală și volumul piramidei;

b) aria laterală și volumul trunchiului de piramidă;

c) distanța de la centrul bazei la o față laterală a piramidei.

7. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral de înălțimea de $4\sqrt{3} \text{ cm}$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corespunzător pentru a obține propoziții adevărate.

a) Lungimea razei conului este egală cu ... cm.

b) Lungimea generatoarei este egală cu ... cm.

c) Aria totală a conului este egală cu ... cm^2 .

d) Volumul conului este egal cu ... cm^3 .

8. Un con circular drept are volumul de $432\pi \text{ cm}^3$. Un plan paralel cu baza, care intersectează înălțimea conului într-un punct situat la două treimi față de bază, împarte conul în două corpuri. Determinați volumele acestora.

9. O sferă de rază 6 cm și un cilindru circular drept au același volum, iar înălțimea cilindrului este egală cu diametrul sferei. Determinați lungimea razei cilindrului și aria totală a acestuia.

10. Un rezervor de apă are la bază o emisferă cu raza de 3 m, corpul principal are forma unui cilindru cu raza egală cu raza semisferei și înălțimea de 5 m, iar acoperișul are forma unui con circular drept cu raza bazei de 3,4 m și generatoarea de 4 m.

a) Calculați cantitatea de tablă din care s-a construit rezervorul.

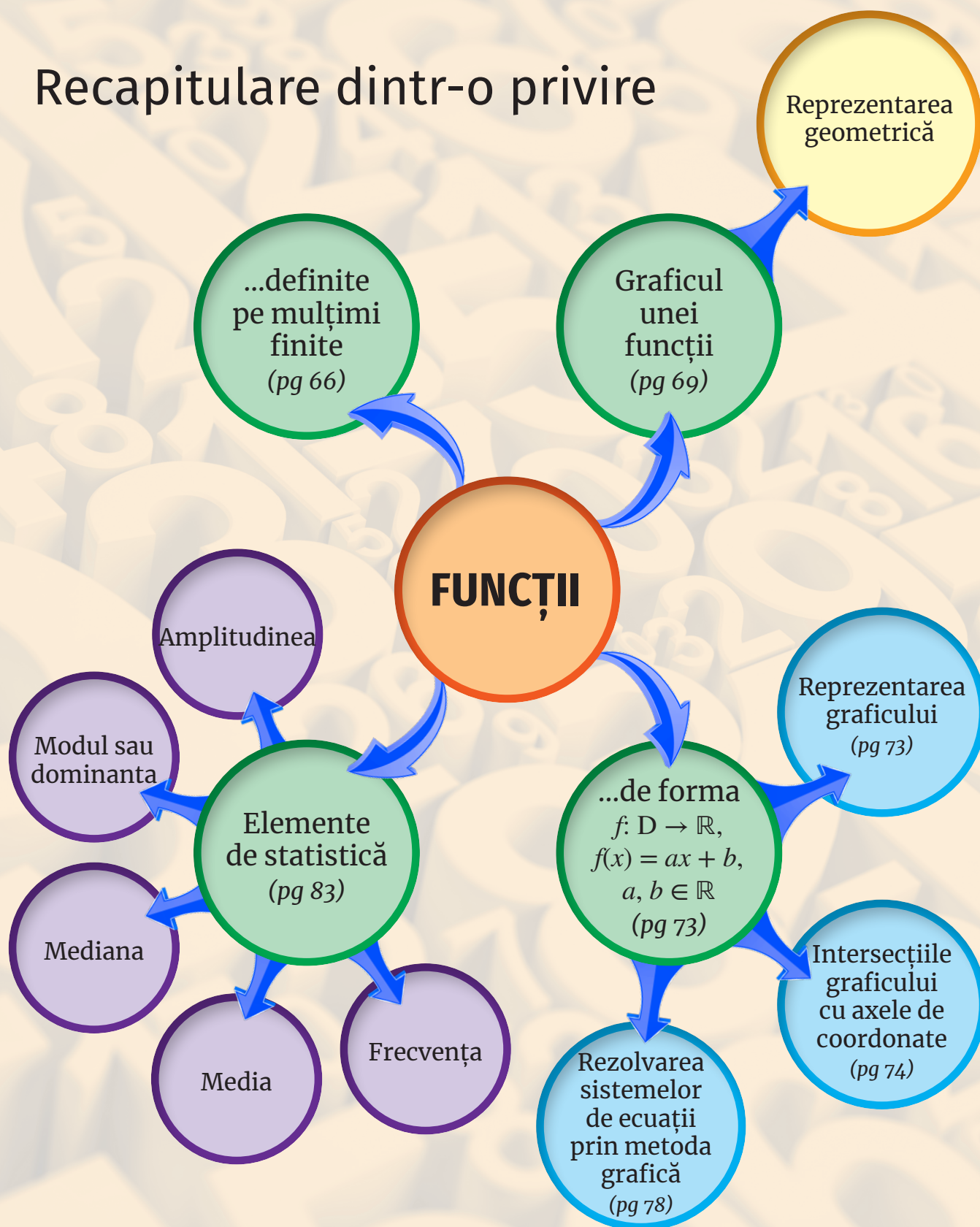
b) Rezervorul se umple cu ajutorul a trei pompe, până la marginea superioară a părții cilindrice. Știind că debitul unei pompe este de 50 l/min , în câte ore se umple bazinul? Folosiți în calcul $\pi \approx \frac{22}{7}$.



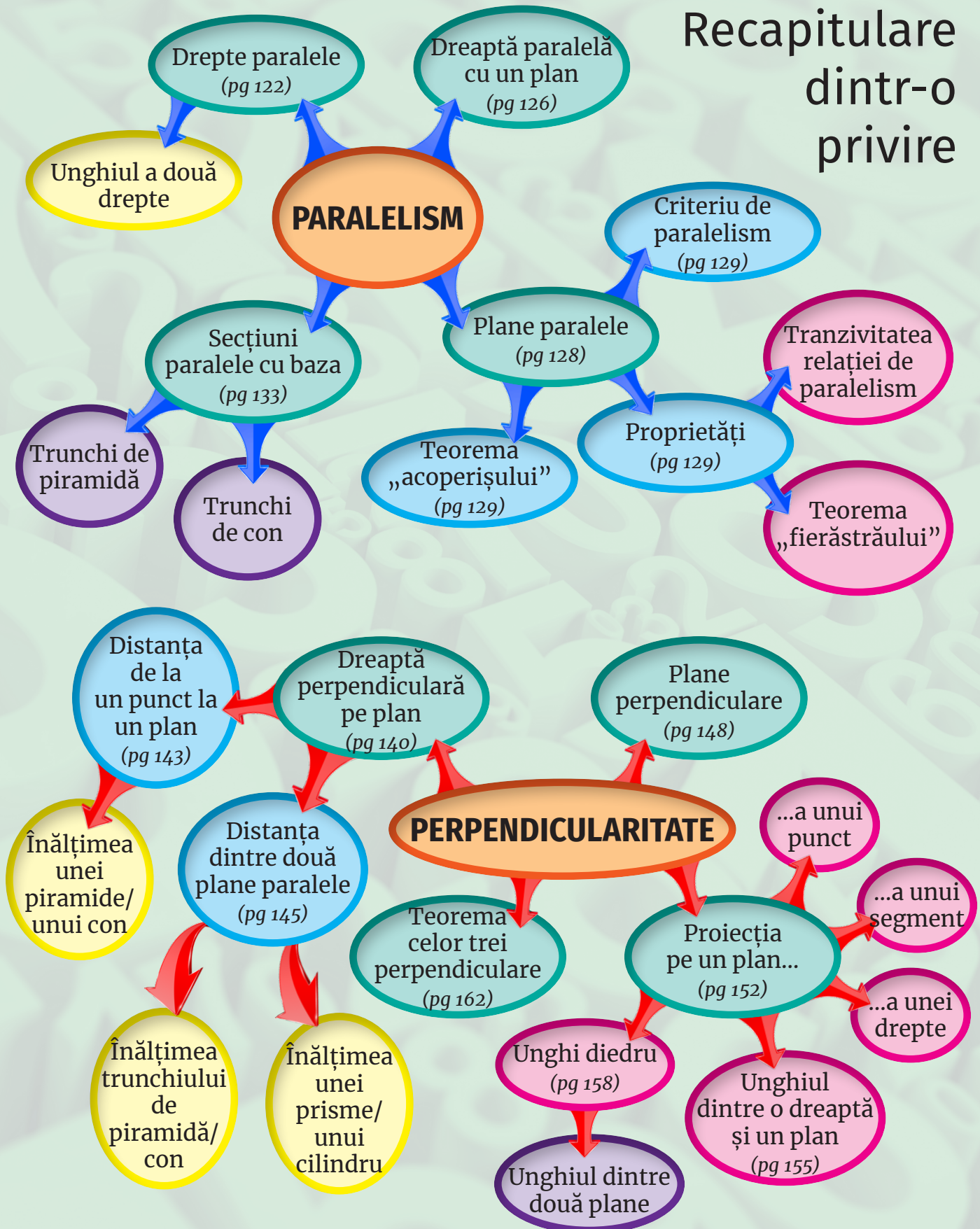
Recapitulare dintr-o privire



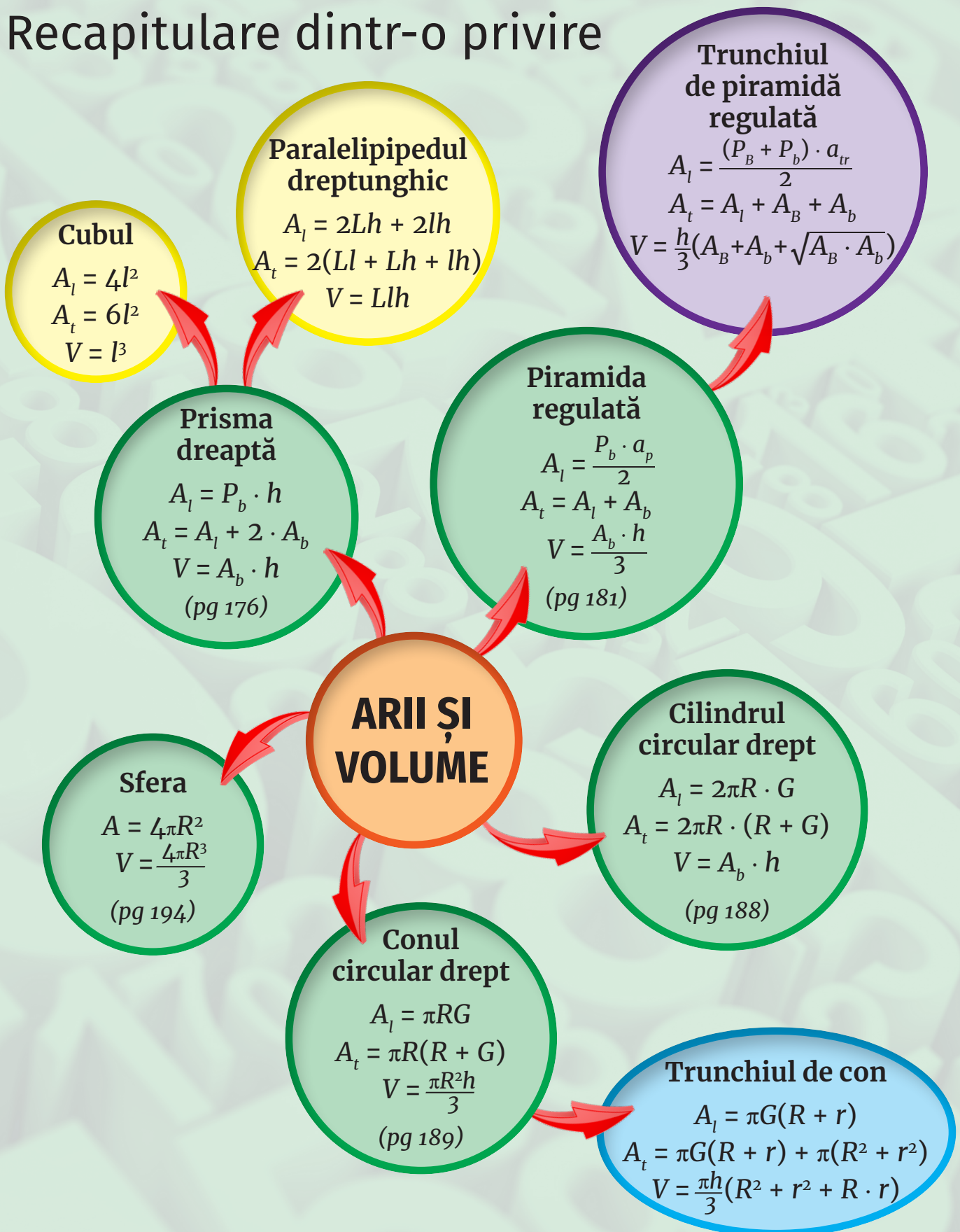
Recapitulare dintr-o privire



Recapitulare dintr-o privire



Recapitulare dintr-o privire





Recapitulare finală

1. Scrieți mulțimile sub formă de interval:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq 4x - 2 \leq 6\}$;
 b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2 \leq 7\}$;
 c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4x+2}{3} \geq 6\right\}$;
 d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{5x-3}{-2} \leq 6\right\}$;
 e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5x+10} \leq 0\right\}$;
 f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| \leq 6\}$.

2. Scrieți următoarele mulțimi sub formă de interval $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$ și apoi efectuați: $A \cup B, A \cap C, A \cap B, B \cup C, B \cup D, B \cap D, C \cap B, D \cup C$.

3. Rezolvați:

- a) $(-4; 1) \cup (-1; 6)$; b) $(-3; 2\frac{1}{2}) \cap (0; \frac{7}{3})$;
 c) $(-2, (2); 1) \cap (-\sqrt{5}; 2)$; d) $(-2; 3) \cup (-1; 4)$;
 e) $[-3; 2] \cap (-1; 1)$; f) $[-3; 2] \cup (-1; 1)$;
 g) $(-\infty; -3) \cup [-2; 2]$; h) $(-4; -1) \cap \mathbb{N}$;
 i) $(-4; 6) \cup [-4; 6]$; j) $[-1; 1] \cup (1; +\infty)$;
 k) $(-\frac{12}{5}; \frac{2}{7}) \cap \mathbb{Z}$; l) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$;
 m) $(-n; n) \cup (-n^2; n^2)$, $n \in \mathbb{N}$;
 n) $(n+1; n+3) \cup [n+2; +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $2, 3 \notin (-1; 4)$; b) $2 \in (-\infty; 3)$;
 c) $3 \in (-\infty; 3]$; d) $\frac{4}{5} \in (0, 1)$;
 e) $\sqrt{3} \in [1, 3)$; f) $1, 7 \in [1, (7); 3]$;
 g) $(-4; -2) \subset (-5; -1)$; h) $\frac{\sqrt{7}}{3} \in (-1; 1)$;
 i) $-3 \in (-2; 0)$; j) $2 + \sqrt{5} \in (0, 4)$;
 k) $(-2; 6) \subset (-1; 8)$; l) $(-1; 8] \subset (-1; 8)$.

5. Calculați suma și produsul numerelor întregi din intervalele:

- a) $[-5; 3]$; b) $[-2; 2]$; c) $(-3; 4)$.

6. Calculați:

- a) $(45x^3 - 9x^2) : (-3x)$;
 b) $(4x+3)(2x-5) - (2x-3)(3x+7)$;

- c) $11x^2 - 3x + 4 - 5x + 1 - 12x^2$;
 d) $(x+1)^2 + (1-x)(1+x)$;
 e) $(x-2)^2 - (1-2x)$;
 f) $(-5x^3y^2 - 6x^2y^2 - x^4y^4) : (-x^2y^2)$;
 g) $(4x^3 + 6x^2 - x) : (-\frac{1}{2}x)$;
 h) $[(3x^2 - 2x + 1) \cdot (2x + 3) - 3 \cdot (-3x^2 + 1)] : (2x)$;
 i) $3\sqrt{2} \cdot (5\sqrt{2} - 2\sqrt{6}x) + 4\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 2x) + \sqrt{6} \cdot (8x - 3\sqrt{6})$;
 j) $2x \cdot (5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - 3x \cdot (8\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + x \cdot (14\sqrt{2} - 15\sqrt{3})$.

7. Stabiliți domeniul de existență și simplificați fracțiile:

- a) $\frac{-3x^2}{x^3}$; b) $\frac{7x-7}{14x^2-14}$;
 c) $\frac{2x^2-3x}{x}$; d) $\frac{x^4-9x^2}{x^3-6x^2+9x}$;
 e) $\frac{x^2-2x-15}{x^2+5x+6}$; f) $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-4x^2+5x-2}$;
 g) $\frac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2-4x+12}$; h) $\frac{(x^2+x+3)(x^2+x+5)+1}{(x^2+x+3)(x^2+x+6)+2}$;
 i) $\frac{(x^{2n}+x^n+2)(x^{2n}+x^n+6)+4}{(x^{2n}+x^n+2)(x^{2n}+x^n+7)+6}$.

8. Stabiliți domeniul de existență și efectuați calculele:

- a) $\frac{2x}{2x^2+3x} + \frac{3}{2x^2+3x}$;
 b) $\frac{3}{x-7} + \frac{1}{49-x^2}$;
 c) $\frac{3}{x+2} + \frac{2x-4}{x^2-4}$;
 d) $\left(\frac{5}{3x+2} + \frac{2}{3x-2} + \frac{21x-6}{4-9x^2}\right) : \left(\frac{-3}{x+2}\right)$;
 e) $\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+1} + 1 - \frac{2x-2}{x+1}\right] : \left(\frac{-8}{x^2-1}\right)$;
 f) $\left(\frac{x^2-2x}{x^2+2} - \frac{4x^2-2x}{4-2x+2x^2-x^3}\right) : \frac{x^2}{x^2-4}$;
 g) $\frac{4x+1}{x^2+1} : \frac{16x^2-1}{x^4-1} - \frac{x^2}{4x-1}$;
 h) $\left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{4x}{1-x^2}\right) : \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{2}$.

9. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{5}{x+3} - \frac{4}{3-x} + \frac{8x+1}{9-x^2}\right) : \frac{2x-8}{6-2x}$.

- a) Stabiliți domeniul de existență al expresiei.
 b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
 c) Rezolvați inecuația $E(x) \leq 0$.
 d) Determinați numerele întregi x pentru care $(x+2)E(x) \in \mathbb{Z}$.

10. a) Dacă $a^2 - b^2 = 36$ și $a + b = 9\sqrt{2}$, atunci determinați $a - b$.

b) Dacă $a^2 - b^2 = 36$ și $a - b = \sqrt{18}$, atunci determinați $a + b$.

c) Dacă $a - b = \sqrt{12}$ și $a + b = \sqrt{18}$, atunci determinați $a^2 - b^2$.

11. Arătați că $\left(\frac{1}{2x+1} - \frac{2}{1-2x} - \frac{4}{4x^2-1}\right) : \frac{1}{16x+8} \in \mathbb{N}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

12. Fie expresia

$$E(x) = \frac{x+5}{x-3} \cdot \left[\frac{x-5}{6x} \cdot \left(\frac{x-1}{x+5} - \frac{x-5}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2-10x+25} \right) - \frac{x+1}{x+5} \right].$$

a) Stabiliți domeniul de existență al expresiei.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Rezolvați inecuația $E(x) \leq -1$.

d) Determinați numerele întregi x pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

13. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

- a) $x^2 - 16 = 0$; b) $x^2 + 81 = 0$;
 c) $4x^2 - 16x = 0$; d) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
 e) $4x^2 - x + 3 = 0$; f) $x^2 - 6 = 0$;
 g) $3x^2 + 12x = 0$; h) $9x^2 - 24x + 16 = 0$;
 i) $x^2 - 9x + 14 = 0$; j) $3x^2 - x - 4 = 0$;
 k) $x^2 - 12x + 11 = 0$; l) $(x-5)^2 = 16$;
 m) $x^2 - 5x + 12 = 0$; n) $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$.

14. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

- a) $2x + 5 = 1$;
 b) $x \cdot (3x + 2) + 1 = 3x^2 + 2x + 2$;
 c) $\sqrt{2} \cdot (2x - 1) + \sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$;
 d) $(x - 2)^2 + 3 = (x - 1)(x + 1)$;
 e) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{1-x} = \frac{2x^2+2}{x^2-1}$;
 f) $\frac{2x-3}{4x+1} = \frac{x-2}{2x+3}$;
 g) $\frac{2x+1}{x+1} - \frac{x-3}{1-x} - \frac{x^2-2}{x^2-1} = 0$;
 h) $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-1}{2-x} - \frac{2x^2-3}{x^2-4} = 0$;
 i) $\frac{2x-5}{x+3} - \frac{x-2}{3-x} - \frac{x^2+1}{x^2-9} = 0$;
 j) $\frac{2x-5}{x+4} - \frac{x-3}{4-x} - \frac{x^2-2}{x^2-16} = 0$;
 k) $\frac{3x+1}{2x+5} = \frac{5x-3}{4x+1}$.

15. Scrieți ecuația de gradul al II-lea cu rădăcinile:

- a) 4 și -2; b) $\sqrt{3}$ și $-2\sqrt{3}$; c) $\sqrt{2}$ și $-3\sqrt{2}$.

16. Descompuneți în factori expresia:

- a) $3x^2 + 2x - 1$; b) $9x^2 + 5x - 4$;
 c) $4x^2 - 8x + 3$; d) $x^2 - 2\sqrt{7}x + 7$;
 e) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6$; f) $x^2 - y^2 + 8x + 16$.

17. a) Stabiliți domeniul maxim de definiție al expresiei $E(x) = \frac{6x(x-2)-18}{3x(x-1)-6}$ și aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

18. a) Determinați valoarea numărului real a pentru care punctul $A(a; -1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 7$.

b) Determinați valoarea lui a pentru care $A(-4; -1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -6x - 10 + 3a$.

19. Determinați coordonatele punctului de intersecție al reprezentărilor grafice ale funcțiilor:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x - 7$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -10x + 5$;
 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 6x + 13$.

20. a) Un punct de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 8$ are abscisa egală cu 11. Determinați ordonata.

b) Un punct care aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 5$ are ordonata egală cu 3. Calculați abscisa.

21. a) Determinați coordonatele unui punct de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 8$, știind că abscisa și ordonata sunt direct proporționale cu numerele 10 și 14.

b) Determinați coordonatele unui punct de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$, știind că abscisa și ordonata sunt invers proporționale cu 7 și 2.

22. a) Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, știind că $M(-6; -10) \in G_f$, $N(7; 3) \in G_f$.

b) Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, știind că $M(-5; 1) \in G_f$, $N(-2; 7) \in G_f$.

23. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2, 4x + 12$.

a) Determinați coordonatele punctelor $\{A\} = G_f \cap Ox$ și $\{B\} = G_f \cap Oy$.

b) Reprezentați grafic funcția.

c) Calculați aria triunghiului OAB.

d) Calculați distanța de la originea axelor de coordonate la reprezentarea grafică a funcției.

e) Determinați tangenta unghiului ascuțit format de reprezentarea grafică a funcției și axa Ox.

24. În colțul unei grădini în formă de dreptunghi ABCD se instalează o antenă DE cu înălțimea de 5 m, care este ancorată cu un cablu de oțel instalat între

punctele E și C . Considerând că antena este așezată perpendicular pe planul grădinii, demonstrați că ancora EC este așezată în unghi drept față de latura BC a grădinii. Dacă $AB = 12$ m și $AD = 4$ m, calculați lungimea minimă a unui cablu care să facă legătura între vârful antenei și colțul B al grădinii.

25. Maria a decupat din carton un pătrat $ABCD$ cu diagonala de 8 cm, iar la intersecția diagonalelor a așezat, perpendicular pe planul pătratului, o tijă de 1 cm.

a) Unde va trebui Maria să fixeze o pioneză pe latura AD , astfel încât dacă așează o riglă între pioneză și vârful tijei, rigla să fie perpendiculară pe latura pătratului?

b) Dacă Maria vrea să taie un băț care să înlocuiască rigla, ce lungime va trebui să aibă acesta?

26. Un cub are latura de 6 cm. Determinați lungimea diagonalei, aria laterală, aria totală și volumul cubului.

27. O prismă hexagonală regulată $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ are muchia laterală și muchia bazei de lungime 5 cm și O centrul bazei $ABCDEF$. Calculați măsurile unghiurilor dintre:

- a) $B'C'$ și CE ; b) $B'E'$ și AD ; c) $F'E'$ și $A'O$;
d) $B'B$ și $D'E'$; e) $A'O$ și $D'D$; f) BO și $F'E'$.

28. Sorin are curtea de forma dreptunghiulară $ABCD$, cu $AB = 12$ m, $BC = 5$ m. De sărbători, el înalță în colțul D al curții un stâlp DE cu înălțimea de 4 m, din vârful căruia vrea să ducă 2 cabluri luminoase spre colțurile B și A ale curții.

a) Demonstrați că firul AE este așezat perpendicular pe marginea AB a curții.

b) Calculați cantitatea minimă de cablu luminos necesar împodobirii curții de sărbători.

29. Mihai a instalat în colțul A al grădinii sale un paratrăsnet de 12 m.

a) Dacă grădina lui Mihai are forma unui romb $ABCD$, demonstrați că triunghiul MOD este dreptunghic, unde O este punctul de intersecție al diagonalelor, iar M este vârful paratrăsnetului.

b) Calculați distanța de la vârful paratrăsnetului la colțul D al grădinii, dacă $AC = 24$ m și $BD = 2$ m.

30. Considerăm prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, $AB = 6$ cm, $AA' = 9$ cm și punctul M , mijlocul segmentului BC . Demonstrați că:

- a) triunghiul $A'BC$ este isoscel;
b) $AM \perp (BCC')$;
c) $BC \perp (AMA')$.

31. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCA'B'C'D'$, $AB = 6$ cm și $AA' = 8$ cm.

a) Calculați $A'B$ și $A'C$.

b) Demonstrați că $A'B \perp BC$ prin două metode, una care implică raționament și una care implică calcul.

c) Demonstrați că $AC \perp (BDD')$.

32. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$, punctul O centrul bazei $ABCD$ și mijlocul M al segmentului BC . Demonstrați că:

- a) $SO \perp AC$; b) $SO \perp (ABC)$;
c) $AC \perp (SBD)$; d) $BC \perp (SOM)$.

33. Cubul $ABCA'B'C'D'$ are latura egală cu 8 cm. Calculați sinusul unghiului dintre diagonala cubului și planul bazei și valoarea raportului $\frac{d(A, (A'BD))}{d(C', (A'BD))}$.

34. Un paralelipiped dreptunghic are lungimea de 4 cm, lățimea de 3 cm și înălțimea de 12 cm. Determinați lungimea diagonalei, aria laterală, aria totală și volumul paralelipipedului.

35. Un tetraedru regulat are latura de 6 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul tetraedrului.

36. Un cilindru circular drept are raza de 4 cm și generatoarea de 5 cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

37. Un con circular drept are raza de 6 cm și înălțimea de 8 cm. Calculați lungimea generatoarei, aria laterală, aria totală și volumul conului.

38. O bucată de lemn are forma unui paralelipiped dreptunghic, $ABCA'B'C'D'$, cu ariile fețelor ce conțin punctul A egale cu 30 cm², 24 cm², respectiv 20 cm².

a) Calculați lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic.

b) Determinați aria totală și volumul unui cub construit din paralelipiped, știind că una dintre fețele acestuia este față cu aria de 20 cm².

c) Determinați raportul procentual dintre cantitatea de material a cubului obținut anterior și cantitatea de material rămasă din paralelipipedul dreptunghic după construcția cubului.

39. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de $6\sqrt{3}$ cm și înălțimea de 4 cm. Determinați:

- a) lungimea apotemei și a muchiei laterale;
b) aria laterală, aria totală și volumul piramidei;
c) sinusul unghiului dintre o față laterală și planul bazei;
d) distanța de la centrul bazei la o față laterală;
e) distanța de la punctul A la planul (VBC) .

40. O piramidă patrulateră regulată are latura de 8 cm și înălțimea de 3 cm. Calculați:

- lungimea apotemei și a muchiei laterale;
- aria laterală, aria totală și volumul piramidei;
- sinusul unghiului dintre o față laterală și planul bazei;
- distanța de la centrul bazei la o față laterală;
- distanța de la punctul A la planul (VBC) .

41. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ are muchia laterală egală cu $6\sqrt{2}$ cm, muchia bazei mici de lungime egală cu $3\sqrt{2}$ cm și măsura unghiului dintre muchia AA' și planul bazei mari de 45° .

- Demonstrați că înălțimea trunchiului de piramidă este de 6 cm.
- Calculați volumul trunchiului de piramidă.
- Calculați tangenta unghiului dintre o față laterală și planul bazei mari.

42. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ are laturile bazelor de lungimi 8 cm, respectiv 6 cm și înălțimea de 4 cm. Calculați:

- aria totală a trunchiului de piramidă;
- volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă;
- distanțele de la O și O' la planul (BCC') .

43. Piramida patrulateră regulată $CADOU$ are toate muchiile egale cu 12 cm. Calculați:

- apotema și înălțimea piramidei;
- aria laterală, aria totală și volumul piramidei;
- unghiul dintre o muchie laterală și planul bazei;
- sinusul unghiului dintre o față laterală și planul bazei;
- distanța de la centrul bazei la o față laterală.

44. Un brad artificial este împachetat într-o cutie de carton care are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea bazei de 15 dm, lățimea de 7 dm și înălțimea de 5 dm.

a) Determinați câți metri pătrați de carton s-au folosit pentru confecționarea cutiei, ținând cont că se pierde pentru îmbinări 5%.

b) Care este distanța dintre cele mai îndepărtate două puncte ale cutiei?

45. O piramidă triunghiulară regulată $STE A$ reprezintă ornamentul din vârful unui brad de Crăciun. Dacă muchia bazei piramidei are lungimea de $6\sqrt{3}$ cm și muchia laterală are lungimea de 14 cm, calculați:

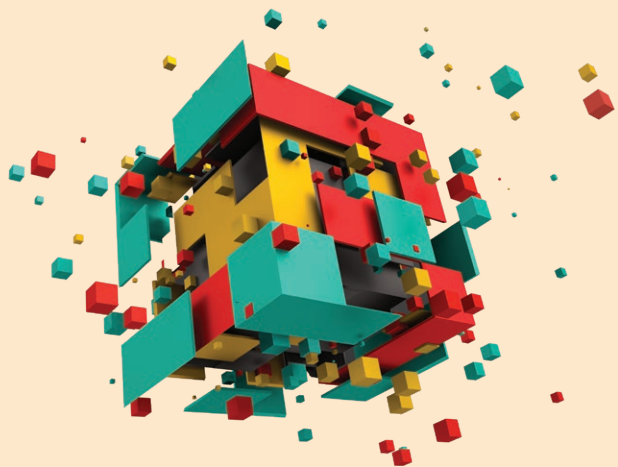
- suma lungimilor muchiilor ornamentului;
- aria totală și volumul piramidei;
- sinusul unghiului dintre o față laterală și planul bazei;
- distanța de la un vârf al bazei la fața laterală.

46. O piesă de bijuterie din diamant este formată din două piramide patrulaterate regulate, $VABCD$ și $QABCD$, cu baza comună și vârfurile de o parte și de alta a planului bazei. Dacă latura bazei celor două piramide este $AB = 12$ mm, iar muchiile laterale ale piramelor sunt $AQ = 12$ mm, respectiv $VA = 6\sqrt{10}$ mm, atunci:

- demonstrați că $VQ = 18\sqrt{2}$ mm;
- determinați distanța dintre centrele de greutate ale triunghiurilor VBC și QBC ;
- demonstrați că sinusul unghiului dintre planele (VBC) și (QBC) este egal cu $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



47. Determinați suprafața totală a unui bazin, știind că are formă de paralelipiped dreptunghic, volumul egal cu 1 000 000 cm³, iar lungimile muchiilor sale verifică relația $\frac{1}{L} + \frac{1}{l} + \frac{1}{h} = 0,625$. Poate fi acoperită întreaga suprafață a bazinului cu o vopsea specială din trei cutii de 2,5 l, dacă 1 dm² de suprafață poate fi vopsită cu 0,5 ml de vopsea?



Indicații și răspunsuri

pg. 7-10. 1) $8 = 5 + 3 = 10 - 2 = -(-8) = 8, 0 = 2 \cdot 4 = 16 : 2 = \frac{8}{1} = (\frac{1}{8})^{-1} = \sqrt{64}$. 2) a) $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$; b) $\text{card} A = 5$; c) 1; d) 9. 3) a, f, f, a, a, a, a, a, a, f, f, f, f, a, f, a. 4) a) $5 + 10 = 15$; b) $(-7) + (-10) = -17$; c) $5, 2 + 1, 8 = 7$; d) $-4, 1 + 2, 1 = -2$; e) $-7, 2 + 2, 2 = -5$; f) $(8 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 8$. 5) a) $5 \cdot 3 = 15$; b) $(+17) \cdot (-1) = -17$; c) $2, 5 \cdot 2, 4 = 6$; d) $(-\frac{14}{3}) \cdot \frac{3}{7} = -2$; e) $\frac{40}{7} \cdot (-\frac{7}{8}) = -5$; f) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = 8$. 6) a) 7, 21; 7, 25; $\sqrt{51, 9842}$; $\sqrt{52, 5626}$; b) -11, 47; -11, 45; $-\sqrt{131, 561}$; $-\sqrt{131, 2}$; c) 4, 1; 4, 5; $\sqrt{18}$; $\sqrt{21}$; d) -2, 7; -2, 65; $-\sqrt{7, 3}$; $-\sqrt{7, 1}$. 7) a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; b) $-\frac{2}{5} < -\frac{2}{6}$; c) $2, (15) < 2, 1(5)$; d) $-7, 4 > -7, (4)$; e) $11, 2 > -11, 3$; f) $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$; g) $2\sqrt{3} - 3 < \sqrt{3} - 1$. 8) 2, 7; -4, 2; 0, 3; -5, 9. 9) 0, 28; -4, 11; 10, 36; -5, 19. 10) 12. 11) a) 0; b) 3 sau 7. 12) a) $A = \{-5, 125; -4, 123; -2; -\sqrt{3}; -1, (5); 0; 1; \sqrt{7}; \frac{9}{3}; \frac{41}{8}; 8\}$; b) -5, 2; c) 8; d) $-\frac{336}{41}$; e) $A \cap \mathbb{N} = \{0; 1; \frac{9}{3}; 8\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-2; 0; 1; \frac{9}{3}; 8\}$, $A \cap \mathbb{Q} = \{-5, 125; -4, 123; -2; -1, (5); 0; 1; \frac{9}{3}; \frac{41}{8}; 8\}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{-\sqrt{3}; \sqrt{7}\}$. 13) $A \cap \mathbb{N} = \{0; 2^3; \sqrt{(\frac{1}{4})^{-4}}\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-3^2; 0; 2^3; \sqrt{(\frac{1}{4})^{-4}}\}$, $A \cap \mathbb{Q} = \{-3^2; -3, 1(6); -2, 5; 0; 1, 5(3); (-\frac{2}{3})^{-2}; \sqrt{6\frac{1}{4}}; 2^3; \sqrt{(\frac{1}{4})^{-4}}\}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{-3\sqrt{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; \pi\}$. 14) a) $\{0; (-1)^4; \sqrt{4}; 5; (-3)^2\}$; b) $\{0; (-1)^4; \sqrt{4}; 5; (-3)^2\}$; c) $\{-3^2; (-1)^3; 0; (-1)^4; \sqrt{4}; 5; (-3)^2\}$; d) $\{-3^2; (-1)^3; -\frac{4}{9}; 0; (\frac{2}{5})^2; (-2)^{-2}; \frac{1}{3}; 0, 5; (-1)^4; \sqrt{4}; 2, 3; 5; (-3)^2; 5\}$; e) $\{-\sqrt{6}; \sqrt{27}\}$. 15) 3, 25; 3, (25); 3, 2(5); $\frac{13}{4}, \frac{323}{99}, \frac{293}{90}$. 16) 5 și 0, 08; -7 și 0, 28; 5, 9. 17) 9; 10; 22; 24; 120; $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{11}{17}, 0, 08; 0, 9; 3^7; 7^5 \cdot 13^6; 4 \cdot 7^2 \cdot 11^3; 15; 5$. 18) 4; 10; $2\sqrt{15}$; -6; 0; 2; 5; 1; 0; 5; 120; 0, 1; 1; 4; 35; 1; 144; 23; 1. 19) -2; -2; $\frac{9}{4}; 5; \frac{3}{2}; \emptyset; \mathbb{Q}; \emptyset$. 20) -1; $\emptyset$; 1; 1; 3; 2; $-3\sqrt{2}; \sqrt{3}; 1; 1; 4; 2$. 22) 48. 23) 30 elevi. 24) 6. 25) -4 sau 8; -2 sau $\frac{8}{3}$; 5; $\emptyset$; -7 sau 5. 26) a) Dacă x și y sunt numere întregi, atunci $|x|$ și $|y|$ sunt numere naturale. $|x| + |y| = 1$ în mulțimea numerelor naturale are ca soluții $|x| = 1$ și $|y| = 0$ sau $|x| = 0$ și $|y| = 1$. Perechile cerute sunt: $(-1; 0), (1; 0), (0; -1), (0; 1)$; b) $(-1; 2), (-1; -2), (-3; 0), (1; 0), (-2; -1), (-2; 1), (2; -1), (2; 1)$; c) $(3; -2)$; nu există. 27) $(2; 1)$. 28) 0. 29) $(1; 2)$. 30) a) $(1; 1)$; b) $(2; -2)$; c) $(1; 0)$; d) $(-1; -1)$; e) $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$; f) $(2; 4)$; g) $(\sqrt{3}; \sqrt{2})$; h) $(12; 5)$; i) $(2; 4)$; j) $(2; 1), (-2; 1), (2; -1), (-2; -1)$. 32) 49, 90 lei și 329, 90 lei. 33) 25 răspunsuri corecte, 5 răspunsuri greșite. 34) 70 cm, 50 cm. 35) 30 rațe și 15 porci. **Test inițial.** I. 3, 1; 4; 2; $4\pi\sqrt{3}$ cm; 2; 10 cm. II. 3; 320 lei. III. $4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$; 96 cm²; 0, 96; 4 cm.

pg. 14. 1) a) a, f, a, f, a, f; b) $B = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$, $A \cap B = \{-2; -1; 1; 2\}$; c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 6 : x\}$. 2) a) f, f, a, f; b) $A = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$, $B = \{-4; -2; 2; 4\}$, $A \cup B = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$, $A \cap B = \{-4; -2; 2; 4\}$, $A - B = \{0\}$, $B - A = \emptyset$; c) $A = C \cap D$. 3) $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$, $B = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$; $C = \{0; 8; 16; 24; 32; 40\}$; $D = \{2; 4; 8; 16\}$; $E = \{0; 1; 5\}$; $F = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. 4) $A = \{1; 3; 5; 7\}$, $B = \{2; 6; 10; 14\}$; $C = \{3; 11; 19; 27\}$. 5) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k, 0 \leq k \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 12\}$. 6) a, a, f. 7) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$; $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; $\{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$. 8) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y = \{0, 4, 5, 7, 8\}$. 9) 4 elevi. 10) $A \cap \mathbb{N} = \{0; 5\}$; $A \cap \mathbb{Z} = \{-3; 0; 5\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \{-3; -2, 14; -1, (32); 0; 2, (3); 5; 6, 15\}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{-\sqrt{2}; \sqrt{6}; \pi\}$.

pg. 20. 1) a) adevărat; b) corect este $(0; 3)$; c) adevărat; d) corect este $(-4; -3)$; e) adevărat. 2) a, a, a, f, a, a, f, f, a. 3) D. 4) a) $[-8; 0]$; b) $[2; 4]$; c) $(0; 5)$; d) $(-1; 2]$. 5) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x < 7\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq \sqrt{8}\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2, 1(8) < x < 0, 12(7)\}$. 6) -5, 3, 9, -9, 8. 8) a) $[-2; 4]$; b) $(-1; 3)$; c) $[-2; 5]$; d) $(-4; -1, 5]$; e) $[0; 3]$ sau $[-3; 0]$; f) $[-4; 4]$. 9) a) corect este $(-2; +\infty)$; b) adevărat; c) corect este $[3; +\infty)$; d) adevărat; e) adevărat. 10) f, a, a, a, a, a. 11) a) $[-5; +\infty)$; b) $(-\infty; -1]$; c) $(8; +\infty)$; d) $(-\infty; 10)$. 12) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12\}$; d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 16\}$; e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5, 5 < x\}$. 15) a) $[-3; +\infty)$; b) $(-\infty; 4)$; c) $(-1; +\infty)$; d) $(-\infty; -5)$. 16) a, f, a, a, f. 17) a, f, f, a.

pg. 23. 2) a) $(-\infty; 0) \cup (-1; 1) = (-\infty; 1)$, $(-\infty; 0) \cap (-1; 1) = (-1; 0)$; b) $(-\infty; 2) \cup [1; +\infty) = \mathbb{R}$, $(-\infty; 2) \cap [1; +\infty) = [1; 2)$; c) $(1; 4] \cup [1; +\infty) = [1; +\infty)$, $(1; 4] \cap [1; +\infty) = (1; 4]$; d) $[-8; 6] \cup [-2; 2] = [-8; 6]$, $[-8; 6] \cap [-2; 2] = [-2; 2]$; e) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $(-\infty; 0) \cap (0; +\infty) = \emptyset$; f) $(-\infty; 1] \cup [1; +\infty) = \mathbb{R}$, $(-\infty; 1] \cap [1; +\infty) = \{1\}$. 3) a) $[-3; 6]$; b) $[-4; 5] \cup \{-5\}$; c) $\{-2; 0; 5\}$; d) $[-3; 2] \cup \{-5; 5\}$; e) $\{0\}$; f) $[-3; 5]$; g) $(-3; 2)$; h) $(-8; -2) \cup [-1; 5]$; i) $\{-4; -3; -2; -1; 1\}$; j) $[2; 18]$; k) $(3; 12]$; l) $(-6; 6)$. 4) $A = (-\infty; 6]$, $B = [-2; 9)$, $C = [-1; +\infty)$, $D = (-5; 5]$, $A \cup B = (-\infty; 9)$; $C \cup D = (-5; +\infty)$; $A \cap B = [-2; 6]$; $B \cap C = [-1; 9]$; $(A \cup B) \cap D = (-5; 5]$; $A \cup C = \mathbb{R}$; $A \cap C = [-1; 6]$; $A \cap D = (-5; 5]$; $B \cup C = [-2; +\infty)$; $B \cap D = [-2; 5]$; $A \cap B \cap C \cap D = [-1; 5]$; $A \cup B \cup C \cup D = \mathbb{R}$. 5) a) $[-1; 4]$; b) $\{0, 1, 2, 3\}$; c) $[-2; 3]$; d) $[-1; 6]$; e) $[-8; -4] \cup [-2; 6]$; f) $\emptyset$; g) $(-5; 7) \cup (7; 9)$; h) $[-2; 8]$; i) $(-\infty; n + 2)$; j) $[n - 3; n + 2]$; k) $\{n\}$; l) $(n; n + 1)$. 6) $[4; 10]$ și $(7; 20]$. 7) a) $I = (-1; 6)$; b) $I = [0; 4]$; c) $I = [-4; 6]$. 8) a) $a \leq -3, b = 2$; b) $a \in (3; 4), b \in (4; 5)$; c) $a \in (-3; -2), b \in [-1; 0]$; d) $a = -1, b = 3$.

pg. 30. 1) a, f, a, f. 2) a) $\mathbb{R} - (-\infty; \frac{2}{3}) = [\frac{2}{3}, +\infty)$; b) $(-\infty; \frac{5}{2}]$; c) $(-\infty; 2)$; d) $(1; +\infty)$. 3) a) $[\frac{1}{2}; +\infty)$; b) $(-\infty; \frac{9}{2}]$; c) $(3; +\infty)$; d) $(-\infty; \sqrt{8})$; e) $[-6; +\infty)$; f) $(-\infty; -\frac{1}{25})$; g) $(0; +\infty)$; h) $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}]$. 4) b) $[-2; 8)$; c) $\{-1; 0\}$. 5) a) $(-\infty; -3)$; b) $(-\frac{8}{3}; +\infty)$; c) $(-\infty; \frac{3}{2})$; d) $(10; +\infty)$. 6) a) $(-\infty; \frac{1}{2})$; b) $[-1; +\infty)$; c) $(-\infty; 7)$; d) $(-\infty, 0]$; e) $(1; +\infty)$; f) $\mathbb{R}$; g) $\emptyset$; h) $\mathbb{R}$; i) $\mathbb{R}$; j) $\emptyset$.

7) a) $(-\infty; \frac{11}{10})$; b) $[-\frac{1}{3}; +\infty)$; c) $(-\infty; -\frac{1}{4})$; d) $[\frac{2\sqrt{3}-2}{3}; +\infty)$. 9) a) $(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4})$; b) $[-3; -2]$; c) $(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$; d) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$; e) $\mathbb{R}$ (modulul oricărui număr real este pozitiv sau 0); f) $\{\frac{3}{5}\}$; g) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$; h) $\emptyset$.

pg. 31–32. RECAPITULARE. 1) (3; 8]. 2) -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. 3) 2. 4) $[1; +\infty)$. 5) a, a, f, a, a, a, a, a, f, a, a. 7) a, f, f, f. 9) $(-\infty; 4]$, $[-1; 3]$; $[-4; 4]$; $[4; +\infty)$, $[-2 + \sqrt{2}; -\sqrt{2}]$; $(-\infty; -2\sqrt{3} + 3] \cup [2\sqrt{3} - 7; +\infty)$. 11) $A = [-3; 3]$, $B = [-1; 4]$. a) 0; b) $\sqrt{8}$; c) $A \cup B = [-3; 4]$, $A \cap B = [-1; 3]$. 12) a) $(-\infty; 5)$; b) $[0; 2]$; c) (3; 8); d) $\{5\}$; e) $\{0\}$; f) $\emptyset$; g) $(-\frac{8}{13}; \frac{6}{13})$; h) $(-\frac{18}{25}; \frac{47}{13})$. 13) $A \cup B = (-5; 5)$, $A \cap B = [-2; 2]$, $\{0; 1; 2; 4\}$, $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. 14) $A = [-1; 6]$ și $B = (-3; 5)$, $A \cup B = (-3; 6]$, $A \cap B = [-1; 5]$, $A \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. 15) a) 1, b) 7. 16) a) $A = (3; +\infty)$, $B = [-0; 5; 0; 5]$, $C = (-1; 4)$; b) 1; c) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = (3; 4)$, $A \cup C = (-1; +\infty)$, $B \cup C = (-1, 4)$. 17) $A = [-4; 12]$, $B = [-9; 16]$; $[-4; 12]$; 17. 18) $[4; 96]$, $(-1; 4)$, $(-1; 96)$, $\{4; 5; 6; \dots; 96\}$, $\{0; 1; 2; 3\}$, $[4; 7]$. 19) $A = [-4; 3]$, $B = (3; 5)$, $C = (3; +\infty)$, $D = (-\infty; 5]$; $A \cup B = [-4; 5)$, $B \cap C = (3; 5)$, $C \cup D = \mathbb{R}$, $A \cap D = [-4; 3]$, $(B \cup C) \cap D = (3; 5]$, $(A \cap C) \cup (B \cap D) = (3; 5)$, $(A \cup D) \cap \mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. 20) a) $A = [-4; 5]$, $B = [-\frac{3}{2}; 3]$, $A \cup B = [-4; 5]$, $A \cap B = [-\frac{3}{2}; 3]$; b) $A = (1; 5)$, $B = (-\infty; \frac{5}{4})$, $A \cup B = (-\infty; 5)$, $A \cap B = (1; \frac{5}{4})$. 21) a, a, a. 22) $A = (5; +\infty)$, $B = [-2; 6]$. 23) a) $\mathbb{R}$; b) $\emptyset$; c) $[n+1; +\infty)$; d) $(-n; n)$; e) $(n; n+1)$. 24) a) $a < 4$; b) $a \leq -5$; b) $a \geq -5$; c) $a < 1$; b) $a > 2$; d) $a \leq -2$; b) $a \geq -1$. 25) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Atunci $(x-2)^2 \leq 25$ și $(y+1)^2 \leq 25 \Leftrightarrow |x-2| \leq 5$ și $|y+1| \leq 5$. Test de autoevaluare: b, d, a, c, b, a, c, b, b.

pg. 33. Teste de evaluare. Test 1. 2) a) $[-1; 8]$; b) $[-5; +\infty)$; c) $[-8; 8]$. 3) a) $(-2; 4]$; b) $\emptyset$; c) $(-2; 5]$; d) $[5; 7]$; e) $\{-13\}$; f) $\mathbb{R}$. 4) a) $[-2; +\infty)$; b) $[1; +\infty)$; c) $[-10; 4]$; d) $(-\infty; -\frac{9}{4}]$. 5) a) $a = -6$, $b = 5$; b) $a = 2$, $b = -3$. Test 2. 2) a) $[-2; 4]$; b) $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$; c) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. 3) a) $\{0; 1; 2; 3\}$; b) $(-7; -2)$; c) $(-5; 5]$; d) $[6; 7]$; e) $\emptyset$; f) $\mathbb{R}$. 4) a) $(-\infty; 3]$; b) $(-\infty; -\frac{1}{2})$; c) $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}]$; d) $(-\infty; 2]$. 5) a) $a = -6$; b) $a \in [2; 3]$; b) $a \in (3, 4]$.

pg. 39. 2) a) 0, 12; b) 0. 3) a) -6; b) 0; c) $4x - 12$; d) $y + 2$. 4) a) $3x$; b) $-12a + 10$; c) $-0,4x$; d) $y + 2$; e) $2a + 3$; f) $2b$; g) $8y$; h) -2; i) 2. 5) a) $7x$; b) $11x + 9y$; c) $11x - 13y$; d) -12; e) $-2x - 9$; f) $7x^2 - 11x$; g) $-10x + 13y$; h) $x + 10y$; i) $3x$. 6) a) $6x$; b) $3x - 4y - 1$; c) $7x + 9y + 3$; d) $8y + 2$; e) $-x + 16y + 1$; f) $-12y - 12$. 7) a) a^5 ; b) $6x^3$; c) $15x^2$; d) $2x^3y^3$; e) $25a^2$; f) $-5x^2$; g) $4x^2$; h) $4x$; i) $14c^2$; j) $a + 2$; k) $2x^{-4}$; l) $-2bc$. 8) a) $-3x^2 - 5x$; b) $-x^2 - 2x$; c) -6; d) $-2x^3 + 2x^2 - 21x$; e) $-x^3 - 3x^2 - 14x$; f) $21x^2$; g) $5x - 3y$; h) $-21x$. 9) a) $x^2 - x - 6$; b) $-2x^2 + 11x - 5$; c) 2; d) $4x - 9$; e) $x^2 + 14x - 20$; f) $9x^2 - 35x + 34$; g) 1; h) $-8x$. 10) a) 0; b) $E(n) = -7n - 21 = 7(-n - 3)$ divizibil cu 7 pentru orice număr întreg n . 11) a) -3; b) $E(x) = -2x + 1$, $x \in [-1; 2]$. 12) $P_{\text{pătrat}} = 4a$, $P_{\text{dreptunghi}} = 4a$, deci sunt egale; $A_{\text{pătrat}} = a^2$, $A_{\text{dreptunghi}} = (a-x)(a+x) = a^2 - x^2 < a^2$, deci aria pătratului este mai mare decât aria dreptunghiului.

pg. 42. 1) b) 6561; c) 16641; d) 5625; e) 2475; f) 891. 2) a) $3 + 2\sqrt{2}$; b) $11 + 4\sqrt{7}$; c) $9 + 4\sqrt{2}$; d) $13 + 4\sqrt{10}$; e) $7 - 4\sqrt{3}$; f) $14 - 6\sqrt{5}$; g) $21 - 13\sqrt{3}$; h) $12 - 2\sqrt{35}$; i) 1; j) 4; k) 2; l) 7. 3) a) $x^2 + 2x + 1$; b) $x^2 + 4x + 4$; c) $9 + 6x + x^2$; d) $25 + 10x + x^2$; e) $4x^2 + 4x + 1$; f) $4 + 12x + 9x^2$; g) $x^2 + 4xy + 4y^2$; h) $9y^2 + 12xy + 4x^2$. 4) a) $x^2 - 2x + 1$; b) $x^2 - 6x + 9$; c) $4 - 4x + x^2$; d) $x^2 - 10x + 25$; e) $4x^2 - 8x + 4$; f) $9 - 12x + 4x^2$; g) $4x^2 - 4xy + y^2$; h) $4x^2y^2 - 20xy + 25$. 5) a) $x^2 - 1$; b) $x^2 - 4$; c) $9 - x^2$; d) $4x^2 - 1$; e) $x^2 - 12$; f) $2x^2 - 25$; g) $4x^2 - y^2$; h) $4x^2y^2 - 25$. 7) a) 27; b) 27; c) -23; d) 23; e) $16 - 16\sqrt{30}$; f) 0. 8) a) $3x^2 + 4$; b) 4; c) $32x - 9$; d) $12x - 7$; e) 14; f) $\frac{13}{25}x^2 + 2$; g) $6 - 2x$; h) $20x - 9$; i) $15x^2 - 40x$. 9) a) 4; b) $-2\sqrt{2}$; c) 1; d) 2. 10) 4, 6, 34. 11) 1, 1. 12) a) 25; b) $E(n) = 32n - 39$, $32n$ este par pentru orice număr natural n și 39 este impar.

pg. 45–46. 1) a) $4(x+a)$; b) $5(a-2b)$; c) $3(4x+5z)$; d) $x(a+b)$; e) $0,3(x+2y)$; f) $\sqrt{3}(a+b)$; g) $\sqrt{2}(x+\sqrt{5})$; h) $5(2a+3b-5c)$; i) $4x(y-2z+3t)$. 2) a) $4x(x-4y)$; b) $x(x+5)$; c) $a^3(2a^2-3)$; d) $y^2(5y-4y^2+3)$; e) $3x(x^2+2x+3)$; f) $2t(2t^3+3t^5-5)$; g) $\frac{x^2}{2}(x-\frac{1}{3})$; h) $\frac{2x}{3}(y+2t)$; i) $\frac{3x}{5}(x+2x^2-1)$. 3) a) $(x+2)(3x-4)$; b) $x(x^2+3x+y)$; c) $(x-1)(2x-1)$; d) $4abc(4a+b+2c)$; e) $(3-x)(2x-5)$; f) $(2x-1)(3x-1)$; g) $(x-2)(3-x-xy)$; h) $x(3-x)(x+1)$. 4) a) $(x-y)^2$; b) $(x-2)^2$; c) $(x+3)^2$; d) $(y+5)^2$; e) $(t-4)^2$; f) $(5+x)^2$; g) $(2x-5)^2$; h) $(a+6)^2$; i) $(7-y)^2$. 5) a) $(x-2)(x+2)$; b) $(5-a)(5+a)$; c) $(t-9)(t+9)$; d) $(3x-2)(3x+2)$; e) $(4x-5y)(4x+5y)$; f) $(7-2x)(7+2x)$; g) $(\frac{x}{2}-1)(\frac{x}{2}+1)$; h) $(\sqrt{5}-a)(\sqrt{5}+a)$; i) $(xy-1)(xy+1)$. 6) Termenii lipsă sunt: a) 25; b) $8a$; c) x^2 ; d) $12x$; e) $12x$; f) $18x$; g) 2; h) $2\sqrt{5}a$; i) $2\sqrt{6}x$. 7) a) $(x-1)(x+5)$; b) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$; c) $(8-x)(x+2)$; d) $(2x-y+1)(2x+y+1)$; e) $(x+5-y)(x+5+y)$; f) $(x+1)(3x+5)$; g) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$; h) $(x+1)(3x-1)$; i) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$. 8) a) $(x+y)(a+2)$; b) $(x+2)(x+y)$; c) $(a-3)(a+x)$; d) $(x+2)(x^2+3)$; e) $(x+5)(x-y)$; f) $(x-2y)(4a+3b)$; g) $(x-4)(y-4)$; h) $(y-1)(y+1)(x^2+1)$; i) $(a-1)(a^2+3)$. 9) a) $(x+y)(x+y+3)$; b) $(x-2)(x-7)$; c) $(x+y)(x+y+4)$; d) $(x-1)(x-1+a)$; e) $(x-4-y)(x-4+y)$; f) $(x+1)(x-1)(x+3)$; g) $(x-y+2)(x+y-2)$; h) $(x-3)^2$; i) $(2x+3)^2$. 10) a) $(x+3)(x+4)$; b) $(x-2)(x-3)$; c) $(x+5)(x+6)$; d) $(x-1)(x-8)$; e) $(x-7)(x+3)$; f) $(x-2)(x+3)$; g) $(x-7)(x+1)$; h) $(x-13)(x+2)$; i) $(x-9)(x+3)$. 11) a) $(x-14)(x+1)$; b) $5x(x+2)^2$; c) $(2x-1)(3x-1)(3x+1)$; d) $(x+5)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$; e) $(x-1)(3-x)(3+x)$; f) $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$; g) $x(x+5)(x-3)$; h) $x(x+4)(x-3)$; i) $(x+1)^2(x+2)$. 12) 5. 13) 96. 14) 74. 15) Folosind notația de la indicație obținem $n = a^2 + 5a + 3$, care este număr natural.

16) Se obține $(x^2 + x + 2)^2$. 17) $N = (n - 2)^4$. 18) a) $(a + 1)^2 \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}, (b + 2)^2 \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}, (a + 1)^2 + (b + 2)^2 + 4 \geq 4 > 0$, pentru orice numere reale a și b ; b) Se procedează ca la a). 19) a) $x = -1, y = -2$; b) $x = -2, y = 1$; c) $x = -\frac{1}{2}, y = \sqrt{3}$; d) $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -4$. 20) b) Valoarea minimă a expresiei este 5, pentru $x = \frac{1}{3}$.

pg. 47. RECAPITULARE. 1) a) $5x^2 - 2x - 9$; b) $4x^2 + 4x + 3$; c) $4x^3 - 2x^2 + x + 3$; d) $\frac{23}{5}a - \frac{3}{2}ay$; e) $6, 69x^2 + 8, 51x - 1, 09$; f) $\frac{5}{4}x^2 - \frac{57}{40}x + 5$; g) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{29}{10}$; h) $-\frac{112}{45}x^2 + \frac{17}{15}x + \frac{514}{45}$. 2) a) $7x + 4$; b) $ab + 6$; c) $-4x^2 - 18$; d) $-x^2 - 25x + 1$; e) $32x^2 - 10x + 6$; f) $-2x + 4a^2y + 3axy$; g) $\frac{3}{2x^2} - \frac{5}{2ax} + \frac{3}{a^2}, x \neq 0, a \neq 0$; h) 12. 3) a) $2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$; b) $2x\sqrt{3} + \sqrt{2} + 6$; c) $x^5 - x^2$; d) $2x^3 - x^2 + 3x - 2$; e) $x^4 + x^2 + 1$; f) $\frac{x^2}{4} - \frac{13x}{8} + \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x \neq 0$; g) $x^2 - 1$; h) $-4x\sqrt{3}$. 4) A = a^2b^2 . 5) a) $4x^2 - 12x + 9$; b) $16x^2 - 9$; c) $16x^2 - 24x + 9$; d) $9x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{81}$; e) $3x^2 + 2x\sqrt{15} + 5$; f) $4x^2 - 25$; g) $0,09x^2 - 53,29$; h) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{49}{36}$; i) $3x^2 + 2x\sqrt{15} - 5$. 6) a) $-x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2$; b) 11; c) $\frac{32}{25}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$; d) $30x^2 + 13$; e) $8(52x + 3)$. 7) a) $(1 - 2x)(7x - 5)$; b) $4x^2(2x^2 + 1)(4x - 1)$; c) $3a^2b^3c^2(2a^2b^2c - 3b + 4ac^2)$; d) $(x - 3)(2 + 2x)$; e) $(x - 3)(5x - 9)$; f) $(3x - 2)(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$; g) $4(2x - 3)(1 - x)(1 + x)$; h) $(2 - x)(3 - x)(3 + x)$. 8) a) $(4 - 5x)^2$; b) $(\sqrt{3}x - 1)^2$; c) $(9 - 2x)(9 + 2x)$; d) $(4x - \sqrt{3})(4x + \sqrt{3})$; e) $8(x - 2)(2x + 1)$; f) $(3x + 1)(7x - 1)$; g) $4(x + 1)(5x - 2)$; h) $(5x - 1)(9x - 7)$; i) $(3x^2 - \sqrt{2})^2$. 9) a) $(x - y)(x + y)^2$; b) $(x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$; c) $(x - 2)(x - 8)$; d) $(x - 8)(x + 2)$; e) $3(3x - 5)(x + 1)$; f) $8(2x - 3)(x + 1)$; g) $(x + 4)(x - 7)$; h) $(2x - 1)(x\sqrt{3} - \sqrt{5})(x\sqrt{3} + \sqrt{5})$; i) $4x(x - 7)(x + 5)$. 10) a) $(x^2 + x + 2)^2$; b) $(x^2 - x + 3)^2$; c) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 6)$; d) $x(x - 1)(x^2 - x + 4)$.

pg. 48-49. Test de autoevaluare. 1. a, b, d, c, d, a, b, a, b. Test de evaluare. I. 1) x; 2) $2x + 6$; 3) 0; 4) $3x(3x - 2)$; 5) $(x - 4)(x + 4)$; 6) $(x + 2)^2$. II. 1) a) $2x(x + 2)^2$; b) $(2x - 1)(x - 2)$; c) $9x(x - 1)(x + 1)$. 2) 5. 3) $\overline{x3} \cdot \overline{x5} + 1 = (10x + 3)(10x + 5) + 1 = (10x + 4)^2 = \overline{x4}^2$. III. b) $E(x) = (x + 2)(x + 3)$, produsul a două numere consecutive este număr par; c) 8. Consolidare și aprofundare. 1) a) $-12a^3b^4c^5$; b) $2x + 5$; c) $x - y + 1$; d) $3x^2y$; e) -3 ; f) $-35a^6b^7c^5$; g) $-4x - 4y - 8$; h) -1 ; i) $-10x - 27$. 2) a) $6x^2$; b) $27x$; c) $6x^2 - 21x$; d) $x^2 - x + 4$; e) $-2x^2 - 7x$; f) $6x^2 + 13x - 5$; g) $2x^2 - x$; h) $x - 2$; i) $x^2 - 14x - 39$. 3) a) $x^2 - 8x + 16$; b) $x^2 + 14x + 49$; c) $4x^2 - 20x + 25$; d) $4x^2 - 12x + 9$; e) $16x^2 + 8x + 1$; f) $4x^2 + 12xy + 9y^2$; g) $x^2 - 16$; h) $4x^2 - 1$; i) $36 - 4x^2$. 4) a) $(x - 6)^2$; b) $(3x - 4)^2$; c) $(5x + 1)^2$; d) $(x - \sqrt{3})^2$; e) $(x\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$; f) $(x - 7)(x + 7)$; g) $(9x - 4)(9x + 4)$; h) $(x - y - 4)(x + y + 4)$; i) $(3x + 2)(8 - x)$. 5) a) $(x + 2)(x + 3)$; b) $(a + b)(m + n)$; c) $(x - y)(x + y)^2$; d) $(x + 2)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$; e) $(x - 4)(x + 9)$; f) $(x - 6)(x + 1)$; g) $(x - 6)(5x - 6)$; h) $(x - 8)(x + 1)$; i) $-(11x - 3)(x + 17)$. 6) a) $E(0) = -9, E(-2) = -27, E(3) = 18$; c) $E(x) = 9(x - 1)$ se divide cu 18 dacă $x - 1$ se divide cu 2, adică $x = 2k + 1$; d) $(-\infty; 1]$. 7) a) $E(0) = 1, E(-3) = -5, E(2) = 5$; b) $E(x) = 2x + 1$; c) -2 ; d) $\{0; 1; 2; 3\}$. 8) a) $E(0) = 1, E(-3) = 25, E(2) = 25$; b) $E(x) = (2x + 1)^2$; c) 3, 1; d) $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. 9) b) $\{0; 1; 2; 3\}$; c) $A = 49 \cdot 25$. 10) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2, y = 3, 0$.

pg. 56-57. 1) a) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$; b) $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$; c) $x \in \mathbb{R} - \{-4; 4\}$; d) $x \in \mathbb{R}$. 2) a) $F(-1) = -\frac{3}{2}, F(0) = -\frac{5}{3}$; b) $F(-2) = 3, F(-1) = \frac{9}{2}$. 3) a) $\frac{2x^3}{2x^2 - 2x}$; b) $\frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 + x - 2}$; c) $\frac{2x^3 - x^2}{x^3 + x^2}$; d) $\frac{x^2 + 4x + 4}{3x^2 + 5x - 2}$; e) $\frac{6x^2 - 11x + 3}{9x^2 - 1}$; f) $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 + 1}$; g) $\frac{2x^3 - 2x^2 + 6x}{2x^3 + 2x^2 - 4x}$; h) $\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$; i) $\frac{2x^2 + 2x + 2}{5x^2 + 5x + 5}$. 4) a) $\frac{3x}{4y}$; b) $\frac{4xy}{5}$; c) $\frac{2x^2y}{3}$; d) $\frac{2y}{3x}$; e) $\frac{3x}{4y^2}$; f) $\frac{2}{3}$; g) $\frac{x}{2}$; h) $\frac{3}{2x}$; i) $\frac{3x}{2}$; j) $\frac{4}{x}$; k) $\frac{x - 1}{x + 1}$; l) $\frac{x + 3}{x - 3}$. 5) a) $\frac{x + 2}{x - 3}$; b) $\frac{x - 3}{x + 3}$; c) $\frac{x(x + 5)}{2(x - x)}$; d) $\frac{x - 3}{x + 3}$; e) $\frac{x + 3}{x + 1}$; f) $\frac{2x + 1}{2x - 1}$; g) $\frac{x + 2}{x - 2}$; h) $\frac{x - 1}{x - 4}$; i) $\frac{x + 3}{x - 4}$; j) $\frac{x}{2}$; k) $\frac{x + 4}{x - 5}$; l) $\frac{(x - 1)(x - 3)}{x + 2}$. 6) a) $\frac{3x^2 - 3}{x(x - 1)(x + 1)}$; b) $\frac{5x^2 - 5x}{x(x - 1)(x + 1)}$; c) $\frac{x + 1}{x(x - 1)(x + 1)}$; d) $\frac{x^2 + 3x}{x(x - 1)(x + 1)}$; e) $\frac{3 - x}{x}$; f) $\frac{7 - 2x}{x}$; g) $\frac{x + 3}{x}$; h) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$; i) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$; j) $\frac{3x - 1}{x^2 - 1}$; k) $\frac{3x^2 - 3}{x(x^2 - 1)}$; l) $\frac{2x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)}$; m) $\frac{3x + 3}{x(x^2 - 1)}$; n) $\frac{x^2 + 3x}{x(x^2 - 1)}$. 7) a) $\frac{4x}{5}$; b) $\frac{-2x^2 + 5x + 6}{6x}$; c) $\frac{12x^2 + 3x - 14}{12x}$; d) $\frac{2x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{6x^2}$; e) $\frac{3}{7}$; f) $\frac{-3x^2 - 12x - 15}{10x^2}$; g) $\frac{-23 - 5x^2 - 12}{18x^2}$; h) $\frac{20x + 9}{15(x + 1)}$; i) $\frac{x^2 - x - 1}{x(x + 1)}$; j) $\frac{55}{6(x + 1)}$; k) $\frac{x + 10}{x - 10}$; l) $\frac{3}{(x^2 - 4)}$. 8) a) $\frac{3}{x^2 - 1}$; b) $\frac{3x^2 + 9}{x^2(x - 3)}$; c) $\frac{x^4 - 13x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 4)^2}$; d) $\frac{6x + 5}{x(5 - x)(5 + x)}$; e) $\frac{-3x + 24}{(x - 2)(x + 5)}$; f) $\frac{7}{(x - 1)(x + 2)}$; g) $\frac{1}{(2x - 3)^2}$; h) $\frac{9x + 4}{4x(x + 1)}$; i) $\frac{x - 9}{x - 3}$. 9) a) $\frac{3a}{20}$; b) $\frac{8ab}{15}$; c) $\frac{4x^2y}{3a}$; d) $\frac{10xy^2}{a}$; e) $\frac{3x^2}{4}$; f) $\frac{12}{5a}$; g) $\frac{5a}{6b}$; h) $\frac{x^2a}{12y}$; i) $\frac{45a}{2xy^2}$; j) $\frac{3(x + 1)^2}{4x^4}$; k) $\frac{2x + 1}{4}$; l) $\frac{1}{2}$. 10) a) 1; b) $\frac{x - 2}{x - 3}$; c) $(\frac{2x + 3}{2x - 3})^2$; d) $\frac{x - 1}{x + 1}$; e) $\frac{1}{(x - 1)^2}$; f) $\frac{(2x + 1)(2x - 1)}{6}$; g) $\frac{2x + 1}{9}$; h) $\frac{2x - 1}{x - 1}$; i) 1. 11) a) $\frac{x}{(x - 1)^2}$; b) $\frac{x + 1}{2}$; c) $\frac{1 - 3x}{2(1 + 3x)}$; d) $\frac{x^2}{x + 1}$; e) $\frac{-2x - 9}{2x + 3}$; f) $\frac{1}{4x - 3}$; g) $-\frac{2x(2x - 1)}{2x + 1}$; h) $(x + 1)^2$; i) 1; j) $\frac{x^2}{x - 1}$; k) 1. 13) 0, 5. 14) 4. 15) c) 2029105. 16) a) $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$; b) $\frac{x + 1}{x - 1}$; c) 0; 2; 3; d) $(-\infty; 1)$. 17) a) $x \in \mathbb{R} - \{-3; -2; 0; 2\}$; c) nu are soluție; d) -4 ; e) $(-3; +\infty)$.

pg. 61. 1) a). 3) a) și b). 4) a) 1; 3; b) $-9; 9$; c) $0; 1; 5$; d) $-4; 4$; e) $0; \frac{2}{3}$; f) $-6; 1$; g) $\emptyset$; h) $2; 5$; i) $2; 4$; j) $-3; 3$; k) $\emptyset$; l) $\emptyset$; m) $\emptyset$; n) $-\frac{5}{2}; -1$; o) $-\frac{4}{9}$. 5) a) $x^2 + 3x - 10 = 0$; b) $x^2 - 9 = 0$; c) $x^2 - 3x + 2 = 0$; d) $x^2 - 7x + 11, 25 = 0$; e) $x^2 - 2x - 1 = 0$. 6) a) $-9; 1$; b) $0; -4$; c) $-1; 3$; d) $0; 6$. 7) a) $7; -4; \frac{1}{2}$. 8) a) $(2x + 5)(x + 2)$; b) $(x - 1)(x - 4)$; c) $(7x + \sqrt{2} - 4)(7x + \sqrt{2} + 4)$; d) $-(3x + 1)(2x - 1)$; e) $\frac{(x\sqrt{10} - \sqrt{6} - 4)(x\sqrt{10} - \sqrt{6} + 4)}{\sqrt{10}}$; f) $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$; g) $(x^2 + 2x + 2)^2$; h) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 2)$; i) $(x + 1)^2(x^2 + 2x + 7)$. 9) a) $-5; 1$; b) $-\frac{2}{3}; 1$; c) $-3, 1$. 10) a) $x^2 + 3x - 4 = 0; 1; -4$; b) $-2x^2 + 7x + 4 = 0; 4; -\frac{1}{2}$; c) $x^2 - 10x + 16 = 0; 2; 8$; d) $4x^2 - 6x - 4 = 0; 2; -\frac{1}{2}$; e) $2x^2 + 7x + 6 = 0; -2; -\frac{3}{2}$; f) $25x^2 - 18x - 7 = 0; 1; -\frac{7}{25}$. 11) $-5, 2$. 12) 3, 5, 5. 13) $24 \text{ cm}^2, 24 \text{ cm}$. 14) $\Delta \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{29}{8}$.

pg. 62. RECAPITULARE. 1) a) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; b) $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$; e) $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; f) $x \in \mathbb{R} - \{-10; 10\}$.
2) a) 0; b) 0; c) -1; d) 2; e) $\emptyset$; f) $-\frac{5}{2}$; g) 0; h) -1; 2; i) 2; j) -5; 5. **3)** a) $-\frac{5}{2}$; b) 3; 1; c) 1; $\frac{4}{7}$; d) -3; $-\frac{1}{3}$; e) 3; $\frac{5}{2}$; f) $-\frac{1}{3}$; 0; g) 3; 2; h) -1; 0,5. **4)** a) $\frac{x}{2}$; b) $\frac{b}{3c}$; c) $\frac{x+y}{a}$; d) $\frac{3x}{2y}$; e) a; f) $\frac{1}{x-3}$; g) $\frac{3x+1}{3x-1}$; h) $\frac{x-2}{x-5}$; i) $\frac{x-1}{x(x+1)}$; j) $\frac{x+5}{x+2}$; k) $\frac{x}{2}$; l) $\frac{x}{3}$; m) $\frac{x}{3}$; n) $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$; o) $\frac{x(2x-1)}{2x+1}$; p) $\frac{x-3}{2x^2}$;
 q) $x+2$; r) $\frac{x+2}{x-2}$; s) $-\frac{3(x-3)}{(x^2-2x+3)}$; t) $\frac{x+1}{2(x-1)}$; u) $(x-1)(x+2)$; v) x^2-x+1 ; x) x^3-1 . **5)** a) $\frac{3x+1}{x(x+1)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 0\}$;
 b) $0, x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$; c) $\frac{-3x-1}{x(x-2)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; 0; 2\}$; d) $\frac{x+4}{6(x+3)}$, $x \in \mathbb{R} - \{-3; 3\}$; e) $\frac{2x-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$; f) $\frac{2-x}{x(2x+1)}$,
 $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\}$; g) $\frac{2}{x^2-x}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$; h) $\frac{x-2}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; \frac{1}{2}; 2\}$; i) $\frac{x-3}{x+3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-3; -1; 3\}$; j) $\frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2; -1; 1\}$;
 k) $\frac{x-5}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-5; -2; 5\}$. **6)** a) $x \in \mathbb{R} - \{-3; 3; 4\}$; b) $E(x) = \frac{x-4}{x+3}$; c) $x \in \{-4; 2; 4; 10\}$. **7)** a) $x^2 - 9x + 20 = 0$; b) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
 c) $x^2 - 2, 25 = 0$; d) $x^2 - 4x - 1 = 0$. **8)** $1 + \sqrt{2}$. **9)** $\Delta = 4m^2 \geq 0$; $3m, m$. **10)** a) -3; 0; b) $-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}$; c) $\emptyset$; d) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$; e) -3; 4; f) -3; 7;
 g) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; h) $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{8}$; i) -1; 1; j) -8; 3. **11)** $\frac{\sqrt{113}}{2}$. **12)** 18 și 19. **13)** 20; 80.

pg. 63. Test de autoevaluare. 1) a) $4x$; b) x ; c) $4x^2 + 6x + 3$; d) $2x^2 + 7x - 15$. **2)** a) $x^2 + 2x + 1$; b) $4x^2 - 1$; c) $36x^2 - 48x + 16$;
 d) $-5x^2 + 5$. **3)** a) $4x^3(x-2)(x+2)$; b) $(x+1)(x+9)$; c) $2(2x+3)(x+3)$; d) $(x-3)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$. **4)** b) $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$;
 c) $x \in (-\infty; 1) - \{-2\}$; d) $S = \frac{n(n-1)}{4}$. **Test de evaluare. 1)** a) -4; $-\frac{3}{2}$; b) -4; c) $\emptyset$; d) $-\sqrt{3}; \sqrt{3}$. **2)** a) $3(x-4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$;
 b) $x(x-1)(3x+2)$; c) $x(x-1)(2x+3)$; d) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$. **3)** a) $\frac{2}{x}$; b) $\frac{x+3}{x-1}$; c) $\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}$; d) $\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$. **4)** a) $x \in \mathbb{R} -$
 $\{-3; -1; 3\}$; b) $E(x) = \frac{x-3}{x+3}$; c) $E(-2) = -5, E(\frac{3}{5}) = -\frac{1}{14}$; d) $x \in (-\infty; -3)$.

pg. 71-72. 1) O funcție $f: A \rightarrow B$ (se citește f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B) este formată din două mulțimi
 nevide A numită domeniul de definiție și B numită mulțimea de valori, precum și o lege de corespondență prin care se asociază
 fiecărui element din mulțimea A un singur element din mulțimea B . **2)** a) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; b) $\mathbb{R}$; c) $f(x) = x - 2$;
 d) $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. **4)** a) $\{-2; -1; 0; 3; 4\}$; $\{0; 1; 4; 9; 16\}$; $f(x) = x^2$; b) $\{-2; 0; 2; 4; 6; 8; 10\}$; $\{-10; -8; -6; -4; -2; 0; 2\}$
 $f(x) = -x$; c) $\{0; 1; 2; 3; 4\}$; $\{-4; -3; -2; -1; 0\}$; $f(x) = x - 4$; d) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; $\{-10; -8; -6; -4; -2; 0; 2\}$; $f(x) = x - 1$.
6) a) $\{-2; -1; 2; 7\}$; b) $\{-8; -1; 0; 8; 27; 64\}$; c) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$; d) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; e) $\{-1; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1\}$. **7)** a) $\{-3; -2; 0; 1; 3\}$,
 crescătoare; b) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, descrescătoare; c) $\{-3; -\sqrt{6}; -2; 0; 2; \sqrt{6}; 3\}$; d) $\{-1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\}$, descrescătoare;
 e) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. **9)** a) $A, D \in G_p$; b) $M, N \in G_p$. **11)** a) 9; b) 101^2 ; c) $(n+1)^2$; d) $(2n+1)^2$; e) $(3n+2)^2$. **12)** a) 1; 0; 1; 4; 0.
 b) $m = 5, n = 10$; c) 8; $\emptyset$; d) 10. **13)** a) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; b) $m = 0, n = 10, p = 20$; c) $\frac{20}{201}$. **14)** a) -2001; b) dacă $P \neq 0$ atunci nu
 există numere pentru care $f(n) = 0$, adică toate valorile funcției sunt -1 sau 1. Suma a 2001 numere de -1 sau 1 nu poate fi egală
 cu 0; c) $B = \{-1; 1\}$. **15)** a) 3; 12; 21; 217; b) 4; c) numere prime.

pg. 81-82. 1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1$ și $-5, -3, 10, 5, A(0; -5), B(5; 0)$. **2)** $A \in G_p$. **3)** $a = 2; b = -4; c = \frac{1}{2}; d = 1, d = -\frac{1}{5}$. **4)** $f(x) = -x + 1$. **5)** $-\frac{5}{2}$;
 $-\frac{5}{3}; \emptyset$. **6)** a) $f(x) = x$ crescătoare; b) $f(x) = -1$ constantă; c) $f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}$ descrescătoare; d) $f(x) = \frac{3}{2}x$. **7)** $A \notin G_f, B \in G_p, x = \frac{2}{3}$.
8) $(-\infty; \frac{1}{2}]$. **10)** $A(3; -3), B(-\frac{3}{2}; 6), C(1; 1), D(3; -3), E(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}), F(\frac{3}{5}; \frac{9}{5})$. **11)** da, nu, nu, da. **12)** $f(x) = 2x - 1, g(x) = 3x - 3$.
13) $A(2; 0), \emptyset$. **14)** b) $A(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$; c) $(\frac{1}{3}; +\infty), (3; +\infty), (-\infty; -\frac{3}{4}]$. **15)** $f(x) = 3x - 8, f(x) = |x + 4|, f(x) = 2x - 2\sqrt{2} - 1$,
 $f(x) = |5 - 2x|, f(x) = (x - 4)^2 + 4$. **16)** $g(x) = 3x - 3, A(2; 3)$. **17)** $A(0; 4), B(-4; 0), A = 8u^2, 2\sqrt{2}u, 1, (-\infty; -4]$. **18)** $f(x) = -4x + 20$,
 $A - C - D$ coliniare, $A_{\text{COD}} = 4u^2, P_{\text{ABOD}} = \sqrt{17} + 6 + 2\sqrt{5}u, \frac{4\sqrt{5}}{5}u, CD = AD$. **19)** a) 2; c) $a = \frac{1}{3}$; c) $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}), M(1; -1)$. **20)** a) $-a + 4; 4$;
 $3a + 4$; b) -1; d) $4\sqrt{2}u$. **21)** a) $a = 1, b = 2$; c) $\triangle OAB, \triangle OCE$ dreptunghice isoscele. **22)** b) $x = 2$; c) $\triangle MQP, MQ = 5u, MP = 5u$,
 deci triunghiul este isoscel. $MH \cap QP = \{A(2; -1)\}$; $AQ = PA = \sqrt{5}u$, deci MA mediană, deci înălțime; PO și MA sunt înălțimi, deci
 și QH înălțime. **23)** a) $a = 5, b = 2$; c) $AB = 2\sqrt{26}u, AD \perp Oy; A_{\text{ABC}} = A_{\text{ABD}} - A_{\text{ACD}} = \frac{2 \cdot 10}{2} - \frac{2 \cdot 8}{2} = 10 - 8 = 2u^2; A_{\text{ABC}} = \frac{x \cdot 2\sqrt{26}}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}u$. **24)** a) $a = 2, b = 2$; c) $MN = \sqrt{5}, NP = c + 1, MP = \sqrt{c^2 + 4}$. Din teorema lui Pitagora obținem $c = 4$.
25) 0; 10; 4; 12.

pg. 92. RECAPITULARE. 1) a) $\text{Im}f = \{-16; -6; 4; 9; 19; 29; 39\}$; b) $\text{Im}f = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$; c) $\text{Im}f = \{-2; -1; 2; 7\}$;
 d) $\text{Im}f = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$; e) $\text{Im}f = \{-7; -3; -1; 0; 2; 3; 5; 9\}$; f) $\text{Im}f = \{-11; -8; -5; -2; 1; 4; 7; 10; 13\}$. **2)** a) $f(0) = -4, f(-2) =$
 $= -16, f(3) = 14, f(5) = 26$; b) -16; c) $101 \cdot 296$. **3)** a) $A(5; -5)$; b) $A(-1; 7)$; c) $A(\frac{5}{3}; \frac{5}{3})$; d) $A(\frac{5}{4}; \frac{5}{4})$; e) $A(2; 1)$; f) $A(a; 5 - 2a), a \in \mathbb{R}$.
5) a) $A(\frac{2}{3}; 0), B(0; 5)$; b) $A(-3; 0), B(0; 9)$; c) $A(5; 0), B(0; 5)$; d) $B(0; 5)$; e) $A(-1; 0), A'(1; 0), B(0; -1)$. **6)** a) 2; b) -2; 2; c) $\emptyset$; d) 6;
 e) -2. **7)** a) $\emptyset$; b) -1; c) $\emptyset$; d) 5; e) $\emptyset$. **8)** 5. **9)** 4. **10)** $f(x) = 2x + 1$. **11)** $f(x) = 2x$ sau $f(x) = 3x - 2$. **12)** da. **13)** 2. **14)** a) $x = 2$,
 $x \in (-\infty; 2]$; b) $x = -3, x \in [-3; +\infty)$; c) $\emptyset, \emptyset$; d) $x = -1, x \in [-2; -1]$. **15)** $A(1; 5)$.

pg. 93-94. Test de autoevaluare. 2) a) -5 ; c) $A = \frac{9}{2} u^2$; d) $\frac{3\sqrt{2}}{2} u$; e) -4 ; f) 1 ; g) -5353 ; h) $A(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$; i) nu există; j) $9\sqrt{2} u$. **Test de evaluare. I. 1)** $\text{Im}f = \{0; 0, 5; 1; 1, 5; 2; 3\}$. **2)** $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. **3)** fals. **4)** -2 . **5)** $A(\frac{6}{5}; 0)$. **6)** $A(0; 1)$. **II. 1)** da. **2)** $a = -2, b = -3$. **3)** $\emptyset$. **III. 1)** $A = \frac{3}{2} u^2; \frac{\sqrt{37}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}$. **Consolidare și aprofundare. 1)** $f(-4) = -19, f(-2) = -5, f(-1) = 2, f(-0,5) = 5,5, f(0) = 9, f(2) = 23, f(3) = 30$. **3)** a) $\text{Im}f = \{-38; -30; -22; -14; -6; 2\}$; b) $\text{Im}f = \{-11; -6; 4; 14; 19; 24\}$; c) $\text{Im}f = \{-17; -9; -1; 7\}$. **4)** a) $10,5$; b) $-71,5$; c) -1100 . **5)** a) $A(-\frac{9}{5}; 0), B(0; 9)$; b) $A(\frac{5}{3}; 0), B(0; 10)$; c) $A(-8; 0), B(0; 16)$. **6)** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) -5 ; d) $-\frac{4}{5}$; e) $-\frac{4}{7}$. **7)** a) $f(x) = -x + 4$; b) $f(x) = -\frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$; c) $f(x) = -2x$; d) $f(x) = 5$. **8)** a) $A(1; 6)$; b) $A(\frac{7}{3}; \frac{5}{3})$. **9)** da, nu, nu. **10)** a) $A(\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$; b) $A(\frac{2}{7}; \frac{1}{7})$; c) $A(\frac{5}{11}; -\frac{4}{11})$; d) $A(\frac{5}{2}; -\frac{13}{2})$; e) $A(4; -11)$; f) $A(6; -17)$; g) $A(\frac{1}{8}; \frac{5}{8})$. **11)** $g(x) = -x + 4, A = 9 u^2, P = 6 + 6\sqrt{2} u$, triunghi dreptunghic isoscel. **12)** $g(x) = 2, A = 8 u^2, P = 10 + 2\sqrt{2} u$, trapez dreptunghic. **13)** $A = \frac{25}{6} u^2$. **14)** 3 . **15)** $-\frac{4}{3}$. **16)** $6,4 u$. **17)** -3 . **18)** $A(\frac{1}{3}; \frac{11}{3})$. **19)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}, \mathbb{N}$.

pg. 102-103. 1) a) a; b) f; c) a; d) a; e) a; f) f; g) a; h) a; i) a. **2)** a) $AB \subset \alpha$ conform axiomei A2; b) $MN \not\subset \alpha$. Dacă MN ar fi inclusă în plan, atunci toate punctele ei ar aparține planului, deci și N – fals. c) fals. Dacă punctele sunt coliniare, $C \in d$ și cum $d \subset \delta$, obținem C este în plan, fals. **3)** a) $A \in \alpha$; b) $A \notin d$; c) $C \in d$; d) $E \notin \alpha$; e) $E \notin d$; f) $d \subset \alpha$; g) $AC \subset \alpha$; h) $B \notin EC$; i) $EA \not\subset \alpha$. **4)** Dacă cele patru puncte ar fi coliniare, atunci ele ar fi toate pe o dreaptă. O dreaptă este inclusă în plan, deci toate punctele sunt în plan, deci coplanare – fals. **5)** a) 1 ; b) Minim 1 dacă sunt toate coplanare, dar necoliniare și maxim o infinitate dacă sunt coliniare. **6)** a) Minim 1 plan dacă punctele din plan sunt coliniare, maxim 6. b) Trei plane se obțin din punctul E și 3 drepte din plan. Nu există așezare a 4 puncte în plan pentru a obține 3 drepte. **7)** Punctele A și B aparțin planului determinat de dreptele a și b . Conform axiomei A2 toate punctele de pe dreapta AB aparțin planului, deci și mijlocul segmentului. **8)** Conform axiomei A2. **9)** a) $A \in \alpha$; b) $C \notin \alpha$; c) $AB \subset \alpha$; d) $\alpha \cap \beta = d$; e) $CB \cap \beta = \{C\}$; f) $AC \cap \alpha = \{A\}$; g) $(ABC) \cap \alpha = AB$; h) $(d, C) = \beta$; i) $(d, AB) = \alpha$. **10)** Nu. **11)** $A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow A \in \alpha \cap \beta = d$. **12)** Cele trei puncte determină un plan. **13)** Nu (colțul unei camere cu cele trei muchii care se întâlnesc în colț). **15)** Da, trei puncte determină un plan. **16)** Două drepte paralele determină un plan. **17)** d) Planele au dreapta comună BC , iar punctele A și D în plane diferite, deci puncte necoplanare; e) $AB \parallel CD \parallel EF$ două drepte paralele determină un plan; f) $AB \parallel CD \parallel EF$ două drepte paralele determină un plan. **18)** a) $(ABC) \cap (BCD) = BC$; b) $(ABC) \cap (ABD) = AB$; c) $(ABE) \cap (ACD) = AE$; d) $(ACE) \cap (ADE) = (ACD)$; e) $(ABE) \cap (ACD) \cap (BCD) = \{E\}$.

pg. 109-110. 6) a, f, f, f, a, a, a, a, f, f, a, f. **7)** Dacă cele trei muchii sunt muchii laterale, atunci două câte două sunt coplanare. Dacă două muchii sunt muchii laterale și una este muchie a bazei, cele două muchii laterale sunt coplanare. Dacă două muchii sunt muchii ale bazei și una este muchie laterală, cele două muchii ale bazei sunt coplanare. **8)** triunghiulară, patrulateră, triunghiulară, lipsește baza. **9)** i. d); ii. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul VBM sau VCM , $VM = 8$ cm, b). **10)** i. b); ii. c). **11)** a. **12)** Triunghiurile din desen sunt echilaterale. **13)** $SDGH, SDGF, SDFE$. **14)** 4. Fiecare tetraedru are la bază un triunghi cu două din laturile pătratului și între ele este unghi drept. **15)** 8 cm.

pg. 116-117. 6) Dacă baza prisme are n vârfuri, atunci prisma are $2n$ vârfuri. Din fiecare vârf pleacă 3 muchii și intră 3 vârfuri, deci numărul de vârfuri este $\frac{2n \cdot 3}{2} = 3n$. Numărul 14 nu se împarte la 3; $15 = 3 \cdot 5$. **7)** a) Dacă baza prisme are n vârfuri, atunci prisma are $2n$ vârfuri, deci $v = 2n$. b) Am arătat la exercițiul anterior că $m = 3n$. c) Dacă baza are n vârfuri, are tot n fețe laterale, deci $n+2$ fețe (cu tot cu bazele); $v = 2n$ și $f = n + 2$. Obținem $v = 2f - 4$. d) $v + f = 2n + n + 2 = 3n + 2 = m + 2$. **9)** a) 51 cm; b) 5 cm; c) 8 cm. **10)** a) Desfășurăm prisma și furnica parcurge diagonala dreptunghiului $ACC'A'$ (format din două fețe laterale), distanța este de $\sqrt{32^2 + 6^2} = 2\sqrt{265}$ cm. b) Desfășurăm prisma și furnica parcurge diagonala dreptunghiului $ABC'D'$ (format din o față laterală și baza de sus), distanța este de $\sqrt{16^2 + 22^2} = 2\sqrt{185}$ cm. **14)** Drumul minim taie BF ; $5\sqrt{17} \approx 20,62$ m. **15)** Al doilea pachet. **16)** Muchiile sunt diagonale în fețele cubului; $5\sqrt{2}$ cm. **17)** 8; 12; 6; 1. **18)** $ACFH$ este tetraedru regulat. **20)** 72 cm.

pg. 120-121. Test de autoevaluare. I. A, A, F, A, A. II. 1) b). **2)** d). **3)** b). **III. 1)** AD. **2)** AO sau AC. **3)** VO. **4)** O. **5)** Punctul de intersecție dintre VO și AN. **IV. 1)** 32 cm. **2)** $4\sqrt{3}$ cm; c) $8\sqrt{5} + 4$ cm. **Consolidare și aprofundare. 1)** a) distincte, plan; b) trei; c) nesituate pe dreaptă (exterior dreptei); d) concurente, paralele. **2)** A, A, A, A, F, A. **3)** a) Dreptele AB și CD sunt concurente, deci determină un plan în care sunt cele 4 puncte; b) $O \in AB, AB \subset (ABC)$, deci $O \in (ABC)$; c) Punctele O și A sunt în plan. **4)** a) Dreptele AB și CD sunt paralele, deci determină un plan în care sunt cele 4 puncte; b) Punctele C și A sunt în plan; c) Pot fi paralele sau concurente. **5)** A, A, F, A, A, A, F, F, A, A, A. **6)** a) 75° ; b) 16 cm²; c) Prin desfășurarea fețelor laterale se obține un triunghi dreptunghic, lungimea minimă este $8\sqrt{2}$ cm. **7)** 60 cm. **8)** a) 72 cm; b) $10 + 2\sqrt{13} + 4\sqrt{5}$ cm; c) o dreaptă care unește centrele fețelor $ABB'A'$ și $DCC'D'$. **9)** $\triangle ACE \equiv \triangle BCE$ (CC); b) Se aplică teorema lui Pitagora; c) $9\sqrt{7}$ cm²; d) Are baza pătrat și se demonstrează că $VB = VC = VE = VD$.

pg. 125. 1) a) $AD, A'D', B'C'$; b) AB, DC, BB', CC' ; c) $AA', DD', A'B', C'D'$; d) $A'D'$. 2) a) paralele; b) necoplanare; c) concurente; d) necoplanare; e) concurente; f) necoplanare. 3) a) $AB \parallel CD$ și $CD \parallel C'D'$; b) Se folosesc: $AB = CD = C'D'$ și paralelismul de la punctul anterior; c) Din punctul anterior; d) BC' și $B'C$ sunt concurente și nu se pot duce două paralele la aceeași dreaptă printr-un punct. 4) Se folosește proprietatea diagonalelor unui paralelogram. 5) a) paralele; b) necoplanare; c) necoplanare; d) paralele; e) necoplanare; f) paralele; g) paralele; h) concurente; i) concurente. 6) a) $BENM$ dreptunghi și concluzia; b) AD și MN sunt paralele și congruente, $AMND$ paralelogram și concluzia; c) $MP \parallel AC$ (linie mijlocie) și $AC \parallel DF$. 7) a) necoplanare, concurente, necoplanare, necoplanare, paralele, paralele; b) folosind proprietatea liniei mijlocii în triunghi se demonstrează că laturile opuse sunt paralele; c) MN este jumătate din AC și NP este jumătate din BD , $MNPQ$ romb și concluzia. 8) a) Ambele sunt paralele cu linia mijlocie; b) AB și CD sunt paralele, deci coplanare, așadar și AD și BC sunt coplanare. Cum $ABCD$ (după îndoire) este un trapez, concluzia. 9) $AB \parallel CD$ implică faptul că cele patru puncte sunt coplanare, și se verifică proprietatea paralelogramului (laturi opuse paralele și congruente). 10) a) tranzitivitate; b) se demonstrează că $CDFE$ este paralelogram; c) MN linie mijlocie în $\triangle BDF$, $MN \parallel DF$, tranzitivitate și concluzia. 11) a) $EF \parallel CD \parallel AB$, 0° ; b) $AB \parallel CD$, 90° ; c) $FC \parallel ED$, 60° ; d) $BC \parallel AD$, triunghiul EDA este echilateral, 60° . 12) a) 90° ; b) 45° ; c) 0° ; d) 90° ; e) 90° ; f) 60° . 13) a) $DC \parallel AB$, 60° ; b) 60° (triunghi echilateral); c) 0° , dreptele sunt paralele; d) 90° ; e) 90° , se demonstrează că $\triangle SAC$ este dreptunghic; f) $\triangle SAC$ isoscel, SO mediană și înălțime, 90° . 14) $MN \parallel AC$ (linie mijlocie), 0° , 60° , 60° . 15) $MP \parallel AC$, $NQ \parallel BD$ și concluzia. 16) a) $DD' \parallel BB'$, $\angle(CM, DD') = \angle CMB = 45^\circ$; b) $D'C' \parallel AB$, $\angle(AM, D'C') = \angle MAB$, $\text{tg } MAB = \frac{MB}{AB} = \frac{2}{3}$.

pg. 131–132. 1) a) Inclusă în (ABC) , (ABB') ; secantă la (BCC') , (ADD') ; paralelă cu (DCC') , $(A'B'C')$; b) Inclusă, secantă, paralelă, paralelă, secantă. 2) a) paralelă; b) inclusă; c) secantă; d) secantă. 3) a) $AD, AA', DD', A'D', AD', A'D'$; b) CB, DA , etc; c) $A'B', B'C, CD, A'D, A'C, B'D$. 4) a) paralelă; b) paralelă; c) secantă – folosind reciproca teoremei lui Thales. 5) a) $CD \parallel AB$, $AB \subset \alpha$; b) nu; d) $DN \subset (DAB)$, $(DAB) \cap \alpha = AB$, deci $E \in AB$. 6) a) $FE \parallel AB$, $AB \subset (ABC)$; b) $AB \parallel CD$, $CD \subset (CDE)$; c) $O_1 \in AC$, $AC \subset (ACE)$, $O_2 \in AE$, $AE \subset (ACE)$ și concluzia; d) $O_1 O_2$ linie mijlocie în $\triangle BAF$, $O_1 O_2 \parallel FD$ și concluzia. 7) $AB \parallel \alpha$, $AB \subset (NAB)$, $(NAB) \cap \alpha = EF$, deci $AB \parallel EF$; idem $AB \parallel CD$ și concluzia; $MN \parallel EC$. 8) a) proprietatea liniei mijlocii; b) în triunghiul SAC , dreptele NP și NR sunt diferite și $NP \parallel AC$, deci NR se intersectează cu AC și concluzia. 9) FO este linie mijlocie în triunghiul ACE , unde O este intersecția diagonalelor paralelogramului, și concluzia. 10) a) $BG_1 \cap DG_2 \cap AC$ în mijlocul segmentului AC și concluzia; b) reciproca teoremei lui Thales, $G_1 G_2 \parallel MN$ și concluzia; c) Se folosește punctul anterior. 13) $CD \parallel FG$ și $DE \parallel GH$ (paginile sunt dreptunghiuri). 15) a) NP dreapta comună; b) trei puncte comune (N, P și R); c) Se aplică proprietatea liniei mijlocii în triunghi. 17) a) $AB \parallel DE$ și $BB' \parallel EE'$; b) $BC \parallel AD$ și $CC' \parallel DD'$; c) $BD \parallel AE$ și $DD' \parallel AA'$; d) Dreapta de intersecție este determinată de centrele celor două baze; e) $BB' \parallel EE'$ și se aplică teorema acoperișului. 18) a) $CC' \parallel (ABB'A')$ și $(ABB') \cap (MCC') = MN$, deci $MN \parallel CC'$; b) Bazele prisme sunt paralele și sunt tăiate de planul (MCC') . 19) Punctul V aparține intersecției și fie d dreapta de intersecție a celor două plane, $V \in d$; $AD \parallel BC$, $AD \subset (VAD)$, $BC \subset (VBC)$ și, aplicând teorema acoperișului, $d \parallel AD$. 20) a) $MN \parallel B'D' \parallel BD$ și $NP \parallel AC$ (linii mijlocii) și concluzia; b) unghiuri cu laturi paralele (diagonalele bazei sunt perpendiculare). 22) a) Se folosește teorema fierăstrăului ținând cont de faptul că fețele laterale opuse sunt paralele.

pg. 137. 1) Idem demonstrația primei probleme rezolvate din lecție. 2) Secțiunea este pătrat congruent cu pătratul $ABCD$. 3) a) Se demonstrează că $AB \parallel A'B'$ și $BC \parallel B'C'$; b) Secțiunea prisme cu planul $(A'B'C')$ este pătratul $A'B'C'D'$ și $AB = AA' = 10$ cm. 4) a) $O_1 O_2 \parallel AC \parallel O_3 O_4$; b) $O_2 O_3 \parallel BD$ și $O_1 O_2 \parallel AC$; c) $MNPR$ este dreptunghi, O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt mijloacele laturilor lui, raportul ariilor este $1/2$. 5) a) Idem prima problemă rezolvată din lecție; b) Dacă $(EFG) \parallel (BCC')$. 6) Nu, bazele nu sunt figuri asemenea; doar cu rigla se constată că muchiile laterale ale desenului nu se intersectează. 9) Două trunchiuri de piramidă. 10) Se demonstrează (din rapoarte) că muchia laterală a piramidei din care provine trunchiul are lungimea de 9 cm. 11) $\frac{81\pi}{4}$ cm². 12) 20 cm. 13) Oricare două muchii laterale se intersectează în vârful piramidei din care provine trunchiul. Două drepte concurente determină un plan. 14) 11,25 cm. 15) 12,5 cm. 16) $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$, $\frac{P_{MNP}}{P_{BCD}} = \frac{2}{5}$, $\frac{A_{MNP}}{A_{BCD}} = \frac{4}{25}$. 17) $l = 8$ cm, $m_{tr} = 5$ cm.

pg. 138–139. Test de autoevaluare. 1) c). 2) b). 3) b). 4) a). 5) d). 7) $MN \parallel AB$ (linie mijlocie), $AB \subset (ABC)$. 8) $MN \parallel AB \parallel CD$, $NO \parallel VD$ etc. 9) $MNPR$ este pătrat, raportul laturilor celor două pătrate este $1/2$, deci raportul ariilor este $1/4$. **Consolidare și aprofundare.** 1) a) paralelă, secantă, paralelă; b) P este pe intersecția planelor (ABC) și α , deci pe CD ; $DP = AB$ și concluzia. 2) a) 90° ; b) 30° ; c) 0° ; d) 60° ; e) 90° ; f) 60° . 3) a) $EF \parallel A'C'$ și AC și concluzia; b) $1/2$; c) $BD \parallel B'D' \parallel EG$, unde G este mijlocul segmentului $A'B'$, $\angle(AE, BD) = \angle AEG$; în triunghiul isoscel AEG , $AE = AG = 2\sqrt{5}$, $EG = 2\sqrt{2}$, înălțimea $AH = 3\sqrt{2}$, $\sin AEG = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; d) $AG \parallel DF$ și se folosește același triunghi, $\sin EAG = \frac{3}{5}$. 4) a) Aplicând reciproca teoremei lui Thales, $EF \parallel CD$, $AM \perp CD$ și concluzia; b) Trece prin A și este paralelă cu CD și EF . 5) a) $ED \parallel B'C$; b) Nu, dreptele AE și $A'B'$ se intersectează. 6) $O_1 O_2$ și $O_2 O_3$ sunt paralele cu diagonalele bazei. 7) a) $BC \parallel AD$, $\triangle SAD$ dreptunghic isoscel, $\angle SAD = 45^\circ$; b) Reciproca teoremei lui Thales, $MN \parallel AC$ și concluzia; c) Pătratul de secțiune are latura o treime din AB , $A = 16$ cm². 8) a) VO este mediană și înălțime în triunghiul isoscel

$\triangle VAC$; **b)** Construim prin O paralela $MN \parallel AB$, $M \in AD$ și $N \in BC$, demonstrăm că $VM \equiv VN$ și $MO \equiv ON$ deci VO este mediană și în $\triangle VMN$ isoscel, $VO \perp MN$, $\angle(VO, AB) = 90^\circ$

pg. 142–143. 1) Nu neapărat; nu este suficient ca o dreaptă să fie perpendiculară pe o singură dreaptă dintr-un plan pentru a fi perpendiculară pe plan. **2) a)** EA, FB, GC, HD ; **b)** AB, DC, EF, GH ; **c)** AD, BC, EH, FG . **3) a)** $A'A \perp AB$, $A'A \perp AD$, $AB, AD \subset (ABC)$, AB și AD concurente în A ; **b)** $BD \subset (ABC)$ și $A'A \perp (ABC)$; **c)** se aplică teorema lui Pitagora în $\triangle A'AB$; $A'A \perp (ABC)$, $AC \subset (ABC)$, deci $A'A \perp AC$ și teorema lui Pitagora în $\triangle A'AC$. **4) a)** oblică; **b)** Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC , 20 cm. **5) a)** $MA \perp (ABC)$, $AD \subset (ABC)$, 90° ; nu contează poziția lui D pe BC ; **b)** $MA \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$, de unde concluzia. **6) a)** $EA \perp AB$, $AB \parallel DC$ și concluzia; **b)** BA este perpendiculară pe dreptele concurente AE și AD ; **c)** $CD \parallel BA$, deci $CD \perp (EAB)$ și $ED \subset (EAD)$. **7) a)** congruență de triunghiuri; **b)** $BC \subset (ABC)$ și $AD \perp (ABC)$; **c)** $BC \perp AE$ și $BC \perp AD$ etc. **8)** $CA \perp AB$, $CA \perp MB$ pentru că $BM \perp (ABC)$ etc. **9) a)** $BA \perp AD$ și $BA \perp AM$; **b)** $CB \perp BA$ și $CB \perp AM$; **c)** $DB \perp AC$, $DB \perp MA$; **d)** $NO \parallel MA$ și concluzia. **10)** $AM \perp CD$, $BM \perp CD$ (mediane și înălțimi în triunghiuri isoscele). **11) a)** $BA \perp (AMC)$; **b)** $6\sqrt{2}$ cm; **c)** $MB = 6\sqrt{2}$ cm, $MC = BC = 10$ cm. **12) a)** $DB = DC$ (calcul sau congruență de triunghiuri); **b)** $AM = 3\sqrt{3}$ cm, $DM = 6$ cm. **13) a)** 8 cm, $4\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm; **b)** $DE \perp MA$ deci DE trebuie să fie perpendiculară e AC , $\triangle AOD$ echilateral, E mijlocul lui AO . **14) a)** $BF = 6\sqrt{3}$ cm = MF , aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle MAF$; **b)** $6\sqrt{5}$ cm, $6\sqrt{6}$ cm; **c)** $DB \perp AB$, $MA \perp DB$.

pg. 147. 1) a) $A'D \perp B'C'$ (mediană și înălțime în triunghi echilateral), $BB' \perp (A'B'C')$ deci $BB' \perp A'D$ și concluzia; **b)** $d(A', (BCC')) = A'D = 3\sqrt{3}$ cm; **c)** teorema lui Pitagora în $\triangle AA'D$, $AA' = 9$ cm; **d)** 3 cm, 6 cm. **2) a)** congruența triunghiurilor dreptunghice VOA , VOB și VOC ; **b)** $AO = 4\sqrt{3}$ cm, $VO = 8$ cm; **c)** $MM' \perp (ABC)$, $MM' \parallel VO$ și se aplică teorema fundamentală a asemănării, 2 cm; **d)** piramidă și trunchi de piramidă, 6 cm și 2 cm. **3) a)** Analog problema rezolvată din lecție; **b)** Teorema lui Pitagora în $\triangle SOA$, $SO = 14$ cm; **c)** 10 cm, $5\sqrt{6}$ cm, 4 cm. **4)** $4\sqrt{6}$ cm; 16π cm², $1,6\sqrt{6}$ cm. **5)** 12 cm, 15 cm. **6)** $AA' \parallel BB'$, $AD \parallel BC$ și concluzia; $BA \perp AD$, $BA \perp AA'$, $BA \perp (AA'D)$, 11 cm. **7)** 8, 8, $4\sqrt{2}$, 8, 8, 8, $8\sqrt{2}$, 8, 8, 8, 0. **8)** 15 cm, 6 cm. **9)** latura secțiunii este linie mijlocie în fața laterală a trunchiului (trapez); da, relația se păstrează. **10)** Dacă A și B sunt două puncte de pe dreaptă și A' și B' picioarele perpendicularelor acestor puncte pe plan, se demonstrează că $ABB'A'$ este dreptunghi. **11)** $AB \parallel \beta$ și ideea problemei anterioare.

pg. 150. 1) $CO \perp (AOB)$, $CO \subset (BOC)$ etc. **2)** $A'A \perp (ABC)$, $A'A \subset (A'AB)$; **b)** $A'M \subset (A'AM)$ și $A'M \perp (BB'C')$ punctul anterior; **c)** analog punctul anterior. **3)** $AB \perp (SMC)$, $AB \subset (SAB)$; se demonstrează că înălțimea piramidei este inclusă în planul (SMC) ; $AB \perp (SMC)$ și $AB \subset (NAB)$. **4)** $(ABC) \cap (EAB) = AB$, dacă $EF \perp AB$, $F \in AB$, $EF \perp (ABC)$, $d(E, (ABC)) = EF = 12$ cm; analog, CB reprezintă distanța de la C la (EAB) , 10 cm. **5)** Se demonstrează că este un dreptunghi cu laturile congruente. **6)** dreptunghiuri în toate situațiile; **a)** și **b)** două prisme triunghiulare drepte; **c)** două paralelipipede dreptunghice; **d)** două prisme drepte cu baza trapez. **7)** dreptunghiuri în toate situațiile; **a)** o prismă triunghiulară dreaptă și o prismă pentagonală dreaptă; **b)** două prisme patrulaterale drepte; **c)** două prisme triunghiulare și una patrulateră. **8) a)** $SO \perp (ABC)$, $SO \subset (SAC)$; **b)** $AC \perp (SBD)$, $AC \subset (SAC)$; **c)** $BC \perp (SOM)$, $BC \subset (SBC)$; **d)** $(SOM) \cap (SBC) = SM$, plane perpendiculare, construim perpendiculara din O pe SM ; **9)** $r = 3$ cm, $h = 3\sqrt{3}$ cm. **10)** 4 cm, 8 cm (folosim un diametru perpendicular pe diametrul primei secțiuni). **11)** Dreptunghiuri în care una dintre laturi este muchia laterală, iar celelalte diagonale ale bazelor (care sunt congruente). **12)** Aria secțiunii diagonale este $a^2\sqrt{2}$, iar aria unei fețe este a^2 . **13)** Lungimea segmentului determinat de o secțiune axială pe bază este mai mică decât lungimea diagonalei bazei.

pg. 151. Test de autoevaluare. 1) c). 2) b). 3) b). 4) a). 5) c). 6) $DA \perp AB$, $DA \perp MB$ și finalizare. **7)** $MB \perp (ABC)$, $MB \subset (MBD)$ și finalizare. **8)** $MA = 20$ cm și $MC = 15$ cm. **9)** Se demonstrează că $CM \perp (ABE)$ și finalizarea. **Consolidare și aprofundare. 1)** $AB \perp EC$, $AB \perp ED$ și concluzia. **2) a)** $BC \perp AM$, $BC \perp MN$ și concluzia; **b)** congruență de triunghiuri; **c)** $AM = 4\sqrt{2}$, $MN = NB = 4\sqrt{2}$, $BN = AN = 8 = AB$; **d)** BP și CP înălțimi în triunghiurile ABN și ACN etc. **3) a)** $AM \parallel CN$ și concluzia; **b)** $BD \perp AC$, $BD \perp AM$ și concluzia; **c)** Se demonstrează că $MB \equiv MD$, $NB \equiv ND$ și concluzia; **d)** $BN = DN = 10\sqrt{2} = BD$; **e)** Se folosește trapezul dreptunghic $AMNC$, $MN = 15$ cm. **4) a)** $AD = 4\sqrt{5}$ cm; **b)** Se calculează AB și se verifică reciproca teoremei lui Pitagora; **c)** Cu reciproca teoremei lui Pitagora sau se demonstrează că $CB \perp (ABD)$. **5)** 2 cm. **6) a)** $5\sqrt{5}$ cm; **b)** 10 cm; **c)** $BC \perp SM$, $BC \perp OM$, deci $BC \perp (SOM)$ și $BC \subset (SBC)$; **d)** $OP \perp SM$, $OP \perp BC$ și concluzia; **e)** $2, 5\sqrt{3}$ cm.

pg. 154. 4) Medianele triunghiului ABC se proiectează în medianele triunghiului $A'B'C'$. **5)** O ; O ; M ; OA ; O ; OM ; VO ; AO ; VM . **6)** O ; O ; M ; OA ; O ; OM ; VO ; AO ; VM . **7) a)** AB ; **b)** CB ; **c)** AM ; **d)** AB ; **e)** MM' ; **f)** AM' . **8) a)** $AD, A'D', BC', AA'$; **b)** $BD, B'D', AD', A'B$; **c)** OO', OD', OB, OD . **9) a)** 6 cm; **b)** $6\sqrt{2}$ cm; **c)** $6\sqrt{2}$ cm; **d)** $6\sqrt{2}$ cm; **e)** $3\sqrt{5}$ cm; **f)** $6\sqrt{2}$ cm. **10)** Toate sunt egale cu $4\sqrt{2}$ cm. **11) a)** dacă $(ABC) \perp \alpha$; **b)** $A'B = A'C = 5\sqrt{2}$ cm, $AA' = 5\sqrt{2}$ cm; **c)** Nu, triunghiul $A'BC$ ar fi echilateral, deci $A'B = AB$, contradicție. **12)** Sunt paralele sau coincid (când planul determinat de ele este perpendicular pe planul dat) sau se reduc la două puncte la distanță egală cu distanța dintre dreptele date (când dreptele sunt perpendiculare pe plan). **13)** $ABB'A'$ dreptunghi, $AB \perp BB'$, $AB \perp BC$; **b)** $A'B' \parallel AB$, deci $A'B' \perp (BCC')$. **15) a)** pătrat; **b)** 64 cm².

pg. 157. 1) a) paralelă cu planul; b) secantă cu planul; c) secantă și perpendiculară pe plan. 2) 60° . 3) a) 12 cm; b) $6\sqrt{3}$ cm; c) $6\sqrt{2}$ cm; d) 6 cm. 4) a) 9 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm; c) $5\sqrt{2}$ cm; 16 cm. 5) $\frac{3}{4}$. 6) $9/16$. 7) a) $\angle SAO$; b) $\angle ASO$; c) $\angle SMO$; d) $\angle BSM$. 8) a) $\angle SAO$; b) $\angle SMO$; c) $\angle BSM$. 9) 45° . 10) a) $\angle D'BD = 45^\circ$; b) $\angle D'BC' = 30^\circ$; c) $\operatorname{tg} D'AD = \sqrt{2}$; d) $D'O = 4\sqrt{10}$ cm. 11) a) $\angle C'AC = 60^\circ$; b) $\operatorname{tg} CMC' = 2\sqrt{3}$; c) $AM \perp BC$, $AM \perp BB'$ etc.; d) $MC' = 4\sqrt{13}$ cm; e) $\sin AC'M = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

pg. 160–161. 1) nu; $AO \perp d$ și $BO \perp d$. 2) a) $\angle FAD$, AB muchia diedrului, $FA \perp AB$, $FA \subset (ABEF)$ și $DA \perp AB$, $DA \subset (ABCD)$; $\angle EBC$ etc.; b) $10\sqrt{2}$ cm; c) 60° ($\triangle ACE$ echilateral). 3) a) BB' muchia diedrului, $AB \perp BB'$, $AB \subset (ABB'A')$, $CB \perp BB'$, $CB \subset (BCC'B')$; b) $A'B'$ muchia, $AA' \perp A'B'$, $D'A' \perp A'B'$ etc.; c) BC muchia, $A'B \perp BC$, $AB \perp BC$ etc. 4) a) AB este muchia diedrului, $CM \perp AB$, $CM \subset (ABC)$, $DM \perp AB$, $DM \subset (ABD)$; b) $AN \perp CD$, $BN \perp CD$ etc. 5) a) BC muchia, VM și OM perpendicularele etc.; b) VB muchia, se demonstrează că $VB \perp (EAC)$, deci $CE \perp VB$ etc.; c) VO muchia, AO și BO perpendicularele etc. 6) a) AA' muchia, $B'A'$ și $C'A'$ perpendicularele etc.; b) $\triangle AA'BC$ isoscel, deci $A'M \perp BC$, $AM \perp BC$, BC muchia etc.; c) NP muchia, se demonstrează că $A'R$, $AR \perp NP$ etc. 7) Dacă $C' = pr_{masd} C$, se demonstrează că $AB \perp (BCC')$, deci $C'B \perp AB$, $CB \perp AB$, $\angle CBC' = 30^\circ$. 8) a) BD perpendiculară pe AD și AM etc.; b) i) $(MAB) \cap (MAC) = AM$, $BA \perp AM$, $BA \subset (MAB)$, $CA \perp AM$, $CA \subset (MAC)$, $\angle((MAB), (MAC)) = \angle BAC = 60^\circ$; ii) $\angle((MBC), (ABC)) = \angle MDA$, $\triangle MAD$ dreptunghic isoscel, 45° . 9) Se demonstrează că $\angle((DAC), (BAC)) = \angle DOB$, O centrul pătratului; a) 4 cm; b) $4\sqrt{2}$ cm. 10) $\angle((ABD), (ACD)) = \angle BDC = 60^\circ$. 11) a) $\angle EBA = 60^\circ$; b) $5\sqrt{5}$ cm; c) $\sqrt{3}/2$; d) 50 cm^2 . 12) a) $\angle ABC = 60^\circ$; b) $MB \subset (MAB)$, $MB \perp (ABC)$; c) $CA \perp AB$, MB etc.; d) $\angle MAB = 45^\circ$.

pg. 164–165. 2) a) $B'A$, $B'O$, O centrul pătratului; construim $BN \perp AM$, $B'N \perp AM$; b) $B'A = 8\sqrt{2}$ cm, $B'O = 4\sqrt{6}$ cm, $AM = 4\sqrt{5}$ cm, $BN = 8\sqrt{5}/5$ cm, $B'N = 8\sqrt{30}/5$. 3) a) congruență de triunghiuri; b) mediană în triunghi isoscel sau $T_3 \perp$; c) $DM = 12$ cm; d) dacă $AE \perp DM$, $d(A, (DBC)) = AE = 8\sqrt{5}/3$ cm cu reciproca a doua; e) $\sin DMA = 2/3$. 4) a) cu $T_3 \perp$, $A'M \perp BC$, $A'M = 10$ cm; b) cu $T_3 \perp$, $C'M \perp AM$, $C'M = 5\sqrt{2}$ cm; c) Dacă $AN \perp A'M$, $d(A, (A'BC)) = AN = 5\sqrt{3}/2$ (cu reciproca a doua); 5) a) Se aplică $T_3 \perp$; b) Construim $AN \perp BD$ etc. 6) Se aplică prima reciprocă. 7) Dacă O este intersecția diagonalelor, $AO \perp CD$, aplicând teorema obținem $MO \perp BD$, $3\sqrt{5}$ cm; construim $AN \perp BC$ etc. și ținem cont că $\triangle ABC$ este echilateral, $3\sqrt{7}$ cm. 8) a) $A'B = 6\sqrt{2}$ cm; b) $A'D = 2\sqrt{10}$ cm; c) Construim $AE \perp BD$ etc., $A'E = 6$ cm; d) Construim $B'F \perp BC'$ etc $A'F = 12\sqrt{10}/5$. 9) a) Construim $OD \perp AB$, $d(C, AB) = CD = 6\sqrt{2}$ cm; construim $OE \perp CD$, $d(O, (ABC)) = OE = 3\sqrt{2}$ cm; b) $OA \perp d$, $d(C, d) = CA = 6\sqrt{5}$ cm. 10) Fie $ME \perp AB$, $E \in AB$, $d(N, AB) = NE = 4\sqrt{2}$ cm; fie $MF \perp AD$, $F \in AD$, $d(N, AD) = NF = 5$ cm. 11) cu reciproca 1 se demonstrează că $BF \perp AC$ etc. 12) a) dacă $AA' \perp BC$, $A' \in BC$, $d(M, BC) = MA' = 12$ cm; b) $AC \perp CD$, $d(M, CD) = MC = 6\sqrt{13}$ cm; c) 12 cm; d) $6\sqrt{5}$ cm; e) Se demonstrează că planele sunt paralele, $d((MAB), (NDE)) = AE = 12\sqrt{3}$ cm. 13) a) 10 cm; b) $5\sqrt{3}/2$ cm.

pg. 166. RECAPITULARE. 8) a) 6 cm; b) $4\sqrt{6}/3$; c) $\sqrt{11}/6$. 11) b) 9 cm; c) $1/3$; d) $12\sqrt{34}/5$; e) 7,2 cm; g) $6\sqrt{26}/13$; 12) $\sqrt{2}/2$.

pg. 167–168. Test de autoevaluare. 1) c); 2) b); 3) d); 4) c); 5) a); 6) Teorema lui Pitagora în $\triangle BB'M$; 7) $\cos MBB' = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 8) $\sin A'MB' = 4/5$; 9) $NP \parallel BC'$, $NO \parallel AB$ etc. Test de evaluare. 1) c); 2) b); 3) d); 4) b); 5) b); 6) Teorema lui Pitagora în $\triangle SAO$; 7) Se aplică reciproca teoremei lui Thales: $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$ etc.; 8) $14/3$ cm; 9) $7/4$. Consolidare și aprofundare. 1. a) $2\sqrt{13}$ cm; b) $3/2$; c) 48 cm^2 . 2. congruența triunghiurilor dreptunghice POA și POB. 4. a) $AM \perp (MEF)$ și $AM \perp (ABC)$; b) $d((MEF), (ABC)) = AM = 5$ cm, folosind demonstrația punctului anterior; $d(B, (MEF)) = d(A, (MEF))$; c) $BE = 5$ cm = $d(B, (MEF))$, deci $BE \perp (MEF)$, $BE \parallel AM$ și concluzia. 5. a) $1/2$; b) $8\sqrt{2}$, $8\sqrt{5}$. 6. a) $2\sqrt{7}/7$; b) $\sqrt{3}/2$; c) $4\sqrt{3}$ cm, 8 cm. 7. a) 4 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm; c) 60° ; d) 2; e) $8\sqrt{5}/5$. 8. b) 90° ; c) $6\sqrt{2}$ cm; d) 45° .

pg. 174. 1) a) 12 cm, $6\sqrt{7}$ cm, $12\sqrt{3}$ cm; b) $\sin VAO = \sqrt{21}/7$; c) $\operatorname{tg} BVM = \sqrt{3}/2$; d) $3\sqrt{3}$ cm; e) $9\sqrt{3}$ cm; f) i. se aplică reciproca teoremei lui Thales; ii. $3\sqrt{3}$ cm; iii. $4\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{3}$ cm. 2) a) 60° ; b) 45° ; c) $3\sqrt{2}$ cm; d) $\frac{6\sqrt{78}}{13}$ cm; e) $\frac{\sqrt{42}}{7}$. 3) a) 12 cm; b) $6\sqrt{7}$ cm; c) $6\sqrt{6}$ cm; d) 60° ; e) $3\sqrt{6}$ cm; f) $\frac{6\sqrt{42}}{7}$ cm; g) $\sqrt{6}$; h) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$; i) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$. 4) a) $h = 12$ cm, $a_p = 6\sqrt{5}$ cm, $m = 6\sqrt{6}$ cm; b) 2; c) 45° . 5) a) 6 cm, $3\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm; b) $\sqrt{2}$; c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

pg. 178–180. 1) a) $10\sqrt{3}$ cm; b) 600 dm^2 ; c) 125 m^3 ; d) 6 dm; e) 6 dm; f) 64 dm^3 . 2) a) 486 cm^2 ; b) 9 cm; c) 728 cm^3 . 3) a) $6\sqrt{2}$ cm; b) $6\sqrt{6}$ cm; c) 288 cm^2 , 432 cm^2 ; d) $432\sqrt{2} \text{ cm}^3$. 4) a) 8 cm; b) $8\sqrt{3}$ cm; c) 256 cm^2 , 384 cm^2 ; d) 512 cm^3 . 5) a) 8 cuburi; b) 480 g. 6) da. 7) 40,625 kg. 8) 96 dm^2 , 63 dm^3 . 9) a) 13 cm; b) 48 cm; c) 340 cm^2 ; d) 60 cm^3 ; e) 5 cm. 10) a) $\sqrt{109}$ cm; b) 144 cm^3 ; c) 84 cm^2 ; d) 180 cm^2 . 11) 250 cm^2 , 250 cm^3 . 12) a) de 8 ori; b) de 2 ori. 13) $0,9 \text{ m}^3$. 14) 7,18%. 15) a) 7,5 cm; b) 5 cm. 16) $12\sqrt{2}$ cm, $72(2 + 3\sqrt{3})$ cm, $432\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 17) 36 hl. 18) a) $0,948416 \text{ m}^3$; b) aproximativ 95 g. 19) 768 cm^2 , 1152 cm^3 . 20) a) 80 cm^3 ; b) 8 cm; c) 104 cm ; d) 80 cm^2 ; e) 15 cm; f) 6 cm; g) 20 m; h) 10 cm. 21) $18(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $54\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 22) 12 cm, $(180 + \frac{25\sqrt{3}}{2}) \text{ cm}^2$, $75\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 23) $250\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 24) $(36 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. 25) $(96 + 16\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $32\sqrt{6} \text{ cm}^3$. 26) a) 68 m; b) 20; 27) $a - 4$, $b - 3$, $c - 1$, $d - 5$, $e - 2$. 28) 192 cm^2 , 264 cm^2 . 29) 294 cm^2 . 30) $62,56 \text{ m}^2$. 31) 320 cm^2 , 384 cm^3 . 32) $64(\frac{2\sqrt{6}}{3} + 1) \text{ cm}^2$, $\frac{256\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$. 33) a) $144\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) $4\sqrt{6}$ cm; c) 156 cm; d) 480 cm^2 ; e) 20 cm; f) 4 cm; g) $4\sqrt{3}$ cm.

34) $768(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $6144\sqrt{3} \text{ cm}^3$, $16\sqrt{5} \text{ cm}$. 35) $V = 1350\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 2295 \text{ cm}^3$, densitatea $2,7 \text{ g/cm}^3$. 36) 5 cm , $75(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $\frac{375\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$.

pg. 184–187. 1) a) $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$; b) 63 cm^2 ; c) $100\sqrt{3} \text{ cm}^3$; d) $36(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$; e) 80 cm^2 ; f) 3 cm ; g) 8 cm ; h) 16 cm^3 ; i) $\frac{5\sqrt{57}}{4} \text{ cm}$. 2) $32\sqrt{2} \text{ cm}^2$, $16(2\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2$, $\frac{32\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3$. 3) 2304 cm^2 , 4096 cm^3 . 4) $270\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $300\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 5) a) 16 cm ; b) $8\sqrt{3} \text{ cm}$; c) $128\sqrt{7} \text{ cm}^2$; d) $\frac{1024\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. 6) $4\sqrt{6} \text{ cm}$, $144\sqrt{2} \text{ cm}^3$. 7) $\frac{81(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4} \text{ cm}^2$, $\frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$. 8) $324(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $648\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 9) 24 cm , $144(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $192\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 10) 36 cm , $972\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $1944\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 11) a) $6\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $6\sqrt{3} \text{ cm}$; c) $72\sqrt{7} \text{ cm}^2$; d) $144\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 12) $100(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $\frac{500\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$. 13) a) 270 cm^2 ; b) da, $V = 201,6 \text{ cm}^3$. 14) a) 222 bomboane; b) 65 cm^2 la o bomboană; c) 22 ambalaje pline și rămân 2 bomboane pentru încă un ambalaj incomplet. 15) a) sunt necesari 150 m^2 ; b) 153 m^3 . 16) a) 336 g ; b) 672 g vopsea. 17) a) $6\sqrt{3} \text{ cm}$; b) 576 cm^2 ; c) 936 cm^2 ; d) $936\sqrt{3} \text{ cm}^3$; e) $9\sqrt{3} \text{ cm}$, $972\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 18) a) 4 cm , $12\sqrt{2} \text{ cm}$, $4\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $\frac{2432}{3} \text{ cm}^3$; c) $288\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 19) a) 5 cm , 4 cm ; b) $0,336 \text{ l}$; c) 384 cm^2 , 384 cm^3 . 20) a) 8 cm ; b) 560 cm^2 ; c) 1024 cm^2 ; d) $\frac{16000}{9} \text{ cm}^3$. 21) 3 cm , $\sqrt{21} \text{ cm}$, $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $99\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $63\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 22) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$, $\frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$, $40\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $92\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\frac{152\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. 23) a) 6 cm ; b) $\sqrt{39} \text{ cm}$; c) $27\sqrt{39} \text{ cm}^2$, $(27\sqrt{39} + 45\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. 24) a) 6 cm , $\frac{\sqrt{57}}{2} \text{ cm}$; b) $\frac{297\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$, $\frac{171\sqrt{15}}{8} \text{ cm}^3$; c) $81\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\frac{361\sqrt{15}}{24} \text{ cm}^3$. 25) $\frac{405\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$, $\frac{567\sqrt{2}}{4} \text{ cm}^3$. 26) a) $64\sqrt{10} \text{ cm}^2$, 256 cm^3 ; b) 6 cm . 27) a) 6 cm ; b) $240\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $912\sqrt{3} \text{ cm}^3$; c) $432\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $1296\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 28) a) $\frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ cm}$, 3 cm ; b) $\frac{81\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$, $\frac{189\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$; c) $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $108\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 29) a) 1500 cm^2 , $3000\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) 10 cm . 30) $70,37\%$.

pg. 191–193. 1) a) $96\pi \text{ cm}^2$; b) $168\pi \text{ cm}^2$; c) $288\pi \text{ cm}^3$; d) $4\sqrt{13} \text{ cm}$. 2) 120 cm^2 , $720\pi \text{ cm}^3$, $408\pi \text{ cm}^2$. 3) a) 6 cm ; b) $36\pi \text{ cm}^2$; c) $168\pi \text{ cm}^2$; d) $288\pi \text{ cm}^3$. 4) $320\pi \text{ cm}^2$. 5) c) $40\pi \text{ cm}^2$; $90\pi \text{ cm}^2$; $100\pi \text{ cm}^3$. 6) $899,25 \text{ cm}^2$, $1905,75 \text{ cm}^3$ sau 803 cm^2 , $1270,5 \text{ cm}^3$. 7) $216\pi \text{ cm}^2$, $432\pi \text{ cm}^3$. 8) $54\pi^2 \text{ cm}^3$ sau $533,38 \text{ cm}^3$. 9) 1232 cm^3 , $1971,2 \text{ g}$. 10) $V = 2,07 \text{ l}$. 12) 4 cm , $24\pi \text{ cm}^2$, $36\pi \text{ cm}^3$. 13) $(720\sqrt{3} + 108)\pi \text{ cm}^2$, $648\pi \text{ cm}^3$. 14) $16\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$, $16(\sqrt{2} + 1)\pi \text{ cm}^2$, $64\pi \text{ cm}^3$. 16) $108\pi \text{ cm}^2$, $216\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 17) 5 cm , $36\pi \text{ cm}^3$. 18) 8 cm , 12 cm , $4\sqrt{5} \text{ cm}$, $256\pi\sqrt{5} \text{ cm}^3$. 19) $50\pi \text{ cm}^2$, $75\pi \text{ cm}^2$, $125\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 20) $32\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$, $32\pi(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$, $128\pi \text{ cm}^3$. 21) a) 6 cm ; b) 18 cm ; c) $12\sqrt{2} \text{ cm}$; d) $108\pi \text{ cm}^2$; e) $144\pi \text{ cm}^2$; f) $432\pi\sqrt{2} \text{ cm}^3$; g) $72\sqrt{2} \text{ cm}^2$; h) $\frac{1}{3}$; i) $4\sqrt{2} \text{ cm}$. 22) $G = 42 \text{ cm}$, $R = 28 \text{ cm}$, $h = 14\sqrt{5} \text{ cm}$; aproximativ $77,1354$ litri de apă. 23) a) $52\pi \text{ cm}^3$; b) $40\pi \text{ cm}^2$; c) $80\pi \text{ cm}^2$; d) 24 cm^2 ; e) $\frac{3}{4}$. 24) a) 12 cm ; b) $532\pi \text{ cm}^3$; c) $266\pi \text{ cm}^2$; d) $\frac{5}{13}$. 25) $154\pi \text{ cm}^2$, $172\pi \text{ cm}^3$. 26) b) $180\pi \text{ cm}^2$; c) $768\pi \text{ cm}^3$. 27) 15 cm , $238\pi \text{ cm}^2$. 28) $A_{t_{\text{con mic}}} = 144\pi \text{ cm}^2$, $A_{t_r} = 308\pi \text{ cm}^2$, $V_{\text{con mic}} = 384\pi \text{ cm}^3$, $V_{t_r} = 308\pi \text{ cm}^3$. 29) $At = (80 + 48\sqrt{10})\pi \text{ cm}^2$, $V = 448\pi \text{ cm}^3$. 30) $A = 24385,24 \text{ cm}^2$, $V = 12,08272$. 31) $16\pi \text{ cm}^3$, $416\pi \text{ cm}^3$. 32) a) $A = 1531,5\pi \approx 4813,28 \text{ cm}^2$; b) $V = 7448\pi \approx 23408 \text{ cm}^3$; c) $191945,6 \text{ g}$. 33) $150,72$. 34) $95\pi \text{ cm}^2$.

pg. 195. 1) $100\pi \text{ cm}^2$; $500\pi/3 \text{ cm}^3$. 2) 7 cm . 3) a) 6 ; b) 144π . 4) $62,5\pi/3 \text{ cm}^3$. 5) $144\pi \text{ cm}^2$. 6) 4 cm . 7) Da. 8) $\frac{64}{2} < \frac{32\pi}{3} < \frac{2 \cdot 64}{3} \Leftrightarrow 3 < \pi < 4$ adevărat. 9) într-o secundă se scurg $0,005\pi \text{ m}^3$ de apă, 120 minute. 10) 12 cm . 11) Se demonstrează că distanța de la centrul sferei la plan este distanța de la centrul sferei la centrul cercului de secțiune, $5\sqrt{3} \text{ cm}$. 12) 14 cm .

pg. 196. RECAPITULARE. 1) a) $\sqrt{109} \text{ cm}$; b) 180 cm^2 , 144 cm^3 ; c) $\frac{3}{4}$; d) $3,6 \text{ cm}$. 2) a) $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, 27 cm^3 ; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{3\sqrt{39}}{13} \text{ cm}$. 3) a) $\frac{75(4 + \sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2$, $\frac{125\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$; b) 60° ; c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{5\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$. 4) a) $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) 90° ; c) $\frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ cm}$; d) $3,6 \text{ cm}$. 5) a) $9\sqrt{39} \text{ cm}^2$, $9\sqrt{3}(1 + \sqrt{13}) \text{ cm}^2$, $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) $\frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ cm}$; c) $\frac{12}{13}$. 6) a) $432(\sqrt{7} + 1) \text{ cm}^2$, $2592\sqrt{2} \text{ cm}^3$; b) 60° ; c) 30° ; d) $\frac{18\sqrt{14}}{7} \text{ cm}$; e) $\frac{36\sqrt{14}}{7} \text{ cm}$. 7) a) $96(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $256\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) 45° ; c) $\frac{1}{4}$. 8) 10 cm , $\sqrt{103} \text{ cm}$. 9) a) 16 cm , $56\sqrt{85} \text{ cm}^2$, $(56\sqrt{85} + 400) \text{ cm}^2$, $\sqrt{85} \text{ cm}$; b) 3072 cm^3 ; c) $\frac{36}{85}$. 10) a) $6\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $(108\sqrt{3} + 162)\pi \text{ cm}^2$; c) $486\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$. 11) a) $18\pi \text{ cm}^2$; b) $27\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$; c) $10\pi \text{ cm}^2$; $19\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$.

pg. 197–198. Test de evaluare. Test 1. 1) $81\sqrt{3}$; 2) 90 ; 3) $512/3$; 4) c); 5) d); 6) b); 7) $V = 12^2 \cdot 10 = 1440 \text{ cm}^3$, $1440 \text{ cm}^3 \cdot 0,00072 \text{ kg/cm}^3 = 1,0368 \text{ kg}$; 8) apotema este $2\sqrt{34} \text{ cm}$ etc. 9) suma muchiilor este $(48 + 8\sqrt{43}) \text{ cm}$, $48 + 8\sqrt{43} > 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{43} > 13 \Leftrightarrow 172 > 169$ adevărat. Test 2. 1) 26 ; 2) 252 ; 3) 144 ; 4) d); 5) b); 6) c); 7) $5,6 \text{ m}$; 8) $V = 10,2\pi \text{ m}^3$, $V \approx 32,028 \text{ m}^3$. 9) Suprafața se aproximează la 54 m^2 , $13,5 \text{ kg}$ de vopsea.

pg. 203–206. RECAPITULARE FINALĂ. 1) a) $A = [-\frac{5}{4}; 2]$; b) $A = (-\infty; 3]$; c) $A = [4; +\infty)$; d) $A = [-\frac{9}{5}; \frac{9}{5}]$; e) $A = (-\infty; -2)$; f) $A = [-11; 1]$. 2) $A \cup B = [-5; 8]$, $A \cap C = (0; 5]$, $A \cap B = [-3; 5]$, $B \cup C = [-3; \infty)$, $B \cup D = (-\infty; 8]$, $B \cap D = [-3; 4]$, $C \cap B = (0; 8]$, $D \cup C = \mathbb{R}$. 3) a) $(-4; 6)$; b) $(0; \frac{7}{3})$; c) $(-2, (2); 1)$; d) $(-2; 4]$; e) $(-1; 1)$; f) $[-3; 2]$; g) $(-\infty; -3) \cup [-2; 2]$; h) $(-4; -1)$; i) $[-4; 6]$; j) $[-1; +\infty)$; k) $\{-2; -1; 0\}$; l) $\mathbb{Z}$; m) $(-n^2; n^2)$, $n \in \mathbb{N}$; n) $(n + 1; +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. 4) f, a, a, a, a, f, a, a, f, f, f, f. 5) a) -12 ; 0; b) 0; 0; c) 3, 0.

- 6) a) $-15x^2 + 3x$; b) $2x^2 - 17x + 6$; c) $2x^2 - 19x + 6$; d) $2x + 2$; e) $x^2 - 2x + 3$; f) $5x + 6 + x^2y^2$; g) $-8x^2 - 12x + 2$; h) $3x^2 + 7x - 2$;
i) $24 - 20x\sqrt{3} + 8x\sqrt{6}$; j) $-10x\sqrt{3}$. 7) a) $\mathbb{R}^*$, $-\frac{3}{x}$; b) $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $\frac{1}{2(x+1)}$; c) $\mathbb{R}^*$, $2x - 3$; d) $\mathbb{R} - \{0; 3\}$, $\frac{x(x+3)}{x-3}$; e) $\mathbb{R} - \{-3; -2\}$, $\frac{x-5}{x+2}$;
f) $x \in \mathbb{R} - \{1; 2\}$, $\frac{x-2}{x-1}$; g) $\mathbb{R} - \{-2; 1; 3\}$, $\frac{1}{x+2}$; h) $\mathbb{R}$, $\frac{x^2+x+4}{x^2+x+5}$; i) $\mathbb{R}$, $\frac{x^{2n}+x^n+4}{x^{2n}+x^n+5}$. 8) a) $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}; 0\}$, $\frac{1}{x}$; b) $\mathbb{R} - \{-7; 7\}$, $\frac{3x+20}{(x-7)(x+7)}$;
c) $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$, $\frac{5}{x+2}$; d) $\frac{4(x+2)}{(3x-2)(3x+2)}$; e) $\frac{x-1}{-2(x+1)}$; f) $\mathbb{R} - \{-2; 0; 2\}$, $\frac{x+2}{x}$; g) $\mathbb{R} - \{-1; -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 1\}$, $\frac{-1}{4x-1}$; h) $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $-\frac{x}{2}$.
9) a) $\mathbb{R} - \{-3; 3; 4\}$; b) $E(x) = \frac{-1}{x+3}$; c) $(-3; +\infty) - \{3; 4\}$; d) $\{-4; -2\}$. 10) a) $2\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{2}$; c) $6\sqrt{6}$. 11) 24. 12) a) $\mathbb{R} - \{-5; -1; 0; 3; 5\}$;
b) $E(x) = \frac{-x-3}{x-3}$; c) $(3; +\infty)$; d) $\{-3; 1; 2; 4; 6; 9\}$. 13) a) $-4; 4$; b) $\emptyset$; c) $0; 4$; d) $2; 6$; e) $\emptyset$; f) $-\sqrt{6}; \sqrt{6}$; g) $-4; 0$; h) $\frac{4}{3}$; i) $2; 7$;
j) $-1; \frac{4}{3}$; k) $1; 11$; l) $1; 9$; m) $\emptyset$; n) $-\sqrt{2}; \sqrt{3}$. 14) a) -2 ; b) $\emptyset$; c) $\mathbb{R}$; d) 2 ; e) -1 ; f) 1 ; g) $-0,5; 2$; h) $1; 3$; i) $1; 4$; j) $1; 5$; k) $2; 4$.
15) a) $x^2 - 2x - 8 = 0$; b) $x^2 + x\sqrt{3} - 6 = 0$; c) $x^2 + 2x\sqrt{2} - 6 = 0$. 16) a) $(3x-1)(x+1)$; b) $(9x-4)(x+1)$; c) $(2x-3)(2x-1)$; d) $(x-\sqrt{7})^2$;
e) $(x-2\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$; f) $(x-y+4)(x+y+4)$. 17) a) $x \in \mathbb{R} - \{-1; 2\}$; b) $x \in \{0; 1; 3; 4\}$. 18) a) 1 ; b) -5 . 19) a) $A(2; -15)$; b) $A(-1; 7)$.
20) a) $A(11; 14)$; b) $A(2; 3)$. 21) a) $A(5; 7)$; b) $A(4; 14)$. 22) a) $f(x) = x - 4$; b) $f(x) = 2x + 11$. 23) a) $A(5; 0), B(0; 12)$; c) 30 cm^2 ; d) $\frac{60}{13} \text{ cm}$;
e) $\frac{12}{5}$. 24) a) Aplicăm teoreme celor trei perpendiculare; b) $13,61 \text{ m}$. 25) a) La mijlocul laturii AM ; b) 3 cm . 26) $6\sqrt{3} \text{ cm}$, 144 cm^2 ,
 216 cm^2 , 216 cm^3 . 27) a) 90° ; b) 60° ; c) 45° ; d) 90° ; e) 45° ; f) 60° . 28) a) Aplicăm teoreme celor trei perpendiculare; b) $20,1 \text{ m}$.
29) a) Aplicăm teoreme celor trei perpendiculare; b) 17 m . 30) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{2}$. 31) 13 cm , 168 cm^2 , 192 cm^2 , 144 cm^3 . 32) $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$,
 $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $18\sqrt{2} \text{ cm}^3$. 33) $40\pi \text{ cm}^2$, $72\pi \text{ cm}^2$, $80\pi \text{ cm}^3$. 34) $60\pi \text{ cm}^2$, $96\pi \text{ cm}^2$, $96\pi \text{ cm}^3$. 35) a) 6 cm , 5 cm , 4 cm , $\sqrt{77} \text{ cm}$;
b) 96 cm^2 , 64 cm^3 ; c) $\frac{800}{7} \approx 114,28\%$. 36) a) 5 cm , $2\sqrt{13} \text{ cm}$; b) $45\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $36\sqrt{3} \text{ cm}^3$; c) $\frac{4}{5}$; d) $2,4 \text{ cm}$; e) $7,2 \text{ cm}$.
37) a) 5 cm , $\sqrt{41} \text{ cm}$; b) 80 cm^2 , 144 cm^2 , 64 cm^3 ; c) $\frac{3}{5}$; d) $2,4 \text{ cm}$; e) $4,8 \text{ cm}$. 38) b) 684 cm^3 ; c) $\sqrt{2}$. 39) a) $74\sqrt{3} \text{ cm}^2$;
b) $\frac{256\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$; c) $\frac{16}{7} \text{ cm}$, $\frac{12}{7} \text{ cm}$. 40) a) $6\sqrt{3} \text{ cm}$, $6\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $144(1+\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $288\sqrt{2} \text{ cm}^3$; c) 45° ; d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; e) $2\sqrt{6} \text{ cm}$.
41) a) $4,515 \text{ m}^2$; b) $\sqrt{299} \text{ dm}$. 42) a) $42 + 18\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $36\sqrt{30} \text{ cm}^3$; c) $\frac{4\sqrt{10}}{13}$; d) $\frac{36\sqrt{10}}{13} \text{ cm}$. 43) b) $6\sqrt{2} \text{ mm}$. 44) Da.

Matematică

Radu Gologan
Elisabeta Ana Naghi
Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța