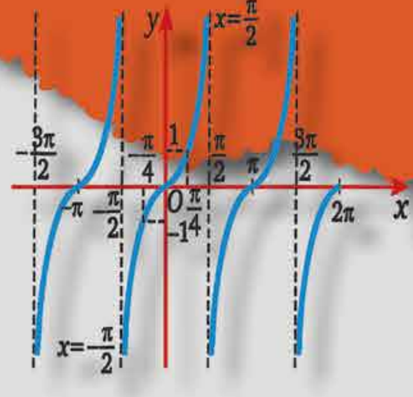
Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Matematică

Trunchi comun + curriculum diferenţiat



Dumitru Săvulescu
Marin Chirciu
Ştefan Alexe
Nicolae Dragomir
Tudor Deaconu
Alice Raluca Petrescu

Manual pentru clasa a IX-a

CORINT

Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Matematică

Trunchi comun + curriculum diferenţiat

Dumitru Săvulescu
Marin Chirciu
Ştefan Alexe
Nicolae Dragomir
Tudor Deaconu
Alice Raluca Petrescu

Manual pentru clasa a IX-a

CORINT

Manualul a fost aprobat de Ministerul Educaţiei şi Cercetării cu Ordinul nr. 3886 din 24.05.2004.

Date despre autori:

DUMITRU SĂVULESCU – profesor, Bucureşti, autor de manuale şi auxiliare şcolare pentru diferite niveluri de studiu, pentru examenele de testare naţională şi bacalaureat, de metodici pentru predarea geometriei în gimnaziu şi a aritmeticii de către învăţători şi institutori.

MARIN CHIRCIU – prof. gr. I, Colegiul Naţional „Zinca Golescu", Piteşti, autor de manuale şi auxiliare şcolare pentru diferite niveluri de studiu, pentru examenele de testare naţională, bacalaureat şi admitere în învăţământul superior, de probleme pentru olimpiade şi concursuri şcolare.

ŞTEFAN ALEXE – prof. gr. I, Colegiul Naţional „I.C. Brătianu", Piteşti, autor de auxiliare şcolare pentru diferite niveluri de studiu, de lucrări metodice şi de probleme pentru olimpiade şi concursuri şcolare.

NICOLAE DRAGOMIR –prof. gr. I, Reşiţa, autor de auxiliare şcolare pentru diferite niveluri de studiu, pentru examenul de bacalaureat, de probleme pentru olimpiade şi concursuri şcolare, colaborator la diverse publicaţii de profil matematic.

TUDOR DEACONU – prof. gr. I, Liceul de Artă, Reşiţa, autor de auxiliare şcolare pentru diferite niveluri de studii, pentru examenele de testare naţională şi bacalaureat, de probleme pentru olimpiade şi concursuri şcolare.

ALICE RALUCA PETRESCU –profesor, Bucureşti, autor de auxiliare şcolare pentru diferite niveluri de studiu, pentru examenul de testare naţională.

Referenţi:
- Alina Paraschiva – prof. gr. I, Colegiul Naţional „Gheorghe Lazăr"
- Gheorghe Cristescu – prof. gr. I, Şcoala nr. 56 „Jose Marti", sector 2, Bucureşti.
- Alexandru Stoica – prof. gr. I, Şcoala nr. 66, sector 2, Bucureşti

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică: trunchi comun și curriculum diferențiat: manual pentru clasa a IX-a / Dumitru Săvulescu, Marin Chirciu, Ștefan Alexe, ... - București: Corint, 2008
ISBN 978-973-135-304-3

I. Săvulescu, Dumitru
II. Chirciu, Marin
III. Alexe, Ștefan

51(075.35)
512(075.35)

Redactor: **Alice Raluca Petrescu**
Tehnoredactare şi procesare computerizată: **Gabi Iancu**
Grafică: **Gabi Iancu**

Editura CORINT
Redacţia şi administraţia:
Str. Mihai Eminescu nr. 54 A,
sector 1, Bucureşti
Tel.: 021.319.47.97;
tel./fax: 021.319.48.20

ISBN: 978-973-135-304-3

Departament Vânzări:
Calea Plevnei nr. 145, sector 6,
cod poștal 060012, București
Tel: 021.319.88.22, 021.319.88.33
Fax: 021.319,88.66; 021.310.15.30
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
www.grupulcorint.ro

CAPITOLUL 1

Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor

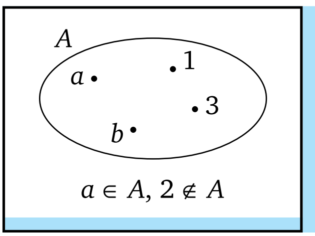
1. Relații și operații cu mulțimi (recapitulare)

Începem cu o recapitulare succintă a mulțimilor, relațiilor și operațiilor cu acestea.

Mulțimea este **o colecție de obiecte** distincte. Obiectele mulțimii se numesc **elemente**.
Mulțimile se notează cu litere mari ale alfabetului; elementele sale se scriu între acolade.
O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sau specificând o proprietate caracteristică a acestora.
Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează $\varnothing$.

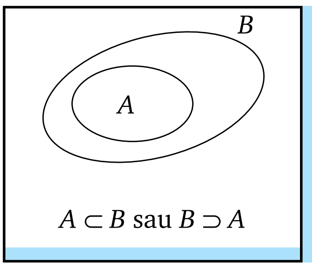
1.1. Relații

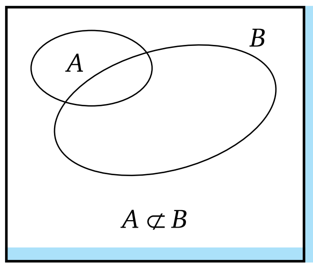
Apartenența sau nonapartenența unui element la o mulțime



„$\in$“ aparține
„$\notin$“ nu aparține

Incluziunea, submulțime





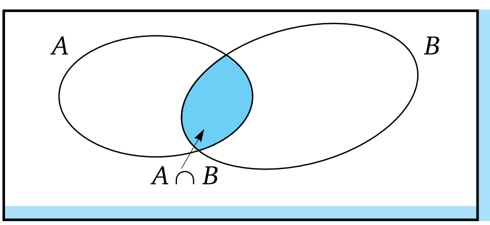
„$\subset$“ inclus; „$\supset$“ include
A este submulțime a lui B

„$\not\subset$“ nu este inclus

Egalitatea mulțimilor. $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$ (A și B au aceleași elemente).

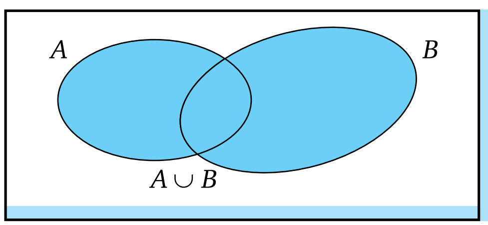
1.2. Operații cu mulțimi

Intersecția



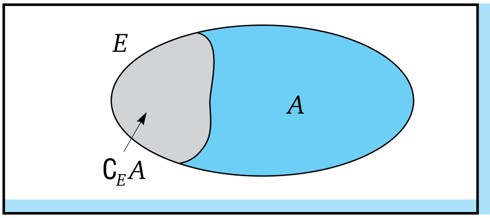
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

Reuniunea



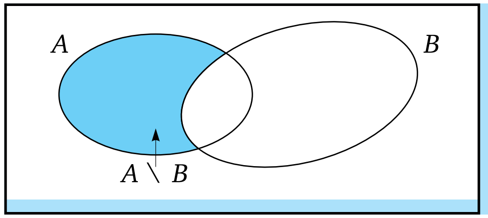
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

Complementara



$\complement_E A = \{x \mid x \in E \text{ și } x \notin A\}$

Diferența



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

Produsul cartezian. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
Observație: $A \times B \neq B \times A$.

2. Mulțimea numerelor reale

Numerele sunt un produs al inteligenței omului, cu ajutorul cărora acesta percepe aspectele cantitative ale lumii înconjurătoare și stabilește relații de ordine între ele.

Acest instrument – numerele – s-a perfecționat o dată cu dezvoltarea necesităților omului. Astfel au rezultat următoarele mulțimi de numere: numerele naturale, numerele întregi, numerele raționale, numerele reale.

Pornind de la mulțimea numerelor naturale, pot fi construite toate celelalte mulțimi de numere.

Fundamentul acestei construcții logice îl constituie teoria mulțimilor și logica matematică.

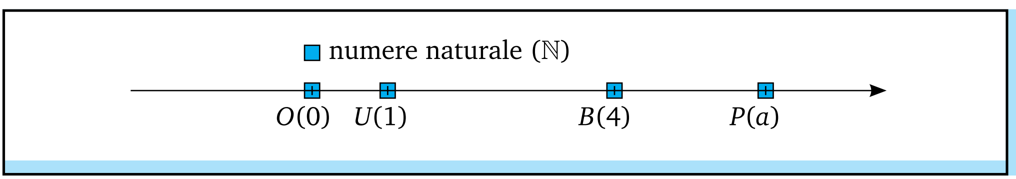
2.1. Mulțimea numerelor naturale; operații algebrice

Cea mai simplă mulțime de numere este mulțimea numerelor naturale:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}.$$

Definiție

O dreaptă pe care fixăm un punct O(numit *origine*), un segment OU a cărui *lungime* se consideră *egală cu unitatea* și un *sens pozitiv indicat de săgeată* (de la O spre U) se numește **axa numerelor** sau **axă de coordonate**.



Numărului natural 0 îi corespunde punctul O. Numărului natural 1 îi corespunde punctul U.

Definiție

Oricărui număr natural a îi corespunde punctul P aflat pe semidreapta $(OU$ astfel încât lungimea segmentului OP este a. Punctul P se numește **imaginea numărului a**, iar a se numește **abscisa punctului P**.

Pe mulțimea numerelor naturale se definesc două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*. Aceste operații au următoarele **proprietăți**:

a) $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$ (*comutativitate*);

b) $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$ (*asociativitate*);

c) $a + 0 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ (0 este *element neutru* pentru adunare);
$a \cdot 1 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$ (1 este *element neutru* pentru înmulțire);

d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$ (*distributivitatea înmulțirii față de adunare*).

Observații:

1. Fiind date numerele naturale a și b, dacă există numerele naturale x și y astfel încât $a + x = b$, $a \cdot y = b$ $(a \neq 0)$, atunci $x = b - a$ reprezintă **diferența** celor două numere, iar $y = b : a$ reprezintă **câtul** celor două numere. Dacă aceste două numere există, atunci ele sunt unic determinate și $a + (b - a) = (a + b) - a = b$, $a \cdot (b : a) = (a \cdot b) : a = b$.
2. Scăderea și împărțirea sunt operațiile inverse adunării, respectiv înmulțirii. Totuși, diferența și câtul nu există pentru orice numere naturale a și b.

Exemple:

1. Dacă $a = 3 \in \mathbb{N}$ și $b = 2 \in \mathbb{N}$ cu $3 + x = 2$, atunci $x = 2 - 3 \notin \mathbb{N}$.
2. Dacă $a = 5 \in \mathbb{N}$ și $b = 3 \in \mathbb{N}$ cu $5 \cdot y = 3$, atunci $y = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

Pentru $a \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ **puterea a n-a a lui a**.

Înmulțirea, ridicarea la putere și împărțirea puterilor se fac după următoarele **reguli**. Pentru $a, b, n, m \in \mathbb{N}^*$ avem:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; **2.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; **3.** $a^n : a^m = a^{n-m}$, $n > m$;

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$; **5.** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

2.1.1. Ordonarea numerelor naturale

Pentru două numere naturale oarecare a și b se introduce o relație de ordine în felul următor: dacă există un număr $c \neq 0$ astfel încât $a = b + c$, atunci se spune că a este **mai mare decât** b și se notează $a > b$ (Putem spune și că b este *mai mic decât* a și notăm $b < a$). Această relație este într-adevăr o relație de ordine.

2.1.2. Proprietățile relației de ordine pe mulțimea numerelor naturale

Trichotomie. Două numere naturale oarecare a și b sunt neapărat într-una din relațiile $a > b$, $b > a$ sau $a = b$.

Monotonia adunării și înmulțirii. Dacă $a > b$, iar c și d sunt două numere naturale nenule, atunci $a + c > b + c$ și $a \cdot d > b \cdot d$.

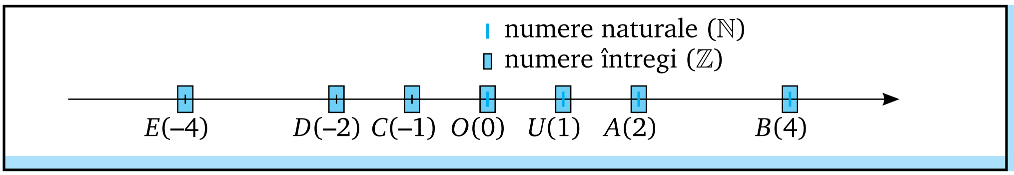
Axioma lui Arhimede. Pentru două numere naturale oarecare a și b, $a > 0$, există un număr natural n astfel încât $a \cdot n > b$.

Ținând seama de aceste proprietăți, mulțimea numerelor naturale se spune că este *liniară și arhimedic ordonată*.

2.2. Mulțimea numerelor întregi; operații algebrice

Anterior am văzut că scăderea și împărțirea nu se pot efectua întotdeauna în mulțimea numerelor naturale. Acest fapt a condus la extinderea mulțimii $\mathbb{N}$ la mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}.$$



Pe mulțimea numerelor întregi se definesc două operații: *adunarea* și *înmulțirea*. Proprietățile verificate de aceste operații în cazul numerelor naturale rămân valabile și pentru numerele întregi. În plus, la acestea se mai adaugă unele proprietăți noi.

Definiție

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, există elementul $-a \in \mathbb{Z}$ care se numește **opusul lui *a*** și are proprietatea:

$$\boxed{a + (-a) = (-a) + a = 0}$$

2.2.1. Proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire cu numere întregi

a) Dacă $x = y$, atunci $x + z = y + z$ și $xz = yz$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
b) Dacă $x + z = y + z$, atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
c) Dacă $xz = yz$, $z \neq 0$, atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
d) Dacă $x, y > 0$ sau $x, y < 0$, atunci $x \cdot y > 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.
e) Dacă $x > 0, y < 0$ sau $x < 0, y > 0$, atunci $x \cdot y < 0$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.
f) Dacă $x = 0, y \in \mathbb{Z}$ sau $y = 0, x \in \mathbb{Z}$, atunci $x \cdot y = 0$.
g) În mulțimea numerelor întregi, diferența a două numere întregi este tot un număr întreg.

Vom nota mulțimea numerelor naturale nenule cu $\mathbb{N}^*$, iar mulțimea numerelor întregi nenule cu $\mathbb{Z}^*$.

2.3. Mulțimea numerelor raționale; operații algebrice

Împărțirea necesită o mulțime de numere în care să se poată efectua și alte operații decât cele admise pentru numerele întregi.

Rezolvarea ecuației de forma $ax = b$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ a condus la introducerea numerelor raționale și a mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$.

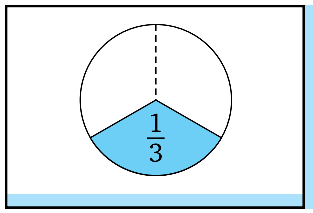
Așadar, un număr rațional este o fracție $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Definiție

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$ și $b, d \in \mathbb{Z}^*$ se numesc *echivalente* dacă $a \cdot d = b \cdot c$.
Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește **număr rațional**.

Exemplu:

Mulțimea fracțiilor $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \ldots\right\}$ obținute prin amplificare sau simplificare reprezintă numărul rațional unic $\frac{1}{3}$.



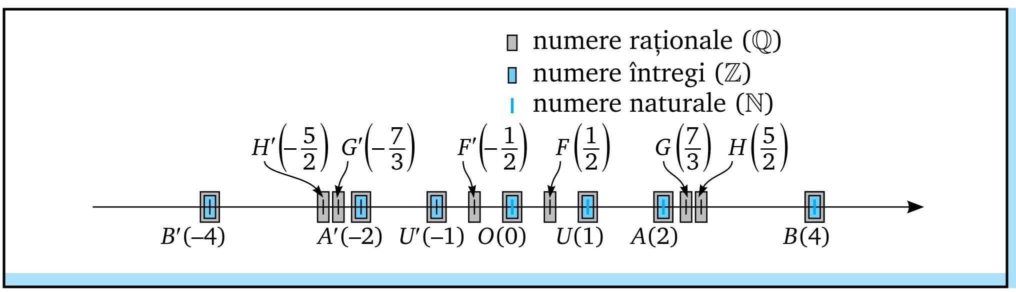
Observații:

1. Orice număr întreg poate fi scris ca o fracție cu numitorul 1.
2. În clasele anterioare, pe mulțimea numerelor raționale a fost definită o relație de ordine.
3. Mulțimea numerelor raționale este înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire.

Considerăm cunoscute proprietățile relației de ordine și ale operațiilor cu numere raționale.

Mulțimea numerelor raționale pozitive se notează $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \frac{a}{b} > 0 \right\}$.

Mulțimea numerelor raționale negative se notează $\mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \frac{a}{b} < 0 \right\}$.



2.3.1. Forme de scriere a unui număr rațional

În clasele anterioare am învățat că orice număr rațional poate fi scris în două moduri:

- sub formă de fracție ordinară (ca raport de două numere întregi);
- sub formă de fracție zecimală (finită sau infinită periodică).

2.3.1.1. Trecerea de la o fracție ordinară la o fracție zecimală

Aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale putem trece de la o fracție ordinară $\frac{a}{b}$ (unde $a \geq 0$, $b > 0$) la o fracție zecimală (finită sau infinită, periodică simplă ori mixtă).

Exemple:

Să transformăm în fracții zecimale următoarele fracții ordinare:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{41}{33}$; c) $\frac{7}{12}$.

Trecerea de la forma de scriere fracționară la cea cu virgulă se face prin împărțirea numărătorului la numitor. Avem:

a) $\frac{4}{5} = 0{,}8$; b) $\frac{41}{33} = 1{,}2424...$; c) $\frac{7}{12} = 0{,}5833...$.

Aceste scrieri sunt unice. În exemplul a) fracția zecimală obținută este **finită** deoarece după virgulă avem un număr finit de zecimale nenule.

În exemplele b) și c), fracțiile zecimale obținute sunt **infinite**, având la dreapta virgulei un număr infinit de zecimale.

Fracțiile zecimale în care una sau mai multe zecimale se repetă de o infinitate de ori se numesc **fracții zecimale periodice**.

În exemplul b), gruparea (24) se numește **perioadă**. Această fracție se scrie mai simplu 1,(24).

În exemplul c), perioada este 3, iar fracția 0,5833... se scrie sub forma 0,58(3).

Definiții

- Fracțiile la care perioada urmează imediat după virgulă se numesc **fracții periodice simple**.
- Fracțiile la care perioada nu urmează imediat după virgulă se numesc **fracții periodice mixte**.
- Fracțiile periodice mixte au după virgulă una sau mai multe zecimale care nu se repetă de o infinitate de ori. Această parte a fracției care nu se repetă se numește **partea neperiodică**.

Prin urmare, orice număr rațional poate fi scris ca fracție zecimală finită (exactă) sau ca fracție zecimală infinită periodică. De asemenea, orice fracție zecimală finită sau infinită periodică, cu perioada diferită de (9) reprezintă un număr rațional.

2.3.1.2. Trecerea de la fracția zecimală finită sau infinită periodică la fracție ordinară

a) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_k$ sunt cifre, atunci $a_0,a_1a_2...a_k = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2...a_k}}{1\underbrace{00...0}_{k \text{ zerouri}}}$.

Exemple:

$3,24 = 3\dfrac{24}{1000} = \dfrac{3024}{1000} = \dfrac{378}{125}$; $-3,024=-3\dfrac{24}{1000} = -\dfrac{3024}{1000} = -\dfrac{378}{125}$.

b) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_k$ sunt cifre, atunci $a_0,(a_1a_2...a_k) = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{k \text{ cifre}}}$.

Exemple:

$0,(236) = \dfrac{236}{999}$; $-0,(236) = -\dfrac{236}{999}$.

c) Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+p}$ sunt cifre, atunci

$$a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}...a_{k+p}) = a_0\dfrac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}} - \overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{k \text{ cifre}}}.$$

Exemple:

$1,2(36) = 1\dfrac{236-2}{990} = 1\dfrac{234}{990} = 1\dfrac{13}{55}$; $-1,2(36) = -1\dfrac{13}{55}$.

Observație: Orice fracție zecimală finită este periodică de perioadă zero.

Reciproc, avem următorul rezultat:

Teoremă

Orice număr rațional se reprezintă în mod unic sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

Observație: Dacă am admite existența fracțiilor zecimale cu perioada 9, atunci aplicând regula de mai sus am obține aparent, rezultate diferite.

Exemplu:

$17,(9) = 17\dfrac{9}{9} = 17 + 1 = 18$, iar $18 = 18,(0)$.

Pentru a păstra unicitatea scrierii numerelor raționale ca fracții zecimale, nu vom lua în considerare fracțiile zecimale cu perioada 9, dar vom admite scrierea fracțiilor zecimale finite ca fracții infinite periodice cu perioada 0.

2.3.2. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr rațional

Definiție

Fie $a \in \mathbb{Q}$. Se numește **partea întreagă** a numărului a, numărul notat $[a]$, care reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a.

Deci $[a] \in \mathbb{Z}$, $[a] \leq a < [a] + 1$.

Se numește **partea fracționară** a numărului a, numărul notat $\{a\}$, care este egal cu diferența dintre a și partea sa întreagă $[a]$.

Prin urmare, avem $a = [a] + \{a\}$, deci $\{a\} = a - [a]$.

Exerciții rezolvate

1. Determinați partea întreagă a următoarelor numere:
a) 4,78; b) 0,41; c) –4,78; d) –0,41; e) 5; f) –5.

Rezolvare

Avem:
a) $[4{,}78] = 4$; b) $[0{,}41] = 0$; c) $[-4{,}78] = -5$; d) $[-0{,}41] = -1$; e) $[5] = 5$; f) $[-5] = -5$.

2. Determinați partea fracționară a următoarelor numere: 2,82; –3.

Rezolvare

Avem $\{2{,}82\} = 2{,}82 - [2{,}82] = 2{,}82 - 2 = 0{,}82$; $\{-3\} = -3 - [-3] = -3 + 3 = 0$.

În scrierea ca fracție zecimală a unui număr rațional negativ $-a{,}b_1b_2\ldots$ cu $a \in \mathbb{N}$ și $b_1, b_2, \ldots$ cifre, $-a - 1$ este partea întreagă și $1 - 0{,}b_1b_2\ldots$ este partea fracționară a numărului.

Exemplu:

$[-15{,}63] = -15 - 1 = -16$; $\{-15{,}63\} = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$.

Exerciții propuse

1. Scrieți sub formă de fracție zecimală infinită numerele:

a) 3; b) $\frac{20}{7}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $-\frac{3}{5}$; e) $-\frac{1}{14}$; f) $\frac{6}{13}$.

2. Scrieți sub formă de fracție ordinară următoarele numere raționale:
a) 0,(6); b) 1,(15); c) 0,(312); d) 0,2(4); e) 0,24(3); f) 0,5.

3. Determinați numărul rațional pe care-l reprezintă următoarele fracții zecimale:
a) 0,24; b) 1,23; c) 3,5; d) 0,3; e) 0,(2); f) 0,(18);
g) –1,(13); h) 0,2(45); i) –0,2(36).

Exerciții propuse

4. Determinați partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{23}{5}$; c) $-0,256$; d) $-2,3(25)$; e) $-\frac{236}{35}$.

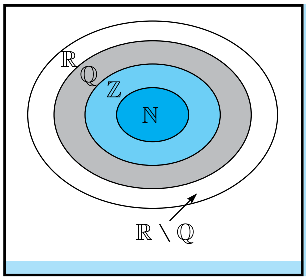
5. a) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $x = 12,4(9)$.
b) Dacă partea întreagă a lui x este -14 și partea fracționară este 0,8, determinați x.
c) Aflați numărul real x pentru care dublul părții sale întregi este 28, iar triplul părții sale fracționare din care scădem o unitate este $-0,1$.

6. Care este a 783-a zecimală din reprezentarea sub formă de fracție zecimală a numărului $\frac{3}{13}$? Dar a 2004-a zecimală?

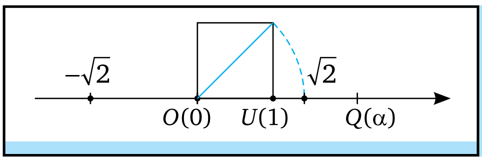
7. Care este a 1423-a zecimală din reprezentarea sub formă de fracție zecimală a numărului $\frac{783}{24}$? Dar a 2004-a zecimală?

2.4. Mulțimea numerelor reale

Fiind dat un număr rațional α, punctul corespunzător de pe axă, $Q(\alpha)$, împarte mulțimea numerelor raționale în două clase: o clasă cu numerele raționale mai mici decât α și altă clasă cu numerele raționale mai mari decât α.



În paragrafele anterioare, s-au definit mulțimile de numere notate prin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$; aceste mulțimi au fost obținute succesiv, plecând de la mulțimea numerelor naturale. Aceste mulțimi de numere sunt însă insuficiente chiar și pentru aplicații simple. De exemplu, ecuația $x^2 = 2$ nu poate fi rezolvată în $\mathbb{Q}$. Pentru a înlătura acest neajuns suntem obligați să considerăm că mulțimea $\mathbb{Q}$ este la rândul ei o submulțime a unei mulțimi; aceasta este **mulțimea numerelor reale** și se notează cu $\mathbb{R}$.



Dacă reprezentăm pe o axă a numerelor toate numerele raționale, rămân puncte nemarcate; de exemplu, punctul găsit când „așezăm“ pe axă diagonala pătratului cu latura egală cu unitatea, adică cu lungimea segmentului [0, 1].

Definiție

Abscisa unui punct care nu a fost marcat printr-un număr rațional se numește **număr irațional**.

Mulțimea numerelor iraționale se notează prin $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Un număr irațional se reprezintă, de obicei, ca un număr zecimal cu o infinitate de zecimale care nu se succed periodic.

Definiție

O fracție zecimală, infinită, neperiodică se numește **număr irațional**.

Exemple:

1. Numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 3,14159 ..., 1,0100100001 ... sunt numere iraționale.
2. Numărul $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ este irațional. Presupunem că $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ este număr rațional, deci că există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{2}+\sqrt{3} = a$. Obținem $\sqrt{3} = a - \sqrt{2}$ și ridicăm la pătrat. Rezultă $3 = a^2 - 2\sqrt{2}a + 2$, deci $\sqrt{2} = \dfrac{a^2-1}{2a}$. Cum membrul stâng este număr irațional, iar membrul drept număr rațional, egalitatea nu poate avea loc.
   Rezultă că $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nu poate fi număr rațional, deci este număr irațional.

Mulțimea numerelor reale este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.

Definiție

Se numește **număr real**, un număr notat cu x care este reprezentat de o scriere de forma:

$$\boxed{x = a_0,a_1a_2a_3...}$$

unde $a_0 \in \mathbb{Z}$, iar a_1, a_2, a_3, ... sunt cifre din mulțimea {0, 1, ..., 9}.

2.4.1. Aproximări zecimale ale numerelor reale

Definiție

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a = a_0,a_1a_2a_3...$, atunci numerele raționale a_0; a_0,a_1; a_0,a_1a_2; $a_0,a_1a_2a_3$ etc. se numesc **aproximări zecimale ale numărului *a***.

Am văzut că orice număr real a admite o reprezentare unic determinată ca fracție zecimală infinită:

$$a = a_0,a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$$

unde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_0 = [a]$ dacă $a > 0$ și $a_0 = [a] + 1$ dacă $a < 0$, și $a_i \in \mathbb{N}$, $0 \le a_i < n$ pentru orice $n \ge 1$.

Fie $a = 2{,}174625...$ un număr real pozitiv și $b = -3{,}143257...$ un număr real negativ.

Numerele raționale 2; 2,1; 2,17; 2,174; 2,1746; ... se numesc **aproximări zecimale prin lipsă** ale numărului real pozitiv a.

Numerele raționale –4; –3,2; –3,15; –3,144; –3,1433; ... se numesc **aproximări zecimale prin lipsă** ale numărului real negativ b.

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă ale numerelor reale a și b sunt numere raționale mai mici decât a, respectiv b.

Numerele 3; 2,2; 2,18; 2,175; 2,1747; ... se numesc **aproximări zecimale prin adaos** ale numărului real pozitiv a.

Numerele –3; –3,1; –3,143; –3,1432; ... se numesc **aproximări zecimale prin adaos** ale numărului real negativ b.

Observăm că aproximările zecimale prin adaos ale numerelor reale a și b sunt numere raționale mai mari decât a, respectiv b.

Definiție

Fiind date numărul real x și a o valoare aproximativă (cunoscută a sa), diferența $\Delta x = a - x$ se numește **eroare absolută.**

- a este **aproximarea prin lipsă** dacă $\Delta x < 0$
- a este **aproximarea prin adaos** dacă $\Delta x > 0$.

Exemple:

1. Aproximări prin lipsă pentru numărul 1,7 sunt: 1,5; 1,57; 1,6; 1,65; 1,659; 1,699.
2. Aproximări prin adaos pentru numărul 1,7 sunt: 1,71; 1,75; 1,793; 1,8; 1,82; 2.
3. Aproximări prin lipsă pentru numărul –4,6 sunt: –5; –4,7; –4,65; –4,659; –4,698; –4,6983.
4. Aproximări prin adaos pentru numărul –4,6 sunt: –4; –4,5; –4,57; –4,563; –4,592; –4,5931.

Definiție

Pentru un număr real x, fie numerele reale a și k, $k > 0$. Spunem că:

- a **aproximează prin lipsă cu o eroare mai mică decât k** numărul x dacă $a \leq x < a + k$;
- a **aproximează prin adaos cu o eroare mai mică decât k** numărul x dacă $a - k < x \leq a$.

Exemple:

1. Numerele 1; 1,7; 1,77; 1,777 aproximează prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} numărul 1,(7).
2. Numerele 2; 1,8; 1,78; 1,778 aproximează prin adaos cu eroare mai mică decât 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} numărul 1,(7).
3. Numerele –5; –4,7; –4,67; –4,667 aproximează prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} numărul –4,(6).
4. Numerele –4; –4,5; –4,65; –4,665 aproximează prin adaos cu eroare mai mică decât 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} numărul –4,(6).

Definiție

Pentru un număr real x, întregul cel mai apropiat de x reprezintă **rotunjirea** lui x. Rotunjirea lui x este:

- partea întreagă a lui x, dacă partea fracționară este în intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right)$;
- partea întreagă + 1, dacă partea fracționară este în intervalul $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Exemple:

1. Rotunjirea lui 5,4 este 5, deoarece partea fracționară a sa este $0,4 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.
2. Rotunjirea lui –0,2 este $-1 + 1 = 0$, deoarece partea fracționară a sa este $0,8 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Definiție

Aproximarea prin lipsă la a n-a zecimală a unui număr real x reprezintă **trunchierea** lui x la a n-a zecimală. Prin trunchierea unui număr întreg de ordinul n se înlocuiesc cu zero toate cifrele de ordin mai mic decât n; prin trunchierea unui număr real la a n-a zecimală se „șterg“ zecimalele de ordin mai mic decât n.

Exemple:

1. Trunchierea lui 1,76 la prima zecimală este 1,7.
2. Trunchierea lui –0,346 la a doua zecimală este –0,35.
3. Trunchierea lui 3 258 428 la ordinul 6 (al sutelor de mii) este 3 200 000.
4. Trunchierea lui 2,(7) la a șasea zecimală este 2,777777.

2.4.2. Ordonarea numerelor reale

Fie $a = a_0,a_1a_2a_3...$ și $b = b_0,b_1b_2b_3...$ două numere reale.

Spunem că numerele reale a și b sunt **egale** dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Spunem că numărul real a este **pozitiv**, și scriem $a > 0$, dacă aproximările sale zecimale sunt numere raționale pozitive.

Spunem că numărul real a este **negativ**, și scriem $a < 0$, dacă aproximările sale zecimale sunt numere raționale negative.

Spunem că numărul real a este **mai mic** decât b și scriem $a < b$ dacă

- $a > 0$, $b > 0$, $a_0 < b_0$ sau există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k < b_k$ și $a_i = b_i$ pentru orice $i < k$, $i \in \mathbb{N}$

sau
- $a < 0$ și $b > 0$

sau
- $a < 0$, $b < 0$, $a_0 < b_0$ sau există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k > b_k$ și $a_i = b_i$ pentru orice $i < k$, $i \in \mathbb{N}$.

Proprietate

Între orice două numere reale există cel puțin un număr rațional și cel puțin un număr irațional.

Observații:

1. Dacă $a > 0$ spunem că a este **strict pozitiv**, iar dacă $a < 0$ spunem că a este **strict negativ**.
2. Dacă $a < b$ putem scrie că $b > a$ și spunem că b este mai mare decât a.
3. Dacă $a \leq b$ putem scrie că $a < b$ sau $a = b$.

Relația $\leq$ este o **relație de ordine** pe $\mathbb{R}$.

Relația de ordine are următoarele **proprietăți**:

1. $a \le a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ (*reflexivitate*).

2. Dacă $a \le b$ și $b \le a$, atunci $a = b$ (*antisimetrie*).

3. Dacă $a \le b$ și $b \le c$, atunci $a \le c$ (*tranzitivitate*).

4. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci este adevărată una și numai una din propozițiile: $a < b$ sau $a = b$ sau $a > b$ (*trihotomie*).

2.4.3. Axa numerelor reale; opusul unui număr real

Reamintim că o dreaptă pe care fixăm un punct O (numit origine), un sens pozitiv (indicat de săgeată) și o unitate de măsură se numește *axă a numerelor*.

Definiție

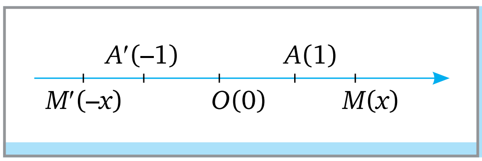
Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se reprezintă geometric prin mulțimea punctelor unei drepte pe care o numim **axa numerelor reale** sau **axa reală** sau **dreapta reală**.

Oricărui număr real îi corespunde un singur punct M pe dreapta reală și reciproc oricărui punct de pe axa reală îi corespunde un singur număr real.

Definiție

Fie M' simetricul lui M față de originea O a axei reale. Abscisa punctului M' se notează cu $-x$ și se numește **opusul** numărului real x (care este abscisa punctului M). Semidreptele $(OM$ și $(OM'$ sunt **semidrepte opuse**.

Pe axa numerelor reale considerăm punctele A de abscisă $x_A = 1$ și A' de abscisă $x_{A'} = -1$. Semidreapta deschisă $(OA$ se numește **semiaxă pozitivă** a axei reale, iar semidreapta deschisă $(OA'$ se numește **semiaxa negativă** a axei reale.



Observații:

1. Un număr real nenul x este pozitiv, și scriem $x > 0$, dacă punctul corespunzător aparține semiaxei pozitive.

2. Un număr real nenul x este negativ, și scriem $x < 0$, dacă punctul corespunzător aparține semiaxei negative.

3. Numărul real 0 nu este nici pozitiv nici negativ.

Pentru a reprezenta pe axă un număr irațional utilizăm aproximările sale zecimale.

De exemplu, pentru a găsi pe axa reală punctul corespunzător lui $\sqrt{2}$, ținem seama că $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ și deci punctul căutat este situat între $A(1{,}4)$ și $B(1{,}5)$.

2.4.4. Operații cu numere reale

Folosind reprezentarea zecimală a numerelor reale vom defini adunarea și înmulțirea numerelor reale.

Să considerăm două numere reale a și b, $a = a_0,a_1 \ldots a_n \ldots$ și $b = b_0,b_1 \ldots b_n \ldots$, cu $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ și $a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ cifre.

Să considerăm aproximările:
prin lipsă $a_n' = a_0,a_1...a_n$, $b_n' = b_0,b_1...b_n$
și
prin adaos $a_n'' = a_0,a_1...a_n + 10^{-n}$, $b_n'' = b_0,b_1...b_n + 10^{-n}$
cu o eroare mai mică decât 10^{-n}.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$a_n' \leq a_n < a_n'' \text{ și } b_n' \leq b_n < b_n''.$$

Definiție

Se numește **suma** numerelor reale a și b un număr real c care, pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:

$$\boxed{a_n' + b_n' \leq c < a_n'' + b_n''}$$

Exemple:

Fie $a = \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{5}$. Avem:

$1 \leq \sqrt{3} < 2$	$2 \leq \sqrt{5} < 3$	$a_0' + b_0' = 3$	$a_0'' + b_0'' = 5$
$1{,}7 \leq \sqrt{3} < 1{,}8$	$2{,}2 \leq \sqrt{5} < 2{,}3$	$a_1' + b_1' = 3{,}9$	$a_1'' + b_1'' = 4{,}1$
$1{,}73 \leq \sqrt{3} < 1{,}74$	$2{,}23 \leq \sqrt{5} < 2{,}24$	$a_2' + b_2' = 3{,}96$	$a_2'' + b_2'' = 3{,}98$
$1{,}732 \leq \sqrt{3} < 1{,}733$	$2{,}236 \leq \sqrt{5} < 2{,}237$	$a_3' + b_3' = 3{,}968$	$a_3'' + b_3'' = 3{,}970$
$1{,}7320 \leq \sqrt{3} < 1{,}7321$	$2{,}2360 \leq \sqrt{5} < 2{,}2361$	$a_4' + b_4' = 3{,}9680$	$a_4'' + b_4'' = 3{,}9682$
....	....	....	....

prin urmare, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ este numărul real cuprins concomitent între numerele raționale 3 și 5; 3,9 și 4,1; 3,96 și 3,98; 3,968 și 3,970; 3,9680 și 3,9682.

Analog se definește produsul numerelor reale nenegative. Întrucât a_n', a_n'', b_n', b_n'' sunt numere raționale, produsele $a_n' \cdot b_n'$ și $a_n'' \cdot b_n''$ au sens și sunt produse de numere raționale.

Definiție

Se numește **produsul** numerelor reale nenegative a și b un număr real d care, pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:

$$\boxed{a_n' \cdot b_n' \leq d < a_n'' \cdot b_n''}$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real d există și este unic.

Adunarea și înmulțirea numerelor reale au aceleași proprietăți pe care aceste operații le au în $\mathbb{Q}$.

Astfel, pentru orice numere reale a, b, c au loc următoarele egalități:

1. $a + b = b + a$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. $a + 0 = 0 + a = a$;
4. $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5. $a \cdot b = b \cdot a$;
6. $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$;
7. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8. $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1, a \neq 0$;
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

2.4.5. Modulul unui număr real

Să considerăm un număr real a și mulțimea $A = \{-a, a\}$ (dacă a este nul, A are doar un singur element, adică $A = \{0\}$).

Definiție

Valoarea absolută sau **modulul** numărului real a este cel mai mare dintre numerele a și $-a$. Deci:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}}$$

Proprietățile modulului

Pentru orice două numere reale x și y, următoarele **proprietăți ale modulului** sunt adevărate:

1. $|x| \geq 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = 0$;
2. $|x| = |-x|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$, cu egalitate dacă și numai dacă $xy \geq 0$;
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;
6. $|x|^2 = x^2$;
7. $|x| = \max(x, -x)$;
8. $x \leq |x|$.

Demonstrație

Să demonstrăm, de exemplu, a treia proprietate.

Dacă $x = 0$ sau $y = 0$, atunci este evident că $|x + y| = |x| + |y|$.

Deci vom presupune $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Avem patru cazuri posibile:

i) Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $x + y > 0$. Deci $|x + y| = |x| + |y|$.

ii) Dacă $x < 0$ și $y < 0$, atunci $x + y < 0$. În acest caz $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x + y| = -(x + y)$ și deci $|x + y| = |x| + |y|$.

iii) Dacă $x > 0$ și $y < 0$, atunci $|x| = x$ și $|y| = -y$.
În acest caz:
- $x + y > 0$; $|x + y| = x + y = x - (-y) < x + (-y) = |x| + |y|$;
- $x + y = 0$; $|x + y| = 0$, $|x| + |y| = |x| + |-x| = x + x = 2x > 0$, deci $|x + y| = 0 < 2x = |x| + |y|$;
- $x + y < 0$; $|x + y| = -x - y = -|x| + |y| < |x| + |y|$.

iv) Analog se demonstrează și cazul $x < 0$ și $y > 0$.

2.4.6. Puteri cu exponent întreg

Pentru prima dată, noțiunea de putere apare în secolul al V-lea î.Hr. în cărțile matematicianului grec Hippocrates din Chios. De asemenea, Platon folosește și el puterile cu exponentul 2. Grecii, spre deosebire de hinduși, au folosit numere relativ mici. De exemplu, Homer nu trece mai departe de o miriadă (10^4).

În secolul al XVI-lea, matematicianul italian Rafaelo Bombelli (1526–1572) a introdus pentru prima dată cuvântul putere (potenția) prin care se referea la pătratele numerelor. Renè Descartes (1596–1650) a extins noțiunea de putere la exponenți întregi mai mari decât 2. Tot el a introdus notația a^m, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

2.4.6.1. Puteri cu exponent natural

Definiție

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se numește **puterea a *n*-a** a numărului a, produsul a n numere, fiecare număr fiind egal cu a. Acest număr se notează cu a^n.

Prin urmare,

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}}$$

În reprezentarea a^n, a se numește **baza puterii**, n se numește **exponentul puterii**, iar a^n se numește **putere**.

Exemple:

$(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$; $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{625}$.

Semnul puterii cu exponent natural

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n > 0$.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, n număr par, atunci $a^n > 0$.

n număr impar, atunci $a^n < 0$.

Demonstrație

Dacă $a > 0$, atunci $a^n > 0$ deoarece este un produs de n numere pozitive.

Dacă $a < 0$, atunci ținând seama de regula semnelor rezultă că:

- $a^n = a^{2k} > 0$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ deoarece este produsul unui număr par de numere negative;
- $a^n = a^{2k+1} < 0$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ deoarece este produsul unui număr impar de numere negative.

Exemple:

$2^3 > 0$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0$.

Puterea produsului și a câtului a două numere reale

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

$$\boxed{\begin{gathered}(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)\end{gathered}}$$

Demonstrație

Avem: $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b)\cdot(a \cdot b)\cdot \ldots \cdot(a \cdot b)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ ori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ ori}} = a^n \cdot b^n$

(produsul numerelor reale are proprietățile de asociativitate și comutativitate).

Analog avem

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot \ldots \cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ ori}} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}}$$

Exemplu:

$$3^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \left(3 \cdot \frac{1}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Înmulțirea a două puteri care au aceeași bază

Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Demonstrație

Avem: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ ori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{(m+n) \text{ ori}} = a^{m+n}$.

Exemplu:

$2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6 = 64$; $(-5) \cdot (-5)^2 = (-5)^3 = -125$.

Ridicarea unei puteri la o altă putere

Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Demonstrație

Avem: $(a^m)^n = \underbrace{(a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m)}_{n \text{ ori}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ ori}}} = a^{m \cdot n}$.

Exemple:

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64; \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

Împărțirea a două puteri care au aceeași bază

Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m > n$, atunci

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Demonstrație

Avem: $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, de unde deducem că $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$.

Exemple:

$$\frac{5^6}{5^3} = 5^{6-3} = 5^3 = 125; \quad \frac{7^3}{7^2} = 7^{3-2} = 7^1 = 7.$$

2.4.6.2. Puteri cu exponent întreg negativ

Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiție

Se numește **puterea a (–n)-a a lui a**, notată a^{-n}, numărul real definit prin:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemple:

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Dacă $a \neq 0$, prin definiție vom pune $a^0 = 1$.

Dacă $m = n$, atunci $\frac{a^m}{a^n} = 1$ și $a^{m-n} = a^0 = 1$.

Observație: Expresia 0^0 nu are sens.

Proprietățile puterilor cu exponent întreg

Proprietățile puterilor cu exponent natural se păstrează și pentru cele cu exponent întreg negativ. Are loc următoarea teoremă:

Teoremă

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. Pentru a înmulți două puteri care au aceeași bază se scrie baza și se adună exponenții:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

2. Pentru a împărți două puteri care au aceeași bază se scrie baza și se scad exponenții:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

3. Pentru a ridica un produs la o putere se ridică fiecare factor la acea putere:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

4. Pentru a ridica un cât la o putere se ridică la acea putere atât numărătorul cât și numitorul:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

5. Pentru a ridica o putere la o altă putere se scrie baza și se înmulțesc exponenții:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Observații:

1. Proprietatea 3 poate fi extinsă la k numere $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^*$:
$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)^n = a_1^n \cdot a_2^n \cdot \ldots \cdot a_k^n$.
2. Întrucât puterile sunt numere reale ele pot fi ordonate:
   - Dacă $a \in (0, 1)$, atunci $a^n < a^m \Leftrightarrow n > m$.
   - Dacă $a > 1$, atunci $a^n < a^m \Leftrightarrow n < m$.
   - Dacă $0 < a < b$, atunci $a^n < b^n$.
   - Dacă $a \neq \pm 1, a \neq 0$, atunci $a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$.

Exemple:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, deoarece $\frac{1}{3} \in (0, 1)$ și $2 > -2$;

$\left(\frac{5}{4}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^5$, deoarece $\frac{5}{4} > 1$ și $3 < 5$.

2.4.7. Identități remarcabile

Se presupun cunoscute următoarele identități, numite **formule de calcul prescurtat**:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

De la acestea, prin calcul direct, se obțin și următoarele identități:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exerciții propuse

1. Determinați aproximarea zecimală prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-3} pentru numerele: $\frac{3}{7}, \frac{2}{9}, \frac{11}{13}, \frac{17}{23}, \frac{31}{27}$.

2. Determinați aproximarea zecimală prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-4} pentru numerele: $\frac{13}{18}, \frac{20}{51}, \frac{54}{17}, -\frac{13}{17}, \frac{47}{11}$.

3. Care este rotunjirea numărului $\frac{1}{3} + \frac{1}{3+5} + \frac{1}{3+5+7}$?

4. Care este trunchierea numărului $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}$ la a doua zecimală? Dar la a patra? Dar la a opta?

5. Care este trunchierea numărului 9 783 423 la ordinul 3 (al sutelor)? Dar la ordinul 5 (al zecilor de mii)? Dar la ordinul 7 (al milioanelor)?

6. Ordonați crescător, apoi descrescător numerele reale:

$5{,}4(32)$; $9{,}143$; $-\frac{7}{9}$; $-8{,}0(3)$; $\frac{13}{11}$; $-\frac{11}{13}$; $-\frac{4{,}3(72)+5{,}0(13)}{31}$.

Reprezentați numerele pe axa reală.

7. Fie numerele:

$$x = \frac{\left|\frac{4}{7}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\right|}{\left|\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}-\frac{4}{5\cdot 6}\right|-\frac{11}{3}} \text{ și } y = \left|\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right|-\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right|.$$

Determinați: x, y, $|x|$, $|y|$, $|x+y|$, $|x-y|$.

8. Calculați:

a) $3^2 \cdot 9^2 \cdot 27^2 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^2$; b) $7^3 \cdot 21^3 \cdot 49^3 \cdot \left(\frac{1}{343}\right)^4$; c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^2$; d) $\frac{(-3)^{100}}{(-3)^{103}}$;

e) $\left(-\frac{10}{13}\right)^5 \cdot \left(-\frac{39}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$; f) $\left[10-4\left(\frac{2}{5}\right)^0\right]^{-2}$; g) $\frac{3\cdot 7^{23}-20\cdot 7^{22}}{49^{11}}$.

9. Calculați:

a) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^{43} - 3^{46} + \frac{5^{148}}{5^{43}} - (5^5)^{21} + 81$; b) $\frac{3\cdot 5^2\cdot 7^3}{3^4\cdot 5^3\cdot 7^4} + \frac{(3^3)^9}{81^{18}} - 1^{52}\cdot 7^0$;

c) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-6\cdot(-3)^{-2}+\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{5}{27}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{3}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}}$.

10. Fie numărul $x = \left\{a+\left[1+\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$.

Pentru $a = -\frac{1}{4}$, determinați x, $-x$, $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{|x|}$, $\left|-\frac{1}{x}\right|$, $|x+1|$, $|x-1|$.

11. Scrieți în ordine crescătoare numerele: -4^{16}, $(8)^{11}$, $(-9)^{17}$ și $(-27)^{11}$.

12. Arătați că: a) $2^{1987} > 3^{1241}$; b) $3^{1987} > 4^{1490}$.

13. În raport cu valorile lui $m \in \mathbb{R}$, determinați semnul expresiilor:
a) $(3-m)^{17}$; b) $(4-5m)^{127}$; c) $(9-3m)^{156}$.

14. Calculați:

a) $a^2\cdot a^{-4}\cdot a^5$; b) $a^5\cdot\frac{1}{a^4}\cdot a^7$; c) $\frac{(a^{-1})^4\cdot(a^3)^4}{a^5\cdot(a^{-3})^3}$; d) $\frac{(a^5\cdot a^{-4})^2}{a^4\cdot(a^{-5})^5}$; e) $a^{-4}\cdot\frac{1}{(a^8)^{-2}}\cdot\frac{(a^4)^{-2}}{(a^3)^3}$.

15. Calculați:
a) $(x^2\cdot y^2)^3 : (x^2\cdot y)^3$, $(x, y \neq 0)$;
b) $[a^3+b^3+3ab(a+b)]^4 : (a^2+b^2+2ab)^5$, $a+b\neq 0$;
c) $(6^n-4^n) : (3^n-2^n)$.

Exerciții propuse

16. Dezvoltați expresiile:

a) $(3x-2)^2$; b) $(4a+5b)^2$; c) $\left(\frac{1}{3}a+y\right)^3$; d) $\left(x-\frac{2}{5}y\right)^3$.

17. Scrieți sub formă de produs:
a) $27a^3-b^3$; $8+y^3$; $1-64a^3b^3$; $36x^2-9y^2$;
b) $x^{2n}+x^{n+1}+x^{n-1}+1$; c) $(xy)^m+x^{m+n}+y^{m+n}+(xy)^n$;
d) $x^{m+n+p}+x^{m+p}+x^{n+p}+x^m+x^p+1$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}$.

18. Arătați că numărul $a=3^{2n+2}\cdot 4^{2n+3}-2^{2n+1}\cdot 6^{2n+3}$, cu $n\in\mathbb{N}$, este pătrat perfect.

19. a) Fie $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$. Arătați că nu există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $m^2+1=k^2$.
b) Arătați că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ numărul $2+2\cdot 7^n+49^n$ nu este pătrat perfect.

20. Calculați expresiile pentru $k\in\mathbb{Z}$:

a) $\dfrac{3^{2k+1}\cdot 5^k+(-3)^{2k}\cdot 5^{k+1}+15^k\cdot 3^{k+3}}{62\cdot(-3)^k\cdot(-5)^k-3^{k+3}\cdot 5^{5k}\cdot(5^k)^{-4}}$; b) $\dfrac{5^{k+1}\cdot 3^{2k+2}+10\cdot 5^k\cdot 3^{2k}+8\cdot 3^{2k+1}\cdot 5^k}{8\cdot 5^{k+1}\cdot 3^{2k+2}-68\cdot 5^k\cdot 3^{2k}+3^{2k+1}\cdot 5^{k+2}}$.

21. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și $a, b\in(0,+\infty)$.

a) Arătați că $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geq\dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}\cdot\dfrac{a+b}{2}$ și că egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

b) Demonstrați că $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ și că egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b$.

22. Dacă $x, y>0$, atunci: $2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\geq\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2$.

23. Dacă $a, b, c>0$, atunci: $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\leq abc$.

Exerciții propuse

2.4.8. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiție

Numim **partea întreagă** a unui număr real x, cel mai mare număr întreg mai mic decât x. Acest număr se notează cu $[x]$.

Prin urmare, oricare ar fi numărul real x, există o infinitate de numere întregi mai mici decât x. Din mulțimea acestora îl alegem pe cel mai mare întreg, care, evident, depinde de x și care se notează $[x]$.

În baza axiomei lui Arhimede putem enunța următoarea definiție:

Definiție

Pentru orice număr real x, există un număr întreg m (unic determinat) astfel încât:

$$m \leq x < m + 1 \tag{1}$$

Numărul m se numește **partea întreagă** a numărului real x și se notează cu $[x]$.

Avem:

$$\boxed{[x] = \begin{cases} m, \text{ pentru } & m \leq x < m+1 \\ -m, \text{ pentru } & -m \leq x < -m+1 \end{cases}}$$

Definiție

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul $x - [x] = \alpha \in [0, 1)$ se numește **partea fracționară** a numărului real și se notează cu $\{x\}$.

Așadar, ținând seama de definiția părții fracționare, avem scrierea unică

$$x = [x] + \{x\} \tag{2}$$

unde $[x] \in \mathbb{Z}$, iar $0 \leq \{x\} < 1$.

Unicitatea acestei scrieri arată că dacă $x = m + \alpha$ cu $m \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq \alpha < 1$, atunci $m = [x]$ și $\alpha = \{x\}$.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ este un număr pozitiv, atunci scrierea sa poate fi pusă sub forma:

$$x = a_0,a_1a_2a_3... \tag{3}$$

unde $a_0 \in \mathbb{Z}$ reprezintă partea sa întreagă, iar $0,a_1a_2a_3$ ... , cu $0 \leq 0,a_1a_2a_3 ... < 1$ este partea fracționară.

În continuare vom prezenta câteva proprietăți esențiale ale părții întregi.

P1. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem:

$$\boxed{x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]}$$

Demonstrație

Fie $[x] = m$, $[y] = n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ și $m \leq x < m + 1$, $n \leq y < n + 1$, și va trebui să arătăm că $m \leq n$. Presupunem prin absurd că $m > n$, adică $m \geq n + 1$. Deducem că $x \geq m \geq n + 1 > y$, adică $x > y$, contradicție. Prin urmare, presupunerea făcută fiind falsă avem $m \leq n$, adică $[x] \leq [y]$.

P2. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem:

$$\boxed{[x + y] \geq [x] + [y]}$$

Demonstrație

Avem $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$, deci

$$x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\},$$

unde $[x] + [y] \in \mathbb{Z}$, iar $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$. Dacă $0 \leq \{x\} + \{y\} < 1$, atunci din (2) rezultă $[x + y] = [x] + [y]$, iar dacă $1 \leq \{x\} + \{y\} < 2$, atunci $\{x\} + \{y\} = 1 + \alpha$ cu $0 \leq \alpha < 1$ și din (2) rezultă $[x + y] = [x] + [y] + 1 > [x] + [y]$.

P3. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea:

$$\boxed{[m + x] = m + [x]}$$

Demonstrație

Din $[x] \leq x < [x] + 1 \Leftrightarrow [x] + m \leq x + m < [x] + m + 1$, rezultă că $x + m$ este cuprins între două numere întregi consecutive, deci $[x + m] = m + [x]$.

2.5. Intervale de numere reale

Intervalele sunt submulțimi de numere reale, care pot fi reprezentate pe axa numerelor ca segmente sau semidrepte.

2.5.1. Tipuri de intervale

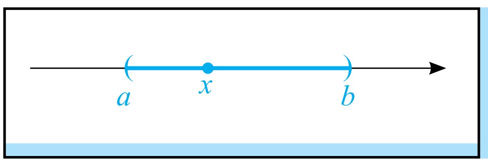
Avem următoarele tipuri de intervale:

- **Intervale mărginite** – se numesc *mărginite* pentru că orice număr real din cadrul unui asemenea interval se află între cele două margini, inferioară și superioară, care constituie capetele intervalului.

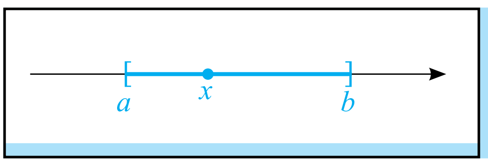
Pe axa numerelor reale, intervalele mărginite se reprezintă sub forma unor *segmente de dreaptă* cu capete sau fără, în funcție de tipul intervalului.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Avem:

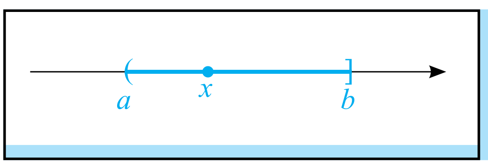
a) interval deschis la ambele capete
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



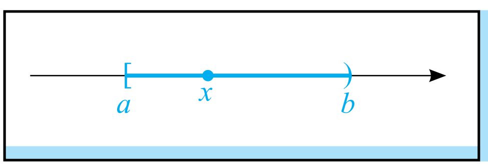
b) interval închis la ambele capete
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



c) interval deschis la stânga și închis la dreapta
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

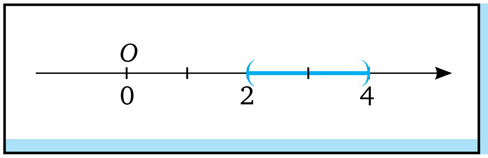


d) interval închis la stânga și deschis la dreapta
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

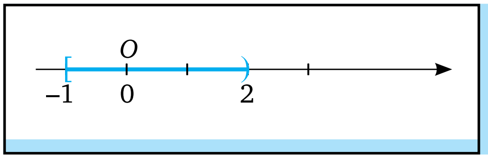


Exemple:

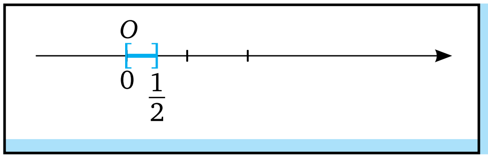
1. $(2, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$ este interval deschis la ambele capete.



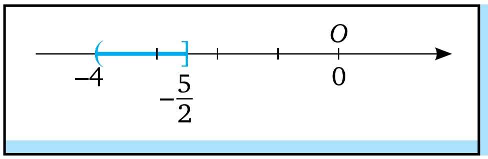
2. $[-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 2\}$ este interval închis la stânga și deschis la dreapta.



3. $\left[0, \frac{1}{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}\right\}$ este interval închis la ambele capete.



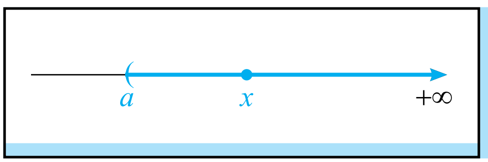
4. $\left(-4, -\frac{5}{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \le -\frac{5}{2}\right\}$ este interval deschis la stânga și închis la dreapta.



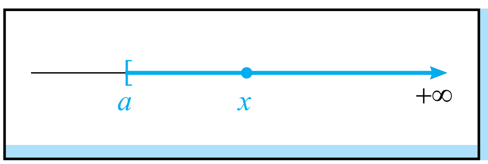
■ **Intervale nemărginite** – se numesc *nemărginite* pentru că unul dintre capetele intervalului nu este un număr real ci unul dintre simbolurile $-\infty$ sau $+\infty$. Pe axa numerelor reale, intervalele nemărginite se reprezintă sub forma unor *semidrepte*.

Fie $a \in \mathbb{R}$. Avem:

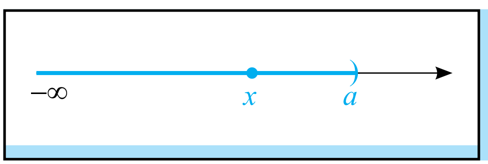
a) interval deschis la stânga și nemărginit la dreapta
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



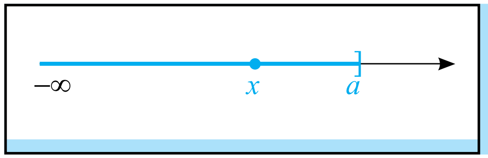
b) interval închis la stânga și nemărginit la dreapta
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$



c) interval deschis la dreapta și nemărginit la stânga
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

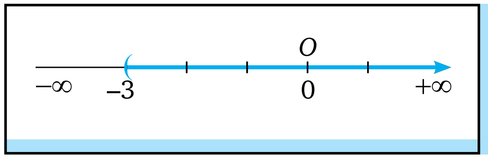


d) interval închis la dreapta și nemărginit la stânga
$(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

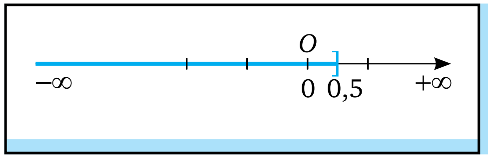


Exemple:

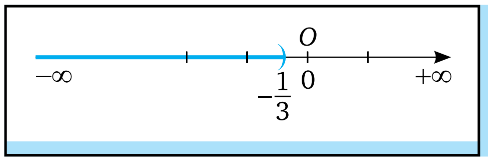
1. $(-3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
este interval deschis la stânga și nemărginit la dreapta.



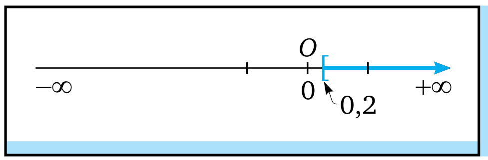
2. $(-\infty; 0{,}5] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0{,}5\}$
este interval închis la dreapta și nemărginit la stânga.



3. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3}\right\}$
este interval deschis la dreapta și nemărginit la stânga.



4. $[0{,}2; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0{,}2\}$
este interval închis la stânga și nemărginit la dreapta.



2.5.2. Operații cu intervale

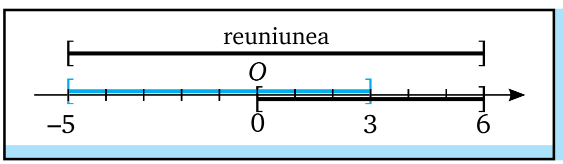
Deoarece intervalele sunt mulțimi, toate operațiile care se pot efectua cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența, produsul cartezian) se pot efectua și cu intervale.

Exercițiu rezolvat

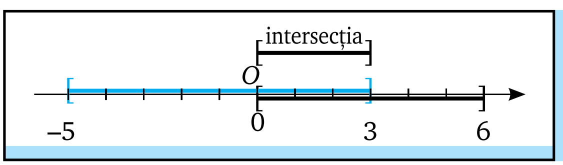
Fie intervalele $[-5, 3]$ și $[0, 6]$. Determinați reuniunea, intersecția, diferența și produsul lor cartezian.

Rezolvare

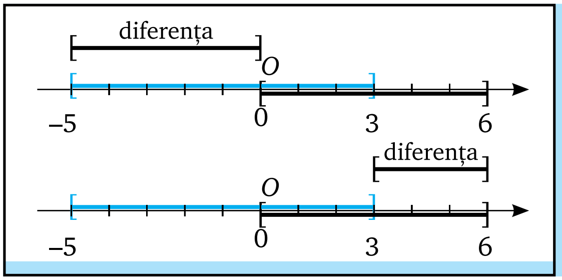
- **Reuniunea:**
  $[-5, 3] \cup [0, 6] = [-5, 6]$.



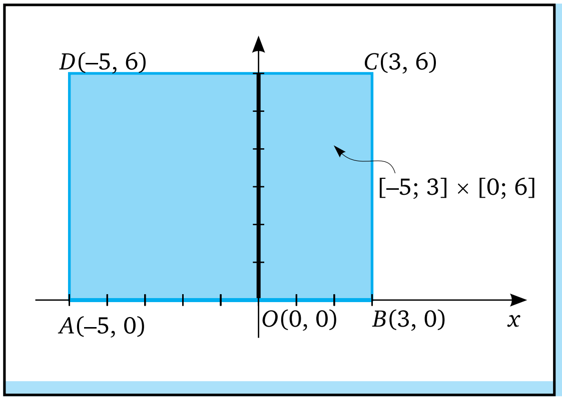
- **Intersecția:**
  $[-5, 3] \cap [0, 6] = [0, 3]$.



- **Diferența:**
  $[-5, 3] \setminus [0, 6] = [-5, 0]$,
  $[0, 6] \setminus [-5, 3] = [3, 6]$



- **Produsul cartezian** al intervalelor este format din perechi de numere de forma (x, y), unde $x \in [-5, 3]$ și $y \in [0, 6]$.
  $[-5, 3] \times [0, 6] =$
  $= \{(x, y) \mid -5 \le x \le 3$ și $0 \le y \le 6\}$.
  Reprezentarea geometrică a produsului cartezian se realizează în *sistemul de axe de coordonate xOy* și este dreptunghiul *ABCD* reunit cu suprafața sa interioară.

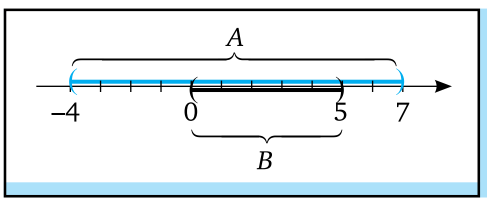


Exerciții propuse

1. Scrieți sub formă de interval mulțimile:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \le x < 9\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\}$;
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$; $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \le 0\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -1\}$;
$G = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{3}\right\}$; $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0{,}3\}$.

2. Fie intervalele $A = [-2; 3]$ și $B = [0; 6]$. Determinați $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$.

3. Scrieți intervalele A și B din figura alăturată, apoi calculați
$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$,
$A \cap (0, +\infty), B \cap (-\infty, 0)$.



4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $[-3, m] \cap [0, 12] = \varnothing$.

5. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $[-5, 6] \cup [3, m] = [-5, 14]$.

6. Fie intervalele $A = [2, 4]$ și $B = [3, 5]$. Reprezentați geometric produsul $A \times B$.

7. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-2, a] \cap [b, 7] = [1, 4]$.

8. Fie intervalele $A = [-3, \infty), B = (-\infty, 5], C = [2, 7]$.
Calculați: $A \cup B, A \cap B, A \cap C, B \cap C, B \setminus C, C \cap (A \cup B)$.
Reprezentați geometric produsele $A \times B, A \times C, B \times C, (A \cap B) \times C$ și $C \times (A \cap B)$.

9. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left[\frac{13}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; a] = [6,5; 18]$.

10. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-\infty, 2] \cap [x, 5) = \varnothing$.

*2.6. Inegalități remarcabile

În funcție de contextul matematic în care apar, inegalitățile se împart în două clase:

- inegalități propriu-zise (adevărate pentru orice valori atribuite variabilelor sau adevărate dacă între variabile sunt anumite relații);
- inecuații (adevărate doar pentru anumite valori ale variabilelor).

2.6.1. Inegalitatea mediilor

Inegalitatea mediilor

Pentru orice $a, b > 0$ au loc inegalitățile:

$$\min(a, b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a, b)$$

unde $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ este **media armonică** a numerelor a și b, $m_g = \sqrt{ab}$ este **media geometrică** sau **proporțională** a numerelor a și b, $m_a = \frac{a+b}{2}$ este **media aritmetică**, iar $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ este **media pătratică** a acestor numere. Avem egalitate dacă $a = b$.

Demonstrație

- Presupunem $a \le b \Rightarrow \min(a, b) = a$ și prima inegalitate devine:

$a \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow a(a+b) \le 2ab \Leftrightarrow a^2 \le ab \Leftrightarrow a(a-b) \le 0$, ceea ce este adevărat.

Avem egalitate dacă $a - b = 0$, adică pentru $a = b$.

Inegalitatea $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$, ceea ce este evident.

Inegalitatea $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$, ceea ce este adevărat.

- Avem egalitate în cazul $a = b$.

Avem $\max(a, b) = b$. Ultima inegalitate devine $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \le b^2 \Leftrightarrow a^2 \le b^2$, ceea ce este adevărat pentru $a \le b$, $a, b > 0$. Avem egalitate pentru $a = b$.

Analog pentru $a \ge b$.

* Temele marcate cu * (asterisc) sunt facultative.

2.6.2. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz

Pentru orice $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ avem:

$$\boxed{(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$$

Demonstrație

Ținând seama de *egalitatea Lagrange* avem:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2(ay - bx)^2$$

Relația de demonstrează prin calcul direct. Renunțând la ultimul termen pozitiv din membrul drept se obține inegalitatea lui Cauchy-Buniakovsky-Schwartz.

2.6.3. Inegalitatea lui Cebâșev

Inegalitatea lui Cebâșev

1. Dacă $a_1 \leq a_2$ și $b_1 \leq b_2$ sau $a_1 \geq a_2$ și $b_1 \geq b_2$, atunci:

$$\boxed{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \leq 2(a_1b_1 + a_2b_2)}$$

2. Dacă $a_1 \leq a_2$ și $b_1 \geq b_2$ sau $a_1 \geq a_2$ și $b_1 \leq b_2$, atunci:

$$\boxed{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \geq 2(a_1b_1 + a_2b_2)}$$

Demonstrație

1. Avem: $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 \leq 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \Leftrightarrow a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$ ceea ce este adevărat, deoarece $a_1 \leq a_2$ și $b_1 \leq b_2$.

2. Analog.

2.6.4. Inegalitatea lui Minkowski

Inegalitatea lui Minkowski

Dacă $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\boxed{\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}}$$

Demonstrație

Inegalitatea este echivalentă cu cea obținută prin ridicare la pătrat. Avem:

$(x + y)^2 + (a + b)^2 \leq x^2 + a^2 + 2\sqrt{(x^2 + a^2)(y^2 + b^2)} + y^2 + b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy + ab \leq \sqrt{(x^2 + a^2)(y^2 + b^2)}$. Ridicăm din nou la pătrat și obținem:

$x^2y^2 + 2xyab + a^2b^2 \leq (x^2 + a^2)(y^2 + b^2) \Leftrightarrow 2xyab \leq x^2b^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow (xb - ay)^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat.

Exerciții rezolvate

1. Arătați că:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2]$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$.

Rezolvare

a) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) =$

$= \frac{1}{2}[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2]$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2) =$

$= \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$.

2. Arătați că dacă $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$, atunci $x^2y^2z^2 = 1$ sau $x = y = z$.

Rezolvare

Din $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \Rightarrow x - y = \frac{y - z}{yz}$ (1), din $y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \Rightarrow y - z = \frac{z - x}{xz}$ (2), iar din $x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x} \Rightarrow x - z = \frac{y - x}{yx}$ (3). Înmulțind relațiile (1) și (2) cu relația (3) obținem: $(x - y)(y - z)(z - x) = \frac{(y - z)(z - x)(y - x)}{x^2y^2z^2}$. De aici rezultă $x^2y^2z^2 = 1$ sau $x = y = z$.

3. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha > \beta > 0$. Comparați numerele:

$x = \frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}$ și $y = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2+\beta^3}$.

Rezolvare

Avem: $x = \frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2(1+\alpha)} = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)} = \frac{1}{1+\alpha^2}$, $\alpha > 0$;

$y = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2(1+\beta)} = \frac{1+\beta}{(1+\beta)(1+\beta^2)} = \frac{1}{1+\beta^2}$, $\beta > 0$;

$x - y = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} < 0$, oricare ar fi $\alpha > \beta > 0$, deci $x < y$.

4. Arătați că oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$ avem $x^2 + y^2 + z^2 + 36 \geq 4\sqrt{3}(x + y + z)$.

Rezolvare

Inegalitatea se mai poate scrie $(x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 + (z - 2\sqrt{3})^2 \geq 0$, care este evident adevărată. Avem egalitate pentru $x = y = z = 2\sqrt{3}$.

5. Arătați că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

Rezolvare

Avem:

$3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0$ și

$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$.

Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$.

6. Arătați că dacă $x > 0, y > 0, z > 0$, atunci $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z$.

Rezolvare

Folosind inegalitatea $\frac{x+y}{2} \geq xy$, $\forall\, x, y \geq 0$ obținem $\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}\right) \geq z$, $\frac{1}{2}\left(\frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}\right) \geq x$, $\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}\right) \geq y$ care prin adunare membru cu membru ne dau inegalitatea din enunț.

Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$.

7. a) Arătați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $xy > 0$ sau $x, y < 0$, atunci $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

b) Arătați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x > 0, y < 0$, atunci $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2$.

c) Arătați că dacă $x, y, z \in (0, +\infty)$, atunci $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq 9$.

Rezolvare

a) Deoarece $(x-y)^2 \geq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$, de unde $\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$, adică

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y$.

b) Având în vedere că $(x+y)^2 \geq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy$, $\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \leq -2$ $(xy < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq -2$. Avem egalitate dacă și numai dacă $x = -y$.

c) Într-adevăr, oricare ar fi $x, y, z \in (0, +\infty)$, avem:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

8. Arătați că oricare ar fi $x, y, z \in (0, +\infty)$ are loc inegalitatea
$xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) \geq 6xyz$.

Rezolvare

Deoarece $x, y, z \in (0, +\infty)$, avem: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2$.

Adunând aceste egalități membru cu membru, rezultă $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6$.

Înmulțind ambii membri ai ultimei inegalități cu xyz, obținem inegalitatea ce trebuia demonstrată. Avem egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$.

9. Arătați că, oricare ar fi $x, y, z \in (0, +\infty)$ are loc inegalitatea:
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Rezolvare

Inegalitatea din enunț este echivalentă cu inegalitatea:
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} + 3 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2}.$$
Să notăm $a = y + z$, $b = z + x$ și $c = x + y$.
Adunând membru cu membru aceste egalități obținem:
$x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$ și ultima inegalitate devine: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.
Cum ultima inegalitate este adevărată oricare ar fi $a, b, c \in (0, +\infty)$ (vezi problema 7, c)), cerința enunțului este îndeplinită.

10. Demonstrați și dați o interpretare geometrică echivalenței $x \in [1, 2] \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$.

Rezolvare

Avem succesiv:
$$x \in [1, 2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1-\frac{3}{2} \leq x-\frac{3}{2} \leq 2-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x-\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$
Să considerăm pe axa reală punctele $A(1)$, $B(2)$, $N(x)$ și M mijlocul segmentului $[AB]$, deci $M\left(\frac{3}{2}\right)$. Lungimea segmentului $[AB]$ este $AB = |2 - 1| = 1$.

Faptul că $x \in [1, 2]$ înseamnă că $N \in [AB]$, iar $\left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow NM \leq \frac{1}{2}AB$.

11. Se consideră $0,a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{11}{13}$.

a) Determinați a_{2003}.

b) Determinați suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003}$.

Rezolvare

a) Deoarece $\frac{11}{13} = 0,(846153)$, iar $2003 = 6k + 5$, rezultă că a_{2003} este 5.

b) Întrucât $2003 = 6 \cdot 333 + 5$, rezultă: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003} = 333(8 + 4 + 6 + 1 + 5 + 3) + 8 + 4 + 6 + 1 + 5 = 333 \cdot 27 + 24 = 9015$.

12. Aflați x care verifică relația $|x - 2| + |10 - x| = 8$.

Rezolvare

Cum $8 = x - 2 + 10 - x$, relația are forma
$|x - 2| + |10 - x| = |(x - 2) + (10 - x)| \Leftrightarrow (x - 2)(10 - x) \geq 0$.
Din studiul semnului produsului $(x - 2)(10 - x) \geq 0$, deducem $x \in [2, 10]$.

13. Arătați că $\frac{a+b-|a-b|}{2} = \min\{a, b\}$ și $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \max\{a, b\}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

- Fie $a < b$. Atunci $|a - b| = b - a$, de unde $\frac{a+b-|a-b|}{2} = a$ și $\frac{a+b+|a-b|}{2} = b$.

Cum în cazul considerat, $\min\{a, b\} = a$ și $\max\{a, b\} = b$, cerința enunțului este îndeplinită.

Fie $a > b$. Atunci $|a - b| = a - b$, de unde $\frac{a+b-|a-b|}{2} = b$ și $\frac{a+b+|a-b|}{2} = a$.

Cum în cazul considerat, $\min\{a, b\} = b$ și $\max\{a, b\} = a$, cerința enunțului este îndeplinită.

14. Aflați x care verifică relațiile:

a) $[5x] = 6$; b) $[x + 7] = -5$; c) $[x + 1] + [x - 2] - [x + 3] = 2$; d) $\left\{x+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{2}$.

Rezolvare

a) $[5x] = 6 \Leftrightarrow 6 \le 5x < 7 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \le x < \frac{7}{5} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$;

b) $[x + 7] = -5 \Leftrightarrow -5 \le x + 7 < -4 \Leftrightarrow -12 \le x < -11 \Leftrightarrow x \in [-12, -11)$;

c) deoarece $[a + m] = [a] + m$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ ecuația devine
$[x] + 1 + [x] - 2 - [x] - 3 = 2 \Leftrightarrow [x] = 6 \Leftrightarrow x \in [6, 7)$;

d) cum $a = [a] + \{a\}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, avem: $x + \frac{1}{3} = \left[x+\frac{1}{3}\right] + \left\{x+\frac{1}{3}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} + k$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow x = \frac{1}{6} + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

15. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea: $[x] + \left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]$ (*identitatea lui Hermite*).

Rezolvare

$$[x] + \left[x+\frac{1}{2}\right] = [x] + \left[[x]+\alpha+\frac{1}{2}\right] = [x] + [x] + \left[\alpha+\frac{1}{2}\right] = 2[x] + \left[\alpha+\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \begin{cases} 2[x], & \text{dacă } \alpha\in\left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2[x]+1, & \text{dacă } \alpha\in\left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, \text{ iar } [2x] = [2([x]+\alpha)] = 2[x] + [2\alpha] =$$

$$= \begin{cases} 2[x], & \text{dacă } \alpha\in\left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2[x]+1, & \text{dacă } \alpha\in\left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, \text{ de unde rezultă că } [x] + \left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x].$$

Exerciții propuse

1. Arătați că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$ avem:

a) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$;

b) $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

c) dacă $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3$, atunci
$(x + y + z)^{2n+1} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinați aproximările prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-3} pentru numerele: $\frac{1}{3}$; $\frac{71}{13}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}-\sqrt{4}$; $-\frac{17}{11}$; $\frac{28}{13}$; $-\frac{13}{38}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Calculați:

a) $\frac{11\cdot(5\cdot 11^{15}-10\cdot 11^{14})}{11^{16}+4\cdot 11^{15}}$; b) $\frac{(3\cdot 5^{24}+8\cdot 5^{23})\cdot 69}{(23\cdot 5^{13})^2}$; c) $\frac{3^n\cdot 5-5\cdot 3^{n-1}}{2\cdot(3^{n+2}+3^n)}$.

4. Determinați rotunjirea numărului $\frac{2}{1+2}+\frac{3}{2+3}+\frac{3}{2+3}+\frac{4}{3+4}+\frac{5}{4+5}$.

5. Fără a efectua calculele, spuneți care este semnul expresiilor:

$(-3)^{143}$; $(-5)^{1002}$; $\left(1-\sqrt{2}\right)^{245}$; $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^{0}$.

6. Arătați că dacă $x, y, z \in (0, +\infty)$ și $\frac{y(-x+y+z)}{(y+z)^2} = \frac{x(x-y+z)}{(z+x)^2}$, atunci $x = y$.

7. Dacă pentru $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ avem $x + y + z + \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = -2$ și $xyz = 1$, atunci $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 0$.

8. Arătați că dacă $x, y, z > 0$ și $x \cdot y \cdot z = 1$, atunci

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

9. Eliminați a și b între relațiile: $x = a + \frac{1}{a}$, $y = b + \frac{1}{b}$ și $z = ab + \frac{1}{ab}$.

10. Arătați că fracția $\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+4n+2}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

11. Arătați că:
a) $20^n - 8^n - 5^n + 2^n$ este divizibil cu 9;
b) $63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ este divizibil cu 13.

12. Se consideră numerele reale $x = \sqrt{\frac{a}{a+1}}+\sqrt{\frac{a+1}{a}}$ și $y = \sqrt{\frac{a+2}{a+3}}+\sqrt{\frac{a+3}{a+2}}$, unde $a \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$. Determinați care dintre ele este mai mare.

13. Scrieți sub formă de fracție zecimală infinită numerele:

a) 3; b) $\frac{20}{7}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $-\frac{3}{5}$; e) $-\frac{1}{14}$; f) $\frac{6}{13}$.

14. Scrieți sub formă de fracție ordinară următoarele numere raționale:
a) 0,(6); b) 1,(15); c) 0,(312); d) 0,5(455).

15. Determinați numărul rațional pe care-l reprezintă următoarele fracții zecimale:
a) 0,24; b) 1,23; c) 3,5; d) 0,3; e) 0,(2); f) 0,(18); g) –1,(13); h) 0,2(45); i) –0,2(36).

16. Se consideră $0,a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{16}{13}$.

a) Care este a 423-a zecimală?
b) Determinați a_{2004}.
c) Determinați suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004}$.

17. Demonstrați că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este irațional.

18. Determinați partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{23}{5}$; c) –0,256; d) –2,3(25); e) $-\frac{236}{35}$.

19. Calculați: $x = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{15}]$.

Exerciții propuse

20. Calculați: $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]$.

21. Calculați suma $S = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[\frac{x+2}{x+1}\right]+\left[\frac{x+3}{x+2}\right] + \ldots + \left[\frac{x+k}{x+k-1}\right]$, știind că $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ și $k \in \mathbb{N}^*$.

22. Determinați x care verifică egalitățile:
a) $[x-1] = 3$; b) $[x+3]-[x-5] = 8$;
c) $\left[\frac{7x-2}{5}\right]=\frac{2x-1}{3}$; d) $\left[\frac{x+2}{x-1}\right]=\frac{x}{x-3}$; e) $\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{x-1}{6}$.

23. Arătați că dacă x, y, z sunt numere reale cu $x+y+z=2$ și $xy+yz+zx=1$, atunci $x, y, z \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

24. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=1$. Arătați că $|x+y+z| \leq \sqrt{3}$.

25*. Determinați valorile lui x pentru care:
a) $|x+1|+|x-2| = 5$; b) $|x+1|+|x+2|-|x+3| = 2x-2$;
c) $|x+|x-2||+|3x-|x-2|| = 8$.

26. Arătați că:
a) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
b) $\left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right| < 1$, oricare ar fi $x, y, z \in (0, +\infty)$.

27. Fie numerele reale $x = \left|1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right|-\frac{\sqrt{2}}{3}$ și $y = \left[\left(2-\frac{3}{4}\right)^{-1}+\frac{1}{5}\right]^{-1}:\left(1-\frac{7}{3}\right)^3$.

Calculați: $x+y$, $-x$, $-y$, $|x|$, $|y|$, $\left|\frac{x}{y}\right|$, $|xy|$, $|x+y|$, $|x-y|$, $\frac{1}{|x|}$, $\frac{1}{|y|}$.

28. Arătați că dacă $x > 0$, atunci $\frac{x}{4}+\frac{1}{x} \geq 1$.

29. Arătați că dacă $x, y, z \in [3, 4]$, atunci $x+y+z+12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq 21$.

30. Arătați că pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, avem $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

31*. Arătați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, avem:
a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;
b) $a^{2n+1}+b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})$.

Exerciții propuse

3. Elemente de logică matematică

3.1. Enunț, propoziție, valoare de adevăr

Enunțurile sunt texte lingvistice elementare (rostite sau scrise) de tip narativ, declarativ, care au înțelesuri de sine stătătoare: spun ceva, despre ceva (sau cineva). În terminologia curentă ele au diverse denumiri mai mult sau mai puțin echivalente (propoziții simple, propoziții compuse, fraze, judecăți, afirmații, aserțiuni etc.) în funcție de contextul în care sunt considerate. Enunțurile sunt cele mai simple formațiuni lingvistice susceptibile de a comunica, de a purta informații.

Definiție

Un **enunț** este un ansamblu de semne cărora li s-a dat un sens.

Pentru a opera logic cu enunțurile nu este însă necesar să intrăm în toate detaliile unei analize gramaticale, ci este suficient să distingem în fiecare enunț două părți fundamentale, cu funcții specifice: *subiectul* (subiectele) și *partea predicativă*.

Partea din enunț care desemnează acel (acei) ceva sau cineva despre care vorbește enunțul va fi numită **subiectul** (respectiv **subiectele enunțului** respectiv).

Partea din enunț care rămâne după eliminarea tuturor subiectelor se va numi **partea predicativă a enunțului**.

Exemplu:

În enunțul „Logicianul Gottlob Frege a fost contemporan cu matematicianul Georg Cantor“ există două subiecte și anume „Logicianul Gottlob Frege“ și „matematicianul Georg Cantor“, iar partea predicativă constă din textul „a fost contemporan cu“.

Fiecare enunț are o parte predicativă, bine determinată și unică, dar poate avea unul sau mai multe subiecte determinate sau nedeterminate.

Exemplu:

Enunțurile

A_1: „Animalul x este carnivor“,

A_2: „Numărul 60 este divizibil cu numărul m și cu numărul n“

au un subiect („animalul x“) nedeterminat, respectiv trei subiecte, dintre care unul determinat („numărul 60“) și două nedeterminate („numărul m“ și „numărul n“).

Definiție

Prin **propoziție** înțelegem un enunț care este fie adevărat, fie fals. Cu alte cuvinte, un enunț în care toate subiectele sunt determinate se numește propoziție.

Exemplu:

Enunțurile:

B_1: „Catedrala din Köln este mai înaltă decât Domul din Milano“,

B_2: „Pătratul numărului 6 coincide cu produsul dintre numărul 4 și numărul 9“

sunt propoziții.

În cele ce urmează vom nota propozițiile cu literele $p, q, r, s, \ldots$, eventual acestea vor fi prevăzute cu indici inferiori: $p_1, p_2, p_3 \ldots, q_1, q_2, q_3 \ldots, r_1, r_2, r_3 \ldots$

Să considerăm următoarele propoziții:

1. p_1 : „$3 < 4$“;
2. p_2: „$2 + 5 = 7$“;
3. p_3: „Triunghiul are patru unghiuri“;
4. p_4: „Planeta Saturn este un satelit al Pământului“;
5. p_5: „Suma a două numere pare este un număr par“.

Observăm că propozițiile p_1, p_2 și p_5 sunt adevărate, în timp ce propozițiile p_3 și p_4 sunt false.

Definiție

Oricărei propoziții i se asociază o **valoare de adevăr**, după cum urmează:
- dacă propoziția este adevărată, atunci are valoarea de adevăr 1;
- dacă propoziția este falsă, atunci are valoarea de adevăr 0.

Valoarea de adevăr a unei propoziții p se notează $v(p)$.

Avem $v(p) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } p \text{ adevărată} \\ 0, & \text{pentru } p \text{ falsă} \end{cases}$.

3.2. Operații logice elementare în mulțimea propozițiilor

Utilizând elemente de legătură, exprimate în limbajul curent prin cuvintele „și“, „sau“, prin negația „nu“, prin sintagma „dacă-atunci“, din propoziții date se pot forma noi propoziții.

Definiție

Elementele de legătură „**și**“, „**sau**“ dintre două propoziții, precum și negația „**nu**“ care se aplică unei propoziții se numesc **operatori logici (conectori logici)**.

Propoziția care se obține utilizând conectorii logici se numește **propoziție compusă**.

3.2.1. Negația propozițiilor

Definiție

Se numește **negația** unei propoziții p, propoziția notată $\rceil p$ sau $\overline{p}$ (se citește „non p“) care este adevărată când p este falsă și este falsă când p este adevărată.

Valoarea de adevăr al lui $\rceil p$ este $v(\rceil p) = 1 - v(p)$.

Valoarea de adevăr se poate scrie și cu ajutorul unui tabel al valorilor de adevăr (vezi tabelul alăturat).

p	$\rceil p$
1	0
0	1

Exemple:

1. Propoziția p: „5 îl divide pe 14“, este falsă. Atunci $\rceil p$: „5 nu îl divide pe 14“ este adevărată.
2. Propoziția p: „$6 < 8$“ este adevărată. Atunci $\rceil p$: $6 \geq 8$ este falsă.

3.2.2. Conjuncția propozițiilor

Dacă p și q sunt două enunțuri, atunci notăm cu $p \wedge q$ enunțul care afirmă că fiecare dintre proprietățile exprimate de p și q are loc și care se construiește lingvistic, alăturând textele celor două enunțuri în ordinea (p, q) și intercalând între ele particula conjunctivă „și“.

Definiție

Fie p și q două propoziții oarecare. **Conjuncția** propozițiilor p și q este propoziția notată $p \wedge q$ (se citește „p și q“) care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate și este falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$ este

$$v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q).$$

Valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$ este dată în tabelul valorilor de adevăr alăturat.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple:

1. Fie propozițiile adevărate p: „$2 < 3$“ și q: „4 se divide cu 2“.
   Atunci propoziția $p \wedge q$: „$2 < 3$ și 4 se divide cu 2“ este adevărată.
2. Fie propozițiile p: „$81 : 9 = 9$“ și „7 nu este număr prim“. Atunci conjuncția „$81 : 9 = 9$“ și „7 nu este număr prim“ este falsă deoarece p este adevărată, iar q este falsă.

Exercițiu rezolvat

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge (\rceil p)$.

Rezolvare

Valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge (\rceil p)$ este dată în tabelul valorilor de adevăr alăturat. Din tabelul valorilor de adevăr se observă că propoziția $p \wedge (\rceil p)$ este întotdeauna falsă sau $v(p \wedge (\rceil p)) = v(p) \cdot v(\rceil p) = v(p) \cdot [1 - v(p)] = 0$.

p	$\rceil p$	$p \wedge (\rceil p)$
1	0	0
0	1	0

Această propoziție exprimă **principiul non-contradicției**.

Cu alte cuvinte, o propoziție nu poate fi simultan și adevărată și falsă.

3.2.3. Disjuncția propozițiilor

Dacă p și q sunt două enunțuri, atunci notăm cu $p \vee q$ enunțul care afirmă că, cel puțin una dintre proprietățile exprimate de p și q are loc și care se construiește lingvistic alăturând textele celor două enunțuri în ordinea (p, q) și intercalând între ele particula disjunctivă „sau".

Definiție

Fie p, q două propoziții oarecare. **Disjuncția** propozițiilor p, q este propoziția notată $p \vee q$ (se citește „p sau q"), care este falsă atunci și numai atunci când ambele propoziții p și q sunt false; în celelalte situații este adevărată.

Valoarea de adevăr a propoziției $p \vee q$ este

$$v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p) \cdot v(q).$$

Valoarea de adevăr a propoziției $p \vee q$ este dată în tabelul valorilor de adevăr alăturat.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple:

1. Fie propozițiile adevărate p: „6 se divide cu 3" și q: „$21 = 3 \cdot 7$".
Atunci disjuncția $p \vee q$: „6 se divide cu 3 sau $21 = 3 \cdot 7$" este adevărată.
2. Fie propozițiile p: „$81 : 9 = 9$" și „7 nu este număr prim" este adevărat deoarece cel puțin una dintre propoziții este adevărată.

Exercițiu rezolvat

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p \vee (\rceil p)$.

Rezolvare

Valoarea de adevăr a propoziției $p \vee (\rceil p)$ este dată în tabelul valorilor de adevăr alăturat. Din tabelul de adevăr se observă că propoziția $p \vee (\rceil p)$ este întotdeauna adevărată sau
$v(p \vee (\rceil p)) = v(p) + v(\rceil p) - v(p) \cdot v(\rceil p) =$
$= v(p) + 1 - v(p) - v(p)[1 - v(p)] = 1 - v(p) \cdot [1 - v(p)] = 1.$
Această propoziție exprimă **principiul terțiului exclus**, adică orice propoziție este sau adevărată sau falsă.

p	$\rceil p$	$p \vee (\rceil p)$
1	0	1
0	1	1

3.2.4. Implicația propozițiilor

Definiție

Implicația propozițiilor p și q este propoziția notată $p \to q$ (se citește „p implică q", „q pentru că p", „din p rezultă q" sau „dacă p, atunci q"), care este falsă atunci și numai atunci când p este adevărată și q este falsă; în celelalte situații este adevărată.

Valoarea de adevăr a propoziției $p \to q$ este

$$v(p \to q) = 1 - v(p) + v(p) \cdot v(q).$$

Valoarea de adevăr a propoziției $p \to q$ este dată în tabelul valorilor de adevăr alăturat.

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Dacă p și q sunt două propoziții, atunci prin definiție, propoziția $(\rceil p) \vee q$ se numește **implicația propozițiilor** p și q (în ordinea scrisă) și se notează cu $p \to q$.

Propoziția $p \to q$ se citește convențional „dacă p, atunci q“, dar, după cum se observă, ea nu este decât o scriere prescurtată, o notație, a propoziției $(\rceil p) \vee q$ și afirmă, de fapt, că are loc, fie proprietatea exprimată de $\rceil p$, fie proprietatea exprimată de q. Această convenție nu este întâmplătoare, ea nu este altceva decât o precizare, făcută în scopuri științifice, privind înțelesul exact, atribuit în matematică, expresiei „dacă ..., atunci ... “.

În cazul în care propoziția $p \to q$ este adevărată, vom nota $p \Rightarrow q$ care se citește: „dacă p, atunci q“ sau „p este o condiție suficientă pentru q“ sau „q este o condiție necesară pentru p“.

În implicația $p \Rightarrow q$ propoziția p se numește **ipoteză**, iar propoziția q se numește **concluzie**.

Exemple:

1. Fie propozițiile p: „plouă“ și q: „cerul este înnorat“.
   Atunci $p \to q$: „Dacă plouă, atunci cerul este înnorat“.
2. Fie p: „$3 \cdot 3 = 10$“ – falsă; q: „Luna este satelitul natural al Pământului“ – adevărată. Atunci implicația $p \to q$: „Dacă $3 \cdot 3 = 10$, atunci Luna este satelitul natural al Pământului“ este adevărată.

3.2.5. Echivalența propozițiilor

Definiție

Echivalența propozițiilor p și q este propoziția notată $p \leftrightarrow q$ (se citește „p echivalent cu q“), care este adevărată atunci și numai atunci când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr; în celelalte situații este falsă.

Valoarea de adevăr a propoziției $p \leftrightarrow q$ este

$$v(p \leftrightarrow q) = 1 - v(p) - v(q) + 2v(p)v(q).$$

Valoarea de adevăr a propoziției $p \leftrightarrow q$ este dată în tabelul valorilor de adevăr alăturat.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Propoziția $p \leftrightarrow q$ se citește convențional „p dacă și numai dacă q“ și, prin definiție, este o notație pentru propoziția $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Cu alte cuvinte, echivalența este o prescurtare pentru conjuncția a două implicații de sens contrar.

Înțelesul exact al echivalenței este următorul:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\rceil p) \vee q) \wedge ((\rceil q) \vee p).$$

Exemple:

Fie propozițiile p: „$3^2 = 5$" – falsă și
q : „$4 < 3$" – falsă.
Cu ajutorul lor putem alcătui două implicații: „dacă $3^2 = 5$, atunci $4 < 3$" și
„dacă $4 < 3$, atunci $3^2 = 5$".
Conjuncția acestor două implicații este „(dacă $3^2 = 5$, atunci $4 < 3$) și (dacă $4 < 3$, atunci $3^2 = 5$)", care se mai formulează „$3^2 = 5$, dacă și numai dacă $4 < 3$".
Cum prima implicație este adevărată și implicația reciprocă este, de asemenea, adevărată, rezultă că și conjuncția lor este adevărată.

Exercițiu rezolvat

Verificați echivalența $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$

Rezolvare

Completăm tabelul valorilor de adevăr:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Din tabelul valorilor de adevăr se observă că $p \leftrightarrow q$ și $(p \to q) \wedge (q \to p)$ au aceleași valori de adevăr, deci este adevărată echivalența $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$.

Valoarea practică a teoremei precedente este considerabilă. Ea arată că pentru a demonstra echivalența $p \leftrightarrow q$ trebuie să demonstrăm implicațiile $p \to q$ și $q \to p$.

Definiție

O expresie care este adevărată oricare ar fi propozițiile componente se numește **lege logică** sau **tautologie**.

O expresie care este falsă oricare ar fi propozițiile componente se numește **contradicție logică**.

Exercițiu rezolvat

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $\rceil(p \vee q) \leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q$.

Rezolvare

Completăm tabelul valorilor de adevăr:

p	q	$p \vee q$	$\rceil(p \vee q)$	$\rceil p$	$\rceil q$	$\rceil p \wedge \rceil q$	$\rceil(p \vee q) \leftrightarrow \rceil q \wedge \rceil p$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Se observă că pe ultima coloană s-a obținut valoarea de adevăr 1, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor componente.

3.2.6. Legile lui De Morgan

Definiție

Fie două expresii propoziționale α și β. Spunem că α și β sunt expresii propoziționale **echivalente** dacă și numai dacă oricare ar fi propozițiile care le compun, expresiile sunt echivalente; se notează $\alpha \equiv \beta$.

Cu ajutorul unor expresii echivalente putem scrie regulile de negare a propozițiilor compuse. Aceste reguli de negare au fost enunțate de matematicianul De Morgan.

Legile lui De Morgan dau următoarele **reguli de negare**:

1. Oricare ar fi propozițiile p și q avem:

$$\boxed{\rceil(p \wedge q) \leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q}$$

2. Oricare ar fi propozițiile p și q avem:

$$\boxed{\rceil(p \vee q) \leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q}$$

Altfel spus:
- negația unei conjuncții este echivalentă cu disjuncția negațiilor,

iar
- negația unei disjuncții este echivalentă cu conjuncția negațiilor.

Întrucât conjuncția și disjuncția sunt operații interne pe mulțimea propozițiilor, putem scrie cu ajutorul unor expresii echivalente *proprietățile conjuncției și disjuncției*.

Proprietățile conjuncției:

1. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$, oricare ar fi propozițiile p și q;
2. $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, oricare ar fi propozițiile p, q și r;
3. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, oricare ar fi propozițiile p, q și r.

Proprietățile disjuncției:

1. $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$, oricare ar fi propozițiile p și q;
2. $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, oricare ar fi propozițiile p, q și r;
3. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, oricare ar fi propozițiile p, q și r.

Exerciții propuse

1. Decideți care dintre enunțurile de mai jos sunt propoziții:
a) Citește, te rog, prefața din această carte!
b) Nu este rău dacă citești prefața din această carte.
c) $3 + 5 = 8$.
d) Liceul la care învăț este renumit.

2. Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Toate numerele prime sunt impare.
b) Toate numerele impare sunt prime.
c) Există două numere consecutive prime.

Exerciții propuse

3. Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Dacă $4 = 5$, atunci $7 > 9$.
b) Dacă triunghiul are patru laturi, atunci și patrulaterul are patru laturi.
c) Dacă patrulatrul are patru laturi, atunci și triunghiul are patru laturi.
d) Dacă $2 > 2$, atunci 8 se divide cu 3.
e) Dacă $2 \geq 2$, atunci 8 se divide cu 3.

4. Considerăm propozițiile p: „Orice romb este paralelogram“ și
q: „Orice paralelogram este romb“.
Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:
a) p; b) q; c) $p \wedge q$; d) $p \vee q$; e) $p \rightarrow q$; f) $q \rightarrow p$; g) $p \leftrightarrow q$; h) $q \rightarrow \rceil p$; i) $\rceil p \rightarrow q$.

5. Arătați, folosind operațiile logice, că următoarele formule sunt tautologii:
a) $\rceil(\rceil p \vee \rceil q) \leftrightarrow p \wedge q$; b) $\rceil((p \wedge q) \vee r)) \leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil q) \wedge \rceil r$;
c) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$; d) $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$.

6. Verificați, folosind tabele de valori, următoarele echivalențe:
a) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$; b) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$; c) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$;
d) $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$; e) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
f) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; g) $\rceil(p \wedge q) \leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q$;
h) $\rceil(p \vee q) \leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q$; i) $\rceil(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \rceil q$.

3.3. Predicate. Cuantificatori

3.3.1. Predicat

Despre enunțurile care conțin necunoscute printre subiectele lor nu putem spune dacă sunt adevărate sau false.

Exemple:

1. În enunțul „$x + 3 = 7$“ întâlnim necunoscuta x din $\mathbb{R}$. Dacă înlocuim această necunoscută x cu diferite numere reale obținem propoziții. Pentru $x = 4$ obținem propoziția adevărată „$4 + 3 = 7$“, iar pentru $x = 1$ obținem propoziția falsă „$1 + 3 = 7$“.

2. În enunțul „Alina a primit nota 9“ avem mai multe necunoscute care trebuie precizate pentru a da acestui enunț o anumită valoare de adevăr. Trebuie precizat cine este Alina, la ce materie a primit nota 9 și când. Luând în considerare toate elevele cu numele Alina și toate notele lor (din toți anii), atunci cu siguranță, numai pentru anumiți elevi din această mulțime și numai pentru anumite note din anumite perioade enunțul „Alina a primit nota 9“ este o propoziție adevărată.

Un enunț care are, printre subiectele sale, cel puțin unul nedeterminat este un **predicat**. Numărul subiectelor nedeterminate dintr-un predicat se numește **numărul locurilor (libere)**.

Exemplu:

Enunțurile
A_1: „Persoana cutare locuiește pe strada cutare“,
A_2: „Animalul x este carnivor“
sunt predicate, având două locuri, respectiv un loc liber.

Orice propoziție poate fi privită convențional ca fiind un predicat cu 0 (zero) locuri. Subiectele nedeterminate dintr-un predicat se numesc **variabilele** predicatului respectiv.

Prin urmare, un predicat cu două locuri conține două variabile; o propoziție nu conține nici o variabilă.

Variabilele unui predicat se mai numesc și **variabile libere** și se notează, de obicei, cu simboluri literale (ca a, b, c, x, y, z etc.). Astfel, enunțul A_1 se poate scrie:

A_1: „x locuiește pe strada y."

Dacă precizăm într-un fel oarecare subiectele nedeterminate ale unui predicat (adică, dacă înlocuim toate variabilele sale prin subiecte determinate), atunci obținem o propoziție. Așadar, avem următoarea definiție:

Definiție

Fie o mulțime E și fie x un element oarecare (o *variabilă*) din mulțimea dată. Numim **predicat unar (cu o variabilă)** un enunț care depinde de variabila x și în care, dacă se înlocuiește variabila x cu orice element din mulțimea E, se obține o propoziție.

Mulțimea E în care variabila ia valori se numește **domeniul predicatului**.

Predicatul unar se notează prin „$x \in E$, $p(x)$".

Atunci când se dă un predicat trebuie să precizăm și valorile pe care le pot lua variabilele.

Predicatele pot fi: unare, binare, ternare etc. după cum depind respectiv de 1, 2, 3, ... variabile. În general, dacă predicatul depinde de n variabile se numește **predicat *n*-ar**.

Predicatele se notează astfel:

- predicatul unar: „$x \in E$, $p(x)$";
- predicatul binar: „$x \in E$, $y \in F$, $p(x, y)$";
- predicatul ternar: „$x \in E$, $y \in F$, $z \in G$, $p(x, y, z)$";
- predicatul n-ar: „$a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, ..., $a_n \in B_n$, $p(a_1, a_2, ..., a_n)$".

Exemple:

1. Enunțul „$x \in \mathbb{Z}$, $x - 3 = 2$" este un predicat unar ($p(x)$: „$x - 3 = 2$").
2. Enunțul „x, y oameni, x tatăl lui y" este un predicat binar ($p(x, y)$: „x este tatăl lui y").

Definiție

Pentru un predicat unar „$x \in E$, $p(x)$", mulțimea $A(p)$ a elementelor $a \in E$ pentru care $p(a)$ este o propoziție adevărată se numește **mulțimea de adevăr** a predicatului.

$$\boxed{A(p) = \{a \in E \mid p(a) \text{ adevărată}\}}$$

Pentru un predicat binar „$x \in E$, $y \in F$, $p(x, y)$" mulțimea $A(p)$ a perechilor (a, b) cu $a \in E$, $b \in F$ pentru care $p(a, b)$ este o propoziție adevărată se numește **mulțimea de adevăr** a predicatului.

$$\boxed{A(p) = \{(a, b) \in E \times F \mid p(a, b) \text{ adevărată}\}}$$

Analog pentru predicatele ternare, n-are etc.

Exemple:

1. Mulțimea de adevăr a predicatului „$x \in \mathbb{Z}$, $x - 5 = 1$“ este $a(p) = \{6\}$ deoarece propoziția $p(x)$: „$x - 5 = 1$“ este adevărată numai pentru $x = 6 \in \mathbb{Z}$.
2. Mulțimea de adevăr a predicatului „$x \in \mathbb{Z}$, $\frac{3n+5}{n-1} \in \mathbb{Z}$“ este $A(p) = \{-7, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 9\}$ deoarece propoziția $p(x)$: „$\frac{3n+5}{n-1} \in \mathbb{Z}$“ este adevărată numai pentru $\frac{3n+5}{n-1} = 3 + \frac{8}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{8}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n \in \{0, 2, -1, 3, -3, 5, -7, 9\}$.

3.3.2. Cuantificatori

Unele enunțuri se referă la toate elementele unei mulțimi.

Exemple:

1. *Toți* copacii din parc au înflorit.
2. Pentru *orice* $x \in \mathbb{R}$, avem $x^2 + 1 > 0$.
3. *Există* cel puțin un $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{3}{n+1} \in \mathbb{N}$.

Expresiile *toți*, *orice*, *există*, care se află în conținutul predicatului, se numesc **cuantificatori.**

Înainte de a trece la definirea cuantificatorilor facem observația că dacă p este un predicat care conține, de exemplu, variabilele x, y, z, atunci, în funcție de situație, putem pune în evidență una, două sau toate trei (sau chiar nici una) dintre variabilele lui p și putem scrie:

$$p \equiv p(x) \equiv p(x, y) \equiv p(x, y, z).$$

Observație: Semnul „$\equiv$“ utilizat anterior este numit simbolul egalității semantice și se citește „egal“ sau „înseamnă“.

În general, scrierea $p \equiv p(x)$ nu exclude posibilitatea (dacă acest lucru nu este specificat în mod expres), ca p să conțină și alte variabile.

Fiind dat un predicat „$x \in E$, $p(x)$“, care conține variabila x și care afirmă că obiectul desemnat cu x are proprietatea p, putem construi enunțurile notate simbolic cu $\exists\, xp$, $\forall\, xp$ (sau $\exists\, xp(x)$, $\forall\, xp(x)$ sau $\exists xp(x, y)$, $\forall\, xp(x, y)$ etc., în funcție de situație) și numite respectiv, *cuantificarea existențială* și *cuantificarea universală* a enunțului p, în raport cu variabila sa x.

Definiție

Fie predicatul unar „$x \in E$, $p(x)$“. Enunțul
„există cel puțin un x din E pentru care are loc $p(x)$“, notat **„$\exists\, x \in E$, $p(x)$“**, este o propoziție adevărată atunci și numai atunci când există cel puțin un element x_0 din E astfel încât propoziția $p(x_0)$ este adevărată și falsă când nu există nici un x_0 din E astfel încât $p(x_0)$ să fie adevărată.

Semnul ∃ se numește **cuantificator existențial**.

Propoziția „$\exists\, x \in E, p(x)$" este *adevărată* dacă mulțimea de adevăr a predicatului este nevidă ($A(p) \neq \varnothing$) și *falsă* dacă mulțimea de adevăr a predicatului este vidă ($A(p) = \varnothing$).

Propoziția „$\exists\, x \in E, p(x)$" se citește și „există x din E, $p(x)$" sau „se află x în E cu $p(x)$".

Exemple:

1. Considerăm predicatul „$x \in \mathbb{Z}, x - 2 = 3$", cu $p(x)$: „$x - 2 = 3$".
   Propoziția „$\exists\, x \in \mathbb{Z}, x - 2 = 3$" este adevărată, deoarece pentru $x_0 = 5$ propoziția $p(5)$: „$5 - 2 = 3$" este adevărată.
2. Fie predicatul $p(x)$: „$x^2 + 4 = 0$".
   Propoziția „$\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 = 0$" este falsă, deoarece nu există nici un număr real x_0 astfel încât să avem $x_0^2 + 4 = 0$.

Definiție

Fie predicatul unar „$x \in E, p(x)$". Enunțul

„**oricare ar fi $\boldsymbol{x}$ din $\boldsymbol{E}$ are loc $\boldsymbol{p(x)}$**", notat „$\boldsymbol{\forall x \in E, p(x)}$",

este o propoziție adevărată dacă pentru orice element x_0 din E, propoziția $p(x_0)$ este adevărată și este falsă în cazul când există cel puțin un x_0 din E pentru care $p(x_0)$ este falsă.

Semnul ∀ se numește **cuantificator universal**.

Propoziția „$\forall\, x \in E, p(x)$" este *adevărată* dacă mulțimea de adevăr a predicatului este mulțimea E ($A(p) = E$) și *falsă* dacă mulțimea de adevăr a predicatului este diferită de E ($A(p) \neq E$).

Propoziția „$\forall\, x \in E, p(x)$" se citește și „pentru orice $x \in E$, $p(x)$", toate elementele mulțimii E au proprietatea p".

Exemple:

1. Fie predicatul „$x \in \mathbb{Z}, x - 2 = 3$", cu $p(x)$: „$x - 2 = 3$".
   Propoziția „$\forall\, x \in \mathbb{Z}, x - 2 = 0$" este falsă, deoarece, de exemplu, pentru $x_0 = 6$ propoziția $p(6)$: „$6 - 2 = 3$" este falsă.
2. Considerăm predicatul „$x \in \mathbb{R}, (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$", cu $p(x)$: „$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$". Propoziția „$\forall x \in \mathbb{R}, (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$" este adevărată, deoarece pentru orice număr real x_0 avem $(x_0 + 2)^2 = x_0^2 + 4x_0 + 4$.

Exercițiu rezolvat

Fie predicatul unar „$x \in E, p(x)$", $E \neq \varnothing$. Atunci avem implicația:
$(\forall\, x \in E, p(x)) \to (\exists\, x \in E, p(x))$.

Rezolvare

Valoarea de adevăr a propoziției „$\forall\, x \in E, p(x)$" este $v(\forall\, x \in E, p(x)) = 1$ deoarece $E \neq \varnothing$. Rezultă $A(p) = E$, adică $A(p) \neq \varnothing$, deci și $v(\exists\, x \in E, p(x)) = 1$.
În concluzie, $(\forall\, x \in E, p(x)) \to (\exists\, x \in E, p(x))$.

3.3.3. Echivalența predicatelor

Definiție

Două predicate „$x \in E$, $p(x)$“ și „$x \in F$, $q(x)$“ se numesc **echivalente** dacă și numai dacă $E = F$ și propoziția „$\forall\, x \in E$, $p(x) \leftrightarrow q(x)$“ este adevărată.

Cu alte cuvinte, oricum am alege valorile variabilei x_0, propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ au aceeași valoare de adevăr.

Exemplu:

Considerăm predicatele „$x \in \mathbb{R}$, $p(x)$“, cu $p(x)$: „$x \geq 0$“ și „$x \in \mathbb{R}$, $q(x)$“, cu $q(x)$: „$x < 0$“. Se observă că $\rceil p(x) \Leftrightarrow q(x)$ deoarece propoziția „$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x < 0 \leftrightarrow x < 0$“ este adevărată și $\rceil q(x) \Leftrightarrow p(x)$ deoarece propoziția „$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0 \leftrightarrow x \geq 0$“ este adevărată.

3.3.4. Reguli de negație

Fie predicatul unar „$x \in E$, $p(x)$“. Atunci:

1. $\rceil(\exists\, x \in E, p(x)) \leftrightarrow (\forall\, x \in E, \rceil p(x))$;

2. $\rceil(\forall\, x \in E, p(x)) \leftrightarrow (\exists\, x \in E, \rceil p(x))$.

Demonstrație

1. Demonstrăm că cele două propoziții au aceeași valoare de adevăr. Următoarele afirmații sunt echivalente: $v(\rceil(\exists\, x \in E, p(x))) = 1$; $v(\exists\, x \in E, p(x) = 0$; $A(p) = \varnothing$; $v(\forall\, x \in E, \rceil p(x)) = 1$. Am obținut că $\rceil(\exists\, x \in E, p(x)) \leftrightarrow (\forall\, x \in E, \rceil p(x))$.

2. Demonstrăm că cele două propoziții au aceeași valoare de adevăr. Următoarele afirmații sunt echivalente: $v(\rceil(\forall\, x \in E, p(x))) = 1$; $v(\forall\, x \in E, p(x)) = 0$; $A(p) \neq E$; $v(\exists\, x \in E, \rceil p(x)) = 1$. Am obținut că $\rceil(\forall\, x \in E, p(x)) \leftrightarrow (\exists\, x \in E, \rceil p(x))$.

Exemplu:

Să considerăm predicatul „$x \in \mathbb{Z}$, $p(x)$“, cu $p(x)$: „$x + 5 = 7$“. Propoziția „$\exists x \in \mathbb{Z}$, $p(x)$“ este adevărată întrucât pentru $x_0 = 2$ propoziția $p(x_0)$: „$2 + 5 = 7$“ este adevărată. Atunci propoziția „$\rceil(\exists\, x \in \mathbb{Z}, p(x)$“ este falsă.
Pe de altă parte, predicatul „$\rceil(x \in \mathbb{Z}, p(x))$“ este echivalent cu predicatul „$x \in \mathbb{Z}$, $x + 5 \neq 7$“. Propoziția „$\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $x + 5 \neq 7$“ este falsă, deoarece pentru $x_0 = 2$ propoziția „$2 + 5 \neq 7$“ este falsă.
Prin urmare, am verificat că $\rceil(\exists\, x \in \mathbb{Z}, x + 5 = 7) \leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{Z}, \rceil(x + 5 = 7))$.

3.4. Echivalența și corelarea operațiilor logice elementare cu operațiile și relațiile cu mulțimi

Fie o mulțime nevidă E fixată. Toate mulțimile le vom considera ca submulțimi ale lui E și toate elementele x la care ne vom referi vor fi din E.

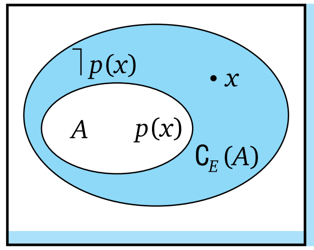
3.4.1. Corespondența dintre negația unei propoziții și complementara unei mulțimi

Vom „identifica“ orice mulțime A cu propoziția $p(x)$: „$x \in A$“.

Complementara mulțimii A în raport cu mulțimea E este mulțimea $\complement_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Prin urmare, complementara mulțimii A în raport cu E este mulțimea elementelor din E care nu aparțin lui A, adică este similară cu $\rceil p(x)$: „$x \notin A$“.

$$\complement_E(A) = \{x \mid \rceil p(x) \text{ adevărată}\}$$



3.4.2. Corespondența dintre conjuncția propozițiilor și intersecția mulțimilor

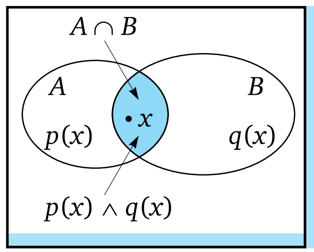
Fie A și B două mulțimi. Intersecția mulțimilor A și B este $A \cap B = \{x \mid x \in A \cap B\}$.

Fie propozițiile $p(x)$: „$x \in A$“ și $q(x)$: „$x \in B$“.

Conjuncția propozițiilor p și q este $p(x) \wedge q(x)$: „$x \in A$ și $x \in B$“, adică $p(x) \wedge q(x)$: „ $x \in A \cap B$“.

Prin urmare $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$;

$A \cap B = \{x \mid p(x) \wedge q(x) \text{ adevărată}\}$.



3.4.3. Corespondența dintre disjuncția propozițiilor și reuniunea mulțimilor

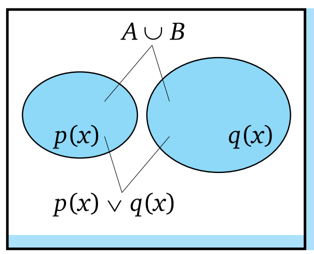
Fie A și B două mulțimi. Reuniunea mulțimilor A și B este $A \cup B = \{x \mid x \in A \cup B\}$.

Fie propozițiile $p(x)$: „$x \in A$“ și $q(x)$: „$x \in B$“.

Disjuncția propozițiilor p și q este $p(x) \vee q(x)$: „$x \in A$ sau $x \in B$“, adică $p(x) \vee q(x)$: „$x \in A \cup B$“.

Prin urmare $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$;

$A \cup B = \{x \mid p(x) \vee q(x) \text{ adevărată}\}$.

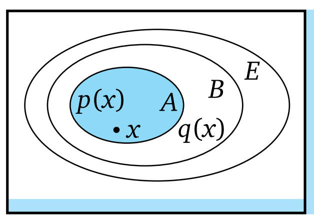


3.4.4. Corespondența dintre implicația propozițiilor și incluziunea mulțimilor

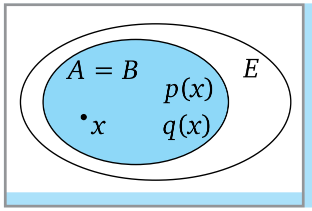
Fie A și B două mulțimi, $A \subseteq \mathrm{B}$.

Fie propozițiile $p(x)$: „$x \in A$“ și $q(x)$: „$x \in B$“.

Incluziunea $A \subseteq B$, adică $x \in A \Rightarrow x \in B$, se identifică în mod evident cu implicația $p \Rightarrow q$.



3.4.5. Corespondența dintre echivalența propozițiilor și egalitatea mulțimilor



Fie A și B două mulțimi egale ($A = B$).

Fie propozițiile $p(x)$: „$x \in A$“ și $q(x)$: „$x \in B$“.

Avem echivalențele: $A = B$; $x \in A \Leftrightarrow x \in B$; $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Prin urmare, egalitatea mulțimilor $A = B$ se identifică cu echivalența propozițiilor $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Paralelismul între algebra operațiilor cu mulțimi și algebra operațiilor cu propoziții este evidențiat de tabelul alăturat.

Mulțimi	**Propoziții**
Complementara	Negația
Intersecția	Conjuncția
Reuniunea	Disjuncția
Incluziunea	Implicația
Egalitatea	Echivalența

Observații:

1. Datorită acestui paralelism, teoremele din logică au corepondențe în teoria mulțimilor și invers.
2. Orice proprietate pe care o au operațiile cu mulțimi introduse pe mulțimea $\mathcal{P}(E)$ a părților unei mulțimi E se întâlnește și la operațiile logice și invers.

Exerciții propuse

1. Fie propozițiile $p(x)$: „9 divide x“; $q(x)$: „ultima cifră a numărului 4^x este 6“.
În mulțimea numerelor naturale definim predicatele „$x \in \mathbb{N}, p(x)$“ și „$x \in \mathbb{N}, q(x)$“.
Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor: $p(135)$; $q(135)$; $p(400)$; $q(400)$.

2. Fie predicatul „$x \in \mathbb{Z}, p(x)$“, cu $p(x)$: „4 divide numărul $16 - 8x + 2x^3 - x^4$.
Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: $\exists\, x \in \mathbb{Z}, p(x)$; $\forall x \in \mathbb{Z}, p(x)$.

3. Stabiliți care sunt mulțimile de adevăr ale predicatelor următoare:
a) $x \in \mathbb{R}, x + 1 = 4$; b) $x \in \mathbb{Z}, x^2 + 3x - 4 = 0$; c) $x \in \mathbb{N}, 3 < x^2 \leq 5$;
d) $x \in \mathbb{N}, |x| + |x - 1| = 3$; e) $x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0$;
f) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + (y - 1)^2 \leq 0$; g) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 0$.

4. Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false (răspundeți prin „adevărat“ sau „fals“):
a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;
b) $\exists\, x \in \mathbb{R}, x + 1 < 2$;
c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$?

5. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:
a) $\forall\, x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 \in \mathbb{N}$; b) $\exists\, x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 = 0$; c) $\exists\, x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 \neq 0$.

6. Se dau predicatele:
a) „$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, A(x, y)$“, cu $A(x, y)$: „$x < y$“;
b) „$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, B(x, y)$“, cu $B(x, y)$: „$x + y = 10$“;
c) „$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, C(x, y)$“, cu $C(x, y)$: „x divide y“;
d) „$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, D(x, y)$“, cu $D(x, y)$: „$x + y$ este un număr prim“.
Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: $A(1, 3)$; $A(2, 2)$; $B(1, 3)$; $C(4, 2)$; $D(5, 6)$.

Exerciții propuse

7. Se dă predicatul „$x \in \mathbb{R}, A(x)$“, cu $A(x)$: „$x^2 + 1 > 0$“.
Completați rândul al doilea al tabelului de mai jos cu valorile de adevăr ale propozițiilor scrise în primul rând:

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$

Folosiți cuantificatorul $\forall$ pentru a exprima valoarea de adevăr a acestor propoziții.

8. Se dau predicatele „Q patrulater, $A(Q)$“, cu $A(Q) = \{Q$ este un romb$\}$, și „Q patrulater, $B(Q)$“, cu $B(Q) = \{$diagonalele patrulaterului Q sunt perpendiculare$\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $A(Q) \Rightarrow B(Q)$.

9. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ și predicatul „$x \in M, y \in M, E(x, y)$“, cu $E(x, y)$: „$x + y \in M$“. Găsiți toate perechile de numere $(a, b) \in M \times M$ astfel încât propoziția $E(a, b)$ să fie adevărată.

10. Folosiți cuantificatorii $\forall$ și $\exists$ pentru a scrie simbolic propozițiile:
a) Orice număr natural x verifică inegalitatea $x^2 > x$.
b) Există numere naturale care se divid la numărul natural 5.
c) Există triunghiuri care au cele trei laturi egale.

3.5. Condiții necesare, condiții suficiente

Propozițiile care intervin în matematică sunt: definițiile, axiomele, postulatele și teoremele.

Definiții

- În matematică, prin **axiomă** se înțelege o propoziție ce exprimă un adevăr matematic și care, datorită experienței sociale foarte îndelungate, a devenit evidentă și este acceptată fără demonstrație.
- **Postulatele** sunt propoziții care stau la baza unei teorii și constituie punctul de plecare sau de capăt în demonstrarea altor propoziții; acestea se admit fără demonstrație.
- **Teorema** este o propoziție adevărată care stabilește faptul că unul sau mai multe obiecte matematice au o anumită proprietate.
  O **teoremă** arbitrară notată cu T este constituită din două părți: o propoziție numită *ipoteza teoremei* și o propoziție numită *concluzia teoremei*. Teorema stabilește o relație de implicație între cele două propoziții. Dacă ipoteza este adevărată, atunci concluzia se poate verifica. Notând cu p ipoteza teoremei T și cu q concluzia acestei teoreme, vom spune că propoziția T este adevărată dacă p implică q. Vom nota T: $p \to q$.

Să luăm două propoziții matematice arbitrare p și q. Este adevărată propoziția T: $p \to q$? Pentru a dovedi că această propoziță este adevărată, se caută o demonstrație a ei. Dacă se găsește o astfel de demonstrație, propoziția este numită *teoremă*. Dacă o astfel de demonstrație nu există, nu putem trage nici o concluzie; sunt posibile ambele alternative:

propoziția să fie adevărată (p implică q) sau să nu fie adevărată (p nu implică q). Pentru a dovedi că propoziția T nu este adevărată se caută un sistem se obiecte matematice pentru care să fie adevărată propoziția p, dar să nu fie adevărată propoziția q.

Definiție

Un sistem de obiecte matematice ce stabilește că o propoziție nu este adevărată se numește **contraexemplu**.

În concluzie, faptul că o propoziție este adevărată se stabilește printr-o demonstrație, faptul că ea este falsă, printr-un contraexemplu.

Teorema T: $p \rightarrow q$ poate fi exprimată în unul dintre următoarele 4 moduri:

a) Din ipoteza p se deduce concluzia q.
b) Ipoteza p implică (are drept consecință) concluzia q.
c) Propoziția p este o condiție suficientă pentru ca propoziția q să fie adevărată.
d) Propoziția q este o condiție necesară pentru ca propoziția p să fie adevărată.

Teoremei T: $p \rightarrow q$ i se pot asocia, în unele cazuri, două noi propoziții: **reciproca teoremei și teorema contrară**.

Reciproca unei teoreme este enunțul care se obține luând drept ipoteză concluzia teoremei și drept concluzie ipoteza teoremei.

Atenție! Reciproca unei teoreme poate să nu fie adevărată.

În cazul în care reciproca este adevărată, se numește **teorema reciprocă** și se notează T_r; vom avea $T_r : q \rightarrow p$.

Teorema contrară a teoremei T, notată cu T_c: $\rceil p \rightarrow \rceil q$, este propoziția adevărată ce se obține luând drept ipoteză contrara ipotezei teoremei T și drept concluzie contrara concluziei teoremei T (cu $\rceil p$ am notat propoziția obținută prin negarea propoziției p).

Se poate vorbi, de asemenea, de teorema contrară reciprocei.

Pentru teoremele T_r și T_c, teorema T se numește **teoremă directă**. Avem relațiile:

a) Teorema reciprocă a teoremei reciproce este teoremă directă.
b) Teorema contrară a teoremei contrare este teoremă directă.
c) Teorema contrară a teoremei reciproce coincide cu teorema reciprocă a teoremei contrare.

Simbolic se scrie: $(T_r)_r = T$; $(T_c)_c = T$; $(T_r)_c = (T_c)_r$.

Exemple

- Propoziția „Orice paralelogram are unghiurile opuse congruente este o *teoremă*. *Reciproca* este „Dacă un patrulater are unghiurile opuse congruente, atunci patrulaterul este paralelogram; reciproca este adevărată.
- *Teorema contrară* este „Dacă un patrulater nu este paralelogram, atunci nu are unghiurile opuse congruente“; teorema contrară este adevărată.
- *Teorema contrară reciprocei* este „Dacă unghiurile opuse ale unui patrulater nu sunt congruente, atunci patrulaterul nu este paralelogram“; teorema contrară reciprocei este adevărată.

Considerațiile făcute aici pot fi generalizate în următorul sens: ipoteza și concluzia unei teoreme sunt constituite, în general, dintr-un ansamblu de propoziții. Obținem atunci mai multe teoreme reciproce și contrare pentru o teoremă dată.

Studiul legăturilor logice dintre aceste teoreme constituie o generalizare a celor expuse mai sus.

Dacă o propoziție T: $p \to q$ este adevărată și este adevărată și reciproca ei T_r: $q \to p$ sau contrara T_c: $\rceil p \to \rceil q$, atunci acest lucru poate fi exprimat în mai multe feluri:

a) Propozițiile p și q sunt echivalente.
b) Propoziția q este adevărată dacă și numai dacă propoziția p este adevărată.
c) Propoziția q este adevărată atunci și numai atunci când propoziția p este adevărată.
d) Condiția necesară și suficientă ca propoziția q să fie adevărată este ca propoziția p să fie adevărată.

În toate aceste exprimări, locul propozițiilor p și q poate fi schimbat. Spunem că propozițiile p și q sun **echivalente** și scriem $p \Leftrightarrow q$.

Exemple

1. Dacă propozițiile $p(x)$: „$x^2 - 3x - 10 = 0$“ și $q(x)$: „$(x = -2) \vee (x = 5)$“ sunt definite pe $\mathbb{R}$, atunci $p \Leftrightarrow q$. Într-adevăr, p este o condiție necesară și suficientă pentru q, așa cum q este o condiție necesară și suficientă pentru p.

2. Există propoziții de tipul următor: „Mulțimea $\mathcal{M}$ de puncte constituie locul geometric al punctelor care au de proprietatea P“.
Pentru a demonstra că această propoziție este adevărată trebuie stabilite două implicații:
I_1. Dacă punctul M aparține mulțimii $\mathcal{M}$, atunci are loc proprietatea P.
Simbolic vom scrie: $M \in \mathcal{M} \to P(M)$ adevărată.
I_2. Dacă punctul M are proprietatea P, atunci el aparține mulțimii $\mathcal{M}$.
Simbolic vom scrie: $P(M)$ adevărat $\to M \in \mathcal{M}$
Observăm imediat că prima implicație este o teoremă T a cărei ipoteză este propoziția $M \in \mathcal{M}$, iar concluzia, adică propoziția $P(M)$, este adevărată.
Implicația a doua este teorema reciprocă a teoremei T.

Probleme propuse

1. Dintre următoarele enunțuri, alegeți-le pe cele care sunt axiome:
a) Două puncte distincte determină o dreaptă.
b) Trei puncte distincte determină un plan.
c) Orice triunghi isoscel are două mediane congruente.
d) Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta dată.

2. Pentru teoremele de mai jos construiți reciproca, teorema contrară și teorema contrară reciprocei și precizați valorile lor de adevăr:
a) Două drepte paralele determină un plan.
b) În orice romb diagonalele sunt perpendiculare și se împart în părți congruente.
c) Orice triunghi isoscel are două unghiuri congruente.
d) Orice dreptunghi are diagonalele congruente.

3. Demonstrați echivalența următoarelor propoziții:
p: „Triunghiul ABC este echilateral.“
q: „$AA' = BB' = CC'$, unde A', B', și C' sunt picioarele înălțimilor din vârfurile A, B, respectiv C ale triunghiului ABC.“

Probleme propuse

4. Tipuri de raționamente logice

4.1. Legea dublei negații

Fie propoziția p. Legea dublei negații spune că propoziția p este adevărată dacă și numai dacă negația propoziției care neagă propoziția p, adică $\rceil\rceil p$, este adevărată. Avem echivalența $\rceil\rceil p \leftrightarrow p$. Tabelul valorilor de adevăr este cel reprezentat alături.

p	$\rceil p$	$\rceil\rceil p$	$\rceil\rceil p \leftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Valoarea de adevăr este: $v(\rceil\rceil p) = 1 - v(\rceil p) = 1 - [1 - v(p)] = 1 - 1 + v(p) = v(p)$.

Exemple:

1. Fie propoziția p: „Luna iunie este o lună de vară". Avem $\rceil p$: „Luna iunie nu este o lună de vară" și $\rceil\rceil p$: „Este fals că *luna iunie nu este o lună de vară*".
   $v(p) = 1$ și $v(\rceil\rceil p) = 1$, deci $\rceil\rceil p \leftrightarrow p$.

2. Fie propoziția p: „Suma măsurilor a două unghiuri suplementare este 180°". Avem $\rceil p$: „Suma măsurilor a două unghiuri suplementare este diferită de 180°" și $\rceil\rceil p$: „Nu este adevărat că suma măsurilor a două unghiuri suplementare este diferită de 180°". $v(p) = 1$ și $v(\rceil\rceil p) = 1$, deci $\rceil\rceil p \leftrightarrow p$.

4.2. Legea terțiului exclus

Fie propoziția p cu orice valoare de adevăr.
Avem că propoziția $p \vee \rceil p$ este întotdeauna adevărată.
Tabelul valorilor de adevăr este cel reprezentat alături.

p	$\rceil p$	$p \vee \rceil p$
1	0	1
0	1	1

Valoarea de adevăr este:
$v(p \vee \rceil p) = v(p) + v(\rceil p) - v(p) \cdot v(\rceil p) = v(p) + 1 - v(p) + v(p) \cdot v(\rceil p) = 1$

Exemple:

1. Fie p: „$10 - 6 = 4$". Avem $\rceil p$: „$10 - 6 \neq 4$"; $p \vee \rceil p$: „$10 - 6 = 4$ sau $10 - 6 \neq 4$" este adevărată.

2. Fie p: „Afară plouă". Avem $\rceil p$: „Afară nu plouă"; $p \vee \rceil p$: „Afară plouă sau nu plouă" este întotdeauna adevărată deoarece ori plouă, ori nu plouă într-un anumit loc, la un anumit moment.

4.3. Reducerea la absurd

Demonstrația prin **reducere la absurd** implică și principiul „tertium non datur" – *principiul terțului exclus* – după care o propoziție este sau adevărată sau falsă. O altă situație nu este luată în considerare.

De multe ori, în matematică mai ales, se demonstrează adevărul unei propoziții p arătând că dacă ea nu este adevărată, adică dacă $\rceil p$ este adevărată, se obține o contradicție, adică o propoziție q despre care se arată că atât ea, cât și negația ei $\rceil q$ sunt ambele adevărate.

De aici se trage concluzia că p este adevărată.

Acest mod corect de raționament se obține combinând cu modus ponens observația că formula

$$(\rceil p \to (q \wedge \rceil q)) \to p$$

este o tautologie.

Îndată ce am reușit să demonstrăm că propoziția $\rceil p \to (q \wedge \rceil q)$ este adevărată, modus ponens ne arată că p este adevărată (modus ponens este un raționament corect care se poate enunța astfel: dacă $p \to q$ și dacă p este adevărată, atunci q este adevărată).

Metoda reducerii la absurd

Fie propozițiile p și q. Avem echivalența $(p \to q) \leftrightarrow (\rceil q \to \rceil p)$.

Tabelul valorilor de adevăr este:

p	q	$p \to q$	$\rceil q \to \rceil p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\rceil q \leftrightarrow \rceil p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Valoarea de adevăr este:

$v(\rceil q \to \rceil p) = 1 - v(\rceil q) + v(\rceil q)\, v(\rceil p) = 1 - [1 - v(q)] + [1 - v(q)][1 - v(p)] =$
$= 1 - 1 + v(q) + 1 - v(p) - v(q) + v(q) \cdot v(p) = 1 - v(p) + v(p) \cdot v(q) = v(p \to q).$

Exemplu:

Fie următoarea teoremă din geometria plană:
„Două drepte distincte paralele cu a treia sunt paralele între ele“.
Din teoremă desprindem:
Ipoteza p: $(d_1 \parallel d_3) \wedge (d_2 \parallel d_3) \wedge (d_1 \neq d_2)$.
Concluzia q: $d_1 \parallel d_2$.
În loc să demonstrăm implicația $p \to q$, demonstrăm $\rceil q \to \rceil p$.
Fie $\rceil q$: „$\exists$ un punct M astfel încât $d_1 \cap d_2 = \{M\}$“ și r: „prin M trec două paralele la d_3“.
Din $\rceil q$ adevărată rezultă r adevărată $(\rceil q \to r)$, iar din r adevărată, rezultă $\rceil p$ adevărată $(r \to \rceil p)$, ceea ce este fals pentru că altfel se contrazice axioma paralelelor pe care am admis-o ca fiind adevărată.

4.4. Inducția matematică

Metoda inducției matematice mai este cunoscută sub denumirea de „raționamentul din aproape în aproape“. Această metodă se aplică pentru a demonstra că anumite predicate $P(n)$, unde $n \in \mathbb{N}$, sunt adevărate pentru orice $n \geq a$ $(a \in \mathbb{N})$. Dezavantajul acestei metode constă în faptul că relația care trebuie demonstrată trebuie cunoscută dinainte. Sunt situații când prin analiza unor cazuri particulare se „întrezărește“ relația dorită.

Procesul prin care se deduce această relație poartă numele de **inducție matematică incompletă**. Relația însă nu poate fi acceptată decât pe baza unei demonstrații prin inducție completă. Unele dintre probleme vor fi tratate în două etape:

1. *inducția matematică incompletă*;
2. demonstrația prin *inducție matematică completă*.

Principiul inducției matematice complete se enunță astfel:
Fie „$n \geq a$, $P(n)$" un predicat. Dacă
1. propoziția $P(a)$ este adevărată
și **2.** oricare ar fi $k \geq a$, implicația $P(k) \to P(k+1)$ este adevărată,
atunci propoziția „$\forall\, n \geq a$, $P(n)$" este adevărată.

Observație:

Etapa (1) poartă numele de *etapa de verificare*. Propoziția de la etapa (2) se scrie prescurtat: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $(k \geq a)$. Pentru a verifica implicația din etapa (2) se arată că în toate cazurile în care $P(k)$ este adevărată $(\forall\, k \geq a)$ rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

În practică se parcurg următoarele etape:
Etapa I: Verificăm dacă propoziția inițială $P(a)$ este adevărată.
Etapa II: Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un anumit k, $k \geq a$, și vom demonstra că și $P(k+1)$ este adevărată.

Pentru verificarea implicației de la punctul (2) (adică parcurgerea etapei II) se exprimă întâi $P(k+1)$, înlocuindu-se k cu $k+1$ și apoi se caută „prelucrări" ale lui $P(k)$, astfel încât din $P(k)$ să rezulte $P(k+1)$ pentru acel k, $k \geq a$ – tehnică numită **recurență**.

Variind $k \in \mathbb{N}$, $k \geq a$, obținem $P(k)$ adevărată $\forall\, k \geq a$, cu alte cuvinte $P(n)$ este adevărată $\forall\, n \geq a$.

Observație:

În cazul în care se cere să se deducă o formulă și apoi să se demonstreze formula găsită prin inducție matematică, etapa I cuprinde mai multe „verificări", adică se calculează $P(a)$, $P(a+1)$, $P(a+2)$, ... până când se poate deduce o formulă, după care se trece la etapa II.

Problemele care urmează vor fi astfel selectate încât să ilustreze cât mai bine tehnica demonstrației prin recurență, fără a fi necesare cunoștințe specializate din alte capitole.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că pentru orice $n \geq 1$ avem:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rezolvare

Notăm cu $P(n)$ egalitatea din enunț. Membrul stâng al egalității conține n termeni.

Etapa I: Avem $P(1)$: $1^2 = (-1)^0 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2}$, adică $1 = 1$. $P(1)$ este adevărată.

Etapa II: Fie $P(k)$ adevărată, adică: $1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot n^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$. (1)

Vrem să demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată, adică:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k \cdot (k+1)^2 = \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.$$

Adunând în ambii membri ai egalității (1) pe $(-1)^k(k+1)^2$ (această adunare este sugerată de forma lui $P(k+1)$), obținem:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k \cdot (k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} - (-1)^{k-1}(k+1)^2 =$$

$= (-1)^{k-1}(k + 1)\dfrac{(-k-2)}{2} = (-1)^{k-1}(k + 1)(-1)\dfrac{k+2}{2} = \dfrac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}$,
adică $P(k + 1)$ este adevărată.
Așadar, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, $\forall\ k \geq 1$. Prin urmare, $P(n)$ este adevărată $\forall\ n \geq 1$.

2. Arătați că oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$, 9 divide $(4^n + 15n - 1)$.

Rezolvare

Notăm cu $P(n)$ propoziția „$9 \mid (4^n + 15n - 1)$". Aceasta înseamnă că există $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $4^n + 15n - 1 = 9k$.
Etapa I: Propoziția $P(1)$: „$9 \mid 4 + 15 - 1$" este adevărată deoarece $9 \mid 18$.
Etapa II: Avem $P(k + 1)$: „$9 \mid (4^{k+1} + 15(k + 1) - 1)$", adică „$9 \mid (4^{k+1} + 15k + 14)$".
Presupunând $P(k)$ adevărată, deducem că $4^k = 9k - 15k + 1$ și ținând seama că
$4^{k+1} + 15k + 14 = 4^k \cdot 4 + 15k + 14$, rezultă:
$4^{k+1} + 15k + 14 = (9m - 15k + 1) \cdot 4 + (15k + 14) = 9 \cdot 4m - 45k + 18 = 9(4m - 5k + 2)$,
adică $(4^{k+1} + 15k + 14)$ se divide cu 9 și deci avem $P(k + 1)$ adevărată.
Prin urmare, $P(n)$ este adevărată $\forall\ n \geq 1$.

3. Arătați că orice număr natural $n \geq 2$ poate fi scris sub forma $n = 2k_1 + 3k_2$, unde $k_1 \in \mathbb{N}$ și $k_2 \in \mathbb{N}$.

Rezolvare

Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț.
Etapa I: Propozițiile $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$ sunt adevărate deoarece:
$2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$ $(k_1 = 1, k_2 = 0)$
$3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1$ $(k_1 = 0, k_2 = 1)$
$4 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0$ $(k_1 = 2, k_2 = 0)$
$5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$ $(k_1 = 1, k_2 = 1)$
$6 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2$ $(k_1 = 0, k_2 = 2)$
Etapa II: Vom demonstra în continuare prin inducție matematică faptul că implicația
$P(k) \to P(k + 1)$ este adevărată pentru orice $n \geq 2$. Avem $P(k + 5)$: „$k + 5 = 2k_1' + 3k_2'$, unde $k_1' \in \mathbb{N}$ și $k_2' \in \mathbb{N}$."
Dacă propoziția $P(k)$ este adevărată, adică $k = 2k_1 + 3k_2$, atunci cu $k_1', k_2' \in \mathbb{N}$,
$k + 1 = 2k_1 + 3k_2 + 1 = 2k_1 + 3k_2 + 3 - 2 = 2(k_1 - 1) + 3(k_2 + 1) = 2k_1' + 3k_2'$,
unde $k_1' = k_1 - 1$ și $k_2' = k_2 + 1$. Rezultă că $P(k + 1)$ este adevărată.
Deci $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, de unde rezultă că $P(n)$ este adevărată $\forall\ n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculați produsul $P_n = \left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot \ldots \cdot\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$.

Rezolvare

Deoarece $P_1 = \dfrac{3}{4}$, $P_2 = \dfrac{4}{6}$, $P_3 = \dfrac{5}{8}$, iar $\dfrac{3}{4} = \dfrac{1+2}{2\cdot 1+2}$, $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2+2}{2\cdot 2+2}$, $\dfrac{5}{8} = \dfrac{3+2}{2\cdot 3+2}$, intuim că $P_n = \dfrac{n+2}{2n+2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Fie $P(n)$ această propoziție.
Etapa I: Evident $P(1)$ este adevărată.
Etapa II: Să presupunem că $P(k)$ este adevărată. În această ipoteză

$P_{k+1} = P_k\left[1-\dfrac{1}{(k+2)^2}\right] = \dfrac{k+2}{2k+2}\cdot\dfrac{k^2+4k+3}{(k+2)^2} = \dfrac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+3}{2k+4} = \dfrac{(k+1)+2}{2(k+1)+2}$, ceea ce arată că $P(k + 1)$ este adevărată.

Deci $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, de unde rezultă că $P(n)$ este adevărată. Așadar, $P_n = \dfrac{n+2}{2n+2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

5. Arătați că $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare

Fie $P(n)$: „$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$“.

Etapa I: Întrucât $\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}=\frac{1}{2}$, rezultă că $P(1)$ este adevărată.

Etapa II: Să presupunem că $P(k)$ este adevărată.

În această ipoteză $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$.

Ținând seama și de faptul că $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$ (deoarece oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$ avem $(2k+1)^2(3k+4)<(2k+2)^2(3k+1)$ adevărată, deducem că

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}\le\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$, ceea ce arată că $P(n+1)$ este adevărată.

Rezultă că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ și deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Exerciții propuse

1. Să se precizeze dacă implicația următoare este adevărată:
„Dacă un patrulater are două laturi paralele, atunci el este trapez“.
Implicația reciprocă este adevărată?

2. Precizați dacă următoarele implicații sunt adevărate:
a) „Dacă $A\cup B=A\cup C$, atunci $B=C$“.
b) „Dacă $A\cap B=A\cap C$, atunci $B=C$“.

3. Se știe că paralelogramul este patrulaterul cu laturile opuse paralele două câte două. Completați:
a) Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater să fie paralelogram este ca laturile opuse să fie ...
b) Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater să fie paralelogram este ca două laturi opuse să fie ...
c) Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater să fie paralelogram este ca unghiurile opuse să fie ...
d) Condiția necesară și suficientă pentru ca un patrulater să fie paralelogram este ca diagonalele lui să fie ...

4. a) Arătați că o condiție necesară pentru ca numărul $a_n=2^n+3^n(n\in\mathbb{N})$ să fie prim este să existe $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $n=2^k$.
b) Este condiția de la punctul a) și suficientă?

5. Scrieți în limbaj logic (punând în evidență ipoteza și concluzia) teorema lui Pitagora, reciproca ei, contrara ei și contrara reciprocei. Care sunt valorile lor de adevăr? Prin ce fel de raționament se demonstrează fiecare dintre ele?

6. Demonstrați că numărul $\sqrt{3}$ nu este rațional.

7. Folosind metoda inducției matematice, demonstrați că, pentru orice număr natural n, sunt adevărate egalitățile:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

e) $1 + 2 \cdot (1 + 2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3) + ... + n \cdot (1 + 2 + ... + n) =$
$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+2)}{24}$;

f) $\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{5^2}\right)...\left[1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right]=\frac{1+2n}{1-2n}$.

8. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, au loc egalitățile:

a) $\frac{7}{(1\cdot 6)^2} + \frac{17}{(6\cdot 11)^2} + \frac{27}{(11\cdot 16)^2} + ... + \frac{10n-3}{[(5n-4)(5n+1)]^2} = \frac{5n^2+2n}{(5n+1)^2}$;

b) $\frac{3}{1\cdot 3} + \frac{7}{2\cdot 4}\cdot 3 + \frac{11}{3\cdot 5}\cdot 3^2 + ... + \frac{4n-1}{n(n+1)}\cdot 3^{n-1} = \frac{4n+5}{2(n+1)(n+2)}\cdot 3^n - \frac{5}{4}$.

9. a) Arătați că $17 \mid (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Arătați că $24 \mid (13^{n+1} + 6 \cdot 3^n + 5)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
c) Demonstrați că $5 \mid (11^n - 6^n - 1)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

10. Simplificați fracția: $\frac{2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2}{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}$.

11. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile:

$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$.

12. Demonstrați că dacă $n \geq 5$, atunci $2^n > n^2$.

13. Demonstrați inegalitățile următoare:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$;

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

14. Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Folosind metoda inducției matematice complete, arătați că dacă $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, atunci $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

Exerciții propuse

Test de evaluare

1p **1.** Calculați produsul xyz dacă: $x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1$.

1p **2.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b = 2$. Demonstrați că $a^4 + b^4 \geq 2$.

1p **3.** Rezolvați inecuația: $|x| + |x - 2| \leq 2x$.

1p **4.** Rezolvați ecuația $\left[\frac{2x+1}{5}\right] = \frac{x-2}{3}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

5. Se consideră predicatul binar $P(x, y)$: „$x(2 - x) + y(4 - y) \geq 5$“, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

0,5p a) $(\forall x), (\forall y), P(x, y)$;

0,5p b) $(\exists x), (\exists y), P(x, y)$.

1p **6.** Se dau mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = \frac{3n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ și } B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \frac{4n+5}{2n+3}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Determinați: $A, B, A \cap B, A \setminus B, A \times B$.

7. Folosind metoda inducției matematice, demonstrați că au loc relațiile:

1p a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

1p b) $2^n \geq n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$;

1p c) $(3^n + 2n - 1) \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 2

Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale: șiruri, progresii. Probleme de numărare

1. Modalități de a defini un șir; șiruri măginite, șiruri monotone

1.1. Șiruri; generalități

Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ poate fi privită ca o succesiune de numere 0, 1, 2, 3, ... căreia i se mai spune *șirul numerelor naturale*.

Analog, mulțimea numerelor naturale nenule $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ poate fi privită ca o succesiune de numere 1, 2, 3, ... căreia i se spune *șirul numerelor naturale nenule*.

Elementele componente ale unui șir se numesc **termenii** șirului.

Intuitiv, prin șir de elemente înțelegem o succesiune de elemente, fiecare element având o poziție bine determinată.

Exemplu:

În succesiunea $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, ..., \frac{1}{n}, ...$ pe prima poziție avem fracția cu numitorul 1, pe poziția a doua fracția cu numitorul 2 ș.a.m.d, pe poziția a n-a este fracția cu numitorul n.

Observăm că se realizează o corespondență de tipul celei din figura alăturată, corespondență care se poate scrie concentrat $k \to \frac{1}{k}$.

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & ..., & n, & ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & ..., & \frac{1}{n}, & ... \end{array}$$

Considerând funcția $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, putem spune că termenii șirului sunt de forma:

$a_1 = f(1) = 1$, $a_2 = f(2) = \frac{1}{2}$, ..., $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$, ...

Definiție

Dacă E este o mulțime, prin **șir** de elemente din E vom înțelege o funcție $f : \mathbb{N}^* \to E$. Valorile funcției f corespunzătoare elementelor 1, 2, 3, ..., n, ... se numesc **termenii șirului** de rang 1, 2, 3, ..., n, ...

Dacă notăm $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, ..., f(n) = a_n, ...$ șirul se scrie:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Termenul a_n se numește **termenul general** al șirului.

Șirul de numere $a_1, a_2, a_3 ..., a_n, ...$ se notează prescurtat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sau $(a_n)_{n \geq 1}$.

Numărul natural n reprezintă **rangul** termenului a_n și indică poziția ocupată de a_n în succesiunea dată.

1.2. Modalități de a defini un șir

Deoarece șirul este o funcție, modalitățile de a defini un șir sunt generate de cele ale definirii unei funcții.

1.2.1. Șiruri definite descriptiv

Definirea **descriptivă** a șirului presupune descrierea fiecărui termen al șirului.

Exemplu:

$a_1 = 2, a_2 = 22, a_3 = 222, .., a_n = \underbrace{22...2}_{n \text{ cifre}}, ...$

Acest șir se poate descrie astfel: fiecare termen se scrie cu ajutorul cifrei 2, iar numărul cifrelor este egal cu rangul termenului șirului.

1.2.2. Șiruri definite prin formulă

Definirea **prin formulă** a șirului presupune exprimarea termenului general printr-o anumită expresie.

Expresia care determină fiecare termen al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ folosind rangul său n se numește **formula termenului general a_n.**

Exemplu:

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, termenul general a_n este dat de formula $a_n = n^2 + n + 1$. Această formulă exprimă fiecare termen al șirului în funcție de rangul său n, astfel: pentru $n = 1$ obținem primul termen $a_1 = 3$, pentru $n = 2$ obținem al doilea termen $a_2 = 7$, pentru $n = 3$ obținem al treilea termen $a_3 = 13$ etc.

Observație: Termenul general al unui șir poate fi exprimat și prin mai multe formule.

Exemplu:

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ al cărui termen general este dat prin $a_n = \begin{cases} n+1, & \text{pentru } n \text{ impar} \\ 2n, & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases}$.

Obținem $a_1 = 1 + 1 = 2, a_2 = 2 \cdot 2 = 4, a_3 = 3 + 1 = 4, a_4 = 4 \cdot 2 = 8$ etc.

1.2.3. Șiruri definite recurent

Definirea **prin recurență** a șirului presupune exprimarea oricărui termen al șirului, începând cu un anumit rang, în funcție de unul sau mai mulți termeni precedenți.

În această situație trebuie să se cunoască:

- primii sau primul termen al șirului (sau să se poată afla);
- relația de recurență (formula care permite determinarea fiecărui termen al șirului în funcție de cei precedenți).

Exemplu:

Fie șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \geq 1$. Cunoscând primul termen al șirului $a_1 = 1$ și legătura dintre termenul de rang $n + 1$ și termenul de rang n, dată prin formula $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \geq 1$, putem găsi oricare termen al șirului după cum urmează:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7 \text{ etc.}$$

1.3. Șiruri mărginite

Definiții

- Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numește **mărginit** dacă există un număr real M, $M > 0$, astfel încât $|a_n| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

- Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numește **mărginit** dacă există numerele reale α și β, $\alpha < \beta$, astfel încât $\alpha \leq a_n \leq \beta$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

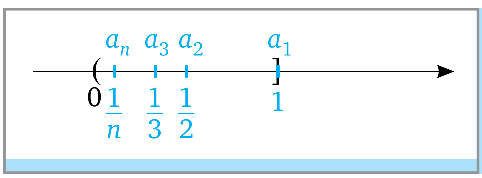
Observație:

Șirurile care nu sunt mărginite se numesc șiruri **nemărginite**. Un șir este nemărginit dacă nici un interval mărginit nu conține toți membrii șirului. Șirurile nemărginite pot fi:

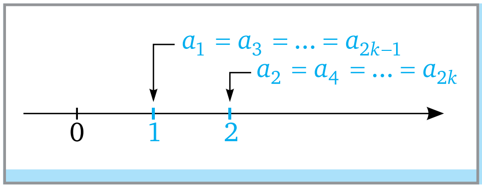
- **Nemărginite superior** – oricare ar fi numărul real $M > 0$ există cel puțin un termen a_n al șirului astfel încât $a_n > M$.
- **Nemărginite inferior** – oricare ar fi numărul real $M > 0$ există cel puțin un termen a_n al șirului astfel încât $a_n < -M$.
- **Nemărginite superior și inferior** – oricare ar fi numărul real $M > 0$ există cel puțin un termen a_n al șirului astfel încât $a_n > M$ și există cel puțin un termen a_m al șirului astfel încât $a_m < -M$.

Exemple:

1. Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin termenul general $a_n = \dfrac{1}{n}$ este mărginit deoarece toți termenii săi sunt cuprinși în intervalul $(0, 1]$, adică $0 < a_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.



2. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit descriptiv prin 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2, ... este mărginit deoarece termenii săi sunt numai numerele 1 și 2 astfel $a_{2k-1} = 1$, $a_{2k} = 2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Avem: $1 \le a_n \le 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.



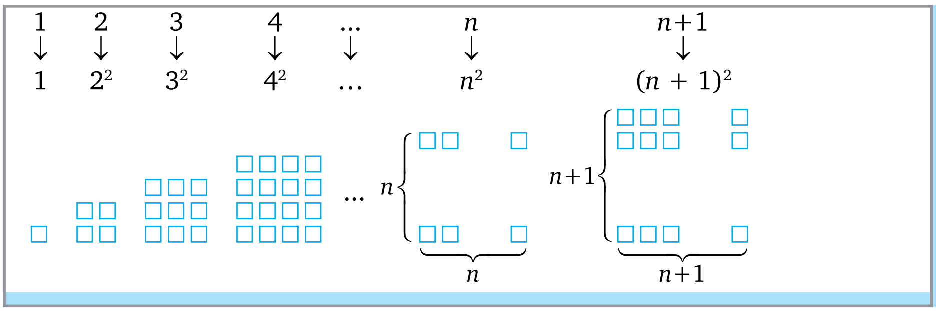
3. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin formula $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit deoarece $|a_n| = \left|(-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}\right| = \dfrac{n}{n+1} < 1$, adică există $M = 1 > 0$ real astfel încât $|a_n| < M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

4. Șirul numerelor naturale este nemărginit superior deoarece $\forall\, M > 0$ real există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n > [M] + 1$ (avem $[M] \le M < [M] + 1$ și $n > [M] + 1 > M$).

5. Șirul numerelor întregi este nemărginit atât superior, cât și inferior deoarece $\forall\, M > 0$ real, există $n \in \mathbb{N}^*$ și $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ astfel încât $n > [M] + 1$ și $m < -[M] - 1$ (avem $[M] \le M < [M] + 1$, deci $n > [M] + 1 > M$ și $m < -[M] - 1 < -M$).

6. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit descriptiv prin 2, 4, 8, ..., 2^n, ... este nemărginit superior deoarece $\forall\, M > 0$ real, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^n > [M] + 1 > M$.

7. Șirul pătratelor numerelor naturale nenule este nemărginit superior.



1.4. Șiruri monotone

Monotonia unui șir se referă la aspectul termenilor șirului: dacă termenii sunt într-o anumită ordine (și atunci avem crescătoare, descrescătoare sau constante) sau dacă nu au nici o ordine (și atunci avem șiruri alternative).

Definiție

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **crescător** dacă $a_{n+1} \ge a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu:

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat descriptiv prin 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., $\underbrace{n, n, ..., n}_{n \text{ ori}}$, ...

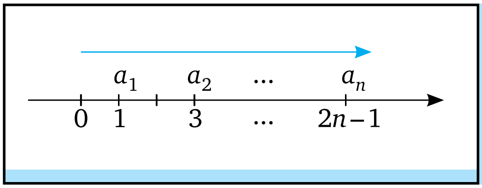
este crescător deoarece $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = a_5 = a_6 = 3$ etc. și $a_1 < a_2 = a_3 < a_4 = a_5 = a_6 < a_7$ ...

Definiție

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **strict crescător** dacă $a_{n+1} > a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu:

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat descriptiv prin 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ... este strict crescător deoarece $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ etc și $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$.



Definiție

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **descrescător** dacă $a_{n+1} \le a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu:

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat descriptiv prin $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, \dots$ este descrescător

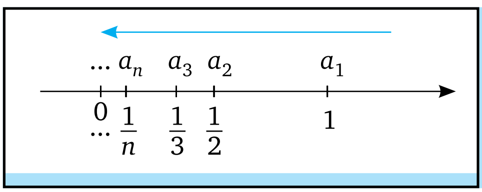
deoarece $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = a_5 = a_6 = \frac{1}{3}$ etc. și $a_1 > a_2 = a_3 > a_4 = a_5 = a_6 > \dots$

Definiție

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **strict descrescător** dacă $a_{n+1} < a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu:

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat descriptiv prin $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ este strict descrescător deoarece $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$ etc. și $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$.



Definiție

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **constant** dacă $a_{n+1} = a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu:

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat descriptiv prin 2, 2, 2, ..., 2, ... este constant deoarece $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Observație:

Pentru a studia monotonia unui șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se calculează diferența $a_{n+1} - a_n$ și se compară cu zero.

- Dacă $a_{n+1} - a_n \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir crescător.
- Dacă $a_{n+1} - a_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir strict crescător.
- Dacă $a_{n+1} - a_n \leq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir descrescător.
- Dacă $a_{n+1} - a_n < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir strict descrescător.

Exerciții rezolvate

1. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin formula $a_n = \frac{n}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați monotonia.

Rezolvare

Avem $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

2. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin formula $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Studiați monotonia.

Rezolvare

Din $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ deducem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

Observație:

Pentru a stabili monotonia șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termeni pozitivi, în anumite cazuri, este convenabil să studiem raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ și să comparăm acest raport cu 1.

Pot apărea următoarele situații:

- Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.
- Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător.
- Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.
- Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

3. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n \cdot (n + 1)$, $n \geq 1$. Studiați monotonia.

Rezolvare

Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1 > 1$, $n \geq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Deducem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

Definiție

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Definim suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ pentru orice $n \geq 1$. Avem $S_n - S_{n-1} = a_n$, $\forall\, n \geq 2$.

Șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **șirul sumelor parțiale** asociat șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercițiu rezolvat

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul sumelor parțiale asociat lui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Determinați formula care definește termenul general al lui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă $S_n = n^2$, $n \geq 1$.

Rezolvare

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\forall\, n \geq 1$, deci $S_n - S_{n-1} = a_n$, $\forall\, n \geq 1$.

Avem că $a_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$, $\forall\, n \geq 1$.

Exerciții propuse

1. Scrieți:

a) primii cinci termeni ai șirului numerelor naturale impare;

b) primii șase termeni ai șirului numerelor naturale pare;

c) primii șapte termeni ai șirului numerelor prime;

d) primii patru termeni ai șirului numerelor nenule multipli de 3; 4 și, respectiv, 5.

2. Scrieți primii cinci termeni ai șirului cu termenul al n-lea, $n \in \mathbb{N}^*$, dat de formula:

a) $a_n = 2n + 3$; b) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$; c) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$;

d) $a_n = 3^{-n}$; e) $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

3. Scrieți primii cinci termeni ai șirului definit prin formula de recurență:

a) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $n \geq 1$; b) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 3$, $n \geq 1$;

c) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $n \geq 1$; d) $a_1 = 0$; $a_{n+1} = \dfrac{1 - a_n}{1 + a_n}$, $n \geq 1$.

4. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general dat prin formula $a_n = 2 - 3n$, $n \geq 1$. Precizați care dintre numerele $-7, -8, -27, -28, -297, -298, -2097, -2098$ sunt termeni ai șirului și stabiliți rangul acestora.

5. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definite prin formulele:

$a_n = n^2 + n + 1$, $\forall\, n \geq 1$ și $b_n = 2n^2 - 3n + 5$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Scrieți primii șapte termeni ai fiecărui șir.

b) Determinați termenii comuni ai celor două șiruri.

6. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat prin formula $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați rangul termenilor $\dfrac{8}{9}$, 0,99; $\dfrac{80}{81}$; 0,9999.

b) Calculați produsul $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{22}$.

7. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu proprietatea $a_{n+1} = a_n + b_n$, $\forall\, n \geq 1$.
b) Calculați suma $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $\forall\, n \geq 1$.

8. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit recurent astfel: $a_1 = 1$; $a_2 = 13$; $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $\forall\, n \geq 1$.
a) Determinați numerele reale α și β pentru care $a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot (-2)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
b) Demonstrați că $a_n = 3^n + (-2)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

9. Găsiți formula care definește termenul general al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:
a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$, $\forall\, n \geq 1$; b) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$, $\forall\, n \geq 1$;
c) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$, $\forall\, n \geq 1$; d) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n^2$, $\forall\, n \geq 1$;
e) $a_1 = 1$, $(n + 1)a_{n+1} = n \cdot a_n$, $\forall\, n \geq 1$; f) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n + 1)a_n$, $\forall\, n \geq 1$;
g) $a_1 = 1$, $(n + 1)a_{n+1} = a_n$, $\forall\, n \geq 1$; h) $a_1 = 1$, $n \cdot (1 + a_n)\, a_{n+1} = 1$, $\forall\, n \geq 1$;
i) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall\, n \geq 1$; j) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$;
k) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} + a_{n-1} = 2(1 + a_n)$, $\forall\, n \geq 1$; l) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, $\forall\, n \geq 1$;
m) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_{n+3} = a_{n+2} + 3a_{n+1} + 9a_n$, $\forall\, n \geq 1$.

10. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șirul sumelor parțiale asociat lui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Determinați formula care definește termenul general al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ știind că:

a) $S_n = n^2 + n$, $\forall\, n \geq 1$; b) $S_n = \dfrac{n(3n+5)}{2}$, $\forall\, n \geq 1$;

c) $S_n = \dfrac{n(a_n + a + 2)}{2}$, $\forall\, n \geq 1$; d) $S_n = \dfrac{n(an + a + b)}{2}$, $\forall\, n \geq 1$;

e) $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall\, n \geq 1$; f) $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall\, n \geq 1$; g) $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall\, n \geq 1$.

11. Studiați mărginirea șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ unde:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$; b) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$, $\forall\, n \geq 1$; c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, $\forall\, n \geq 1$;

d) $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$, $\forall\, n \geq 1$; e) $a_n = 1 + (-1)^n$, $\forall\, n \geq 1$; f) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$, $\forall\, n \geq 1$;

g) $a_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$, $\forall\, n \geq 1$; h) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^n + 2}$, $\forall\, n \geq 1$.

12. Studiați monotonia șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde:

a) $a_n = \dfrac{3n+2}{4n+3}$, $\forall\, n \geq 1$; b) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$, $\forall\, n \geq 1$; c) $\dfrac{5n+4}{4n+3}$, $\forall\, n \geq 1$;

d) $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$, $\forall\, n \geq 1$; e) $a_n = \dfrac{3^n+2}{3^n+1}$, $\forall\, n \geq 1$; f) $a_n = \dfrac{4^n+1}{4^n+2}$, $\forall\, n \geq 1$;

g) $a_n = \dfrac{a^n + b}{a^n + b + 1}$, $\forall\, n \geq 1$, $a > 1$ și $b > 0$; h) $a_n = n + (-1)^n$, $\forall\, n \geq 1$.

Exerciții propuse

2. Progresii aritmetice

2.1. Definirea progresiei aritmetice

Exemple:

- Fie șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ..., n, ... Se observă că fiecare termen al șirului, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea numărului 1.
- Fie șirul numerelor naturale impare 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ... Observăm că fiecare termen al acestui șir, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea numărului 2.
- Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = a_n + 3$, $\forall\, n \geq 1$.
  Deducem că $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$, $a_5 = 14$ etc.
  Observăm, ca și la exemplele anterioare, că fiecare termen al șirului, cu excepția primului, se obține din termenul precedent prin **adăugarea unui același număr** și anume 3.

Asemenea șiruri de numere se numesc **progresii aritmetice**.

Definiție

Un șir de numere cu proprietatea că fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea aceluiași număr se numește **progresie aritmetică**.

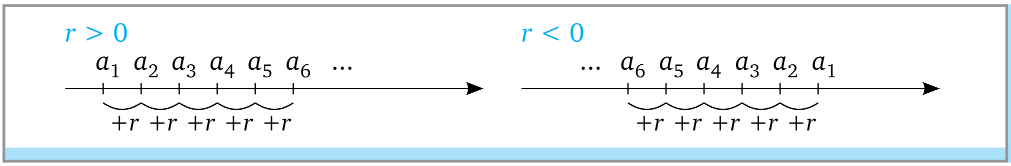
Reformulare

Un șir de numere $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o **progresie aritmetică** dacă pentru orice $k \geq 1$ are loc relația

$$\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$$

unde r este un număr real dat.

Numărul r se numește **rația progresiei aritmetice**.



Observații:

1. Într-o progresie aritmetică, diferența dintre orice termen și precedentul său este aceeași, și anume rația r:

$$a_{n+1} - a_n = a_n + r - a_n = r, \ \forall\, n \geq 1$$

2. O progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ **este bine determinată** dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)r
\end{aligned}$$

3. Spunem că numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ **sunt în progresie aritmetică** dacă sunt *termeni consecutivi* ai unei progresii aritmetice.

Exemple:

1. Numerele 3, 5, 7 sunt în progresie aritmetică deoarece sunt termeni consecutivi ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$: 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ...
2. Numerele -1, 5, 11, 17 sunt în progresie aritmetică deoarece sunt termeni consecutivi ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ cu primul termen $a_1 = -1$ și rația $r = 6$.

Notație

Pentru a pune în evidență faptul că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică se utilizează scrierea:

$$\div\ a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

2.2. Proprietățile progresiei aritmetice

1. Într-o progresie aritmetică orice termen, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui.

Proprietatea 1

Dacă $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...$ este o progresie aritmetică, atunci pentru orice $n \geq 2$ are loc relația $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Demonstrație

Pentru $n \geq 2$ avem $a_n = a_{n-1} + r$ și $a_n = a_{n+1} - r$.

Adunând cele două egalități obținem $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Este adevărată și **afirmația reciprocă**, adică:

2. Dacă un șir de numere are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, atunci acest șir este o progresie aritmetică.

Proprietatea 2

Fie șirul $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...$ cu proprietatea că pentru orice $n \geq 2$ are loc relația $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Atunci șirul dat este o progresie aritmetică.

Demonstrație

Din $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall\, n \geq 2$, obținem $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, $\forall\, n \geq 2$.

Ultima egalitate arată că diferența dintre orice termen al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și predecesorul său este aceeași, adică $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.

2.3. Formula termenului general al unei progresii aritmetice

Dacă într-o progresie aritmetică $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ cunoaștem primul termen a_1 și rația r ne propunem să găsim o formulă care să exprime orice termen al progresiei, adică termenul general.

Din definiția progresiei aritmetice avem:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r\\
a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r\\
a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + r = [a_1 + (n-2)r] + r = a_1 + (n-1)r.
\end{aligned}$$

Vom demonstra prin inducție matematică propoziția:

$$P(n)\colon a_n = a_1 + (n-1)r,\ n \geq 1$$

Etapa I: $P(1)$: $a_1 = a_1$ adevărat.

Etapa II: Vrem $P(k)$ adevărată implică $P(k+1)$ adevărată.

Știm că $a_k = a_1 + (k-1)r$ și vrem să demonstrăm că $a_{k+1} = a_1 + kr$.

Avem $a_{k+1} = a_k + r = [a_1 + (k-1)r] + r = a_1 + kr$.

Din $P(1)$ adevărată și $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, deducem că $P(n)$ este propoziție adevărată pentru orice $n \geq 1$, n natural.

Termenul de rang n al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este dat prin formula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r,\ \forall\, n \geq 1}$$

Exercițiu rezolvat

Fiind dată progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu primul termen $a_1 = 1$ și rația $r = 3$, calculați a_{10}, a_{20}, a_{31}.

Rezolvare

Folosind formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1)r$, obținem (dând lui n valorile 10, 20, respectiv 31):

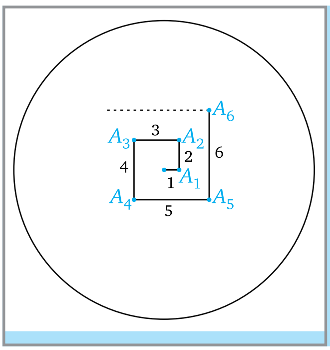
$a_{10} = a_1 + 9r = 1 + 9 \cdot 3 = 1 + 27 = 28;$

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot r = 1 + 19 \cdot 3 = 1 + 57 = 58;$

$a_{31} = a_1 + 30 \cdot r = 1 + 30 \cdot 3 = 1 + 90 = 91.$

Activitate independentă

În cercul de centru O și rază $R = 20$ se construiesc, în același sens, segmentele perpendiculare două câte două alăturate, cu măsurile numere întregi consecutive: $OA_1 = 1$, $OA_1 \perp A_1A_2$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 \,||\, OA_1$, $A_2A_3 \perp A_1A_2$, $A_2A_3 = 3$ etc. (vezi figura alăturată).



a) Determinați n pentru care segmentul A_nA_{n+1} are capătul A_n în interiorul cercului și capătul A_{n+1} în exteriorul cercului.

b) Ce valori poate avea raza R dacă segmentul A_1A_2 are un capăt în interiorul cercului și celălalt în exteriorul cercului?

2.4. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Ne propunem să găsim suma primelor n numere naturale, notată:

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, numită **suma lui Gauss**.

Organizăm suma în două moduri:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1,$$

apoi adunăm cele două sume și obținem:

$$2S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n \text{ ori}}.$$

Suma va fi:

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Analog se poate proceda pentru calculul sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, demonstrând mai întâi că este adevărată următoarea propoziție:

Propoziție

Suma oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egală cu suma numerelor extreme.

Reformulare

Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică, atunci:

$$\boxed{a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n}$$

Demonstrație

Avem $a_k = a_1 + (k-1)r$ și $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)r$.

Prin însumare obținem: $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + (n-1)r \Leftrightarrow a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Folosind propoziția anterioară avem:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Adunând cele două egalități obținem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_n + a_1)$$

Deci $2S_n = n(a_1 + a_n) \Leftrightarrow S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

În concluzie, suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$ este dată de formula

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2},\ \forall\, n \ge 1}$$

Exercițiu rezolvat

Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 4$, $\forall\, n \ge 1$.
Calculați suma primilor 13 termeni.

Rezolvare

Avem $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, …, $a_{13} = a_1 + 12 \cdot r = 1 + 12 \cdot 4 = 1 + 48 = 49$.

$$S_{13} = \frac{(a_1 + a_{13})\cdot 13}{2} = \frac{(1+49)\cdot 13}{2} = \frac{50 \cdot 13}{2} = 25 \cdot 13 = 325.$$

Exerciții propuse

1. Scrieți primii cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $a_1 = 5, r = 2$; b) $a_1 = -2, r = 3$; c) $a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{3}$; d) $a_1 = 0{,}1; r = 0{,}2$.

2. Scrieți termenul al zecelea al progresiei aritmetice:

a) $\div\, 1, 4, 7, 10, \ldots$; b) $\div 2, 7, 12, 17, \ldots$; c) $\div\, 3, -1, -5, -9, \ldots$; d) $\div\, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

3. Găsiți primii trei termeni ai progresiei aritmetice:

a) $\div\, a_1, a_2, a_3, 10, 17, 24, \ldots$; b) $\div\, a_1, a_2, a_3, -3, 0, 3, \ldots$;

c) $\div\, a_1, a_2, a_3, 2, -5, -12, \ldots$; d) $\div\, a_1, a_2, a_3, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \ldots$.

4. Determinați termenii a_1, a_3, a_5 ai progresiei aritmetice:

a) $\div\ a_1, -10, a_3, -4, a_5, \ldots$; b) $\div\ a_1, -10, a_3, -16, a_5, \ldots$

5. Găsiți termenul a_{11} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: 4, 7, 10, ...; b) $a_1 = -3; a_5 = 5$; c) $a_3 = 5; a_7 = 13$; d) $a_{100} = 50; r = \frac{1}{2}$.

6. Într-o progresie aritmetică se cunosc doi termeni și se cere să găsiți termenii de rang 11, 21, 31 dacă:

a) $a_7 = 16; a_9 = 22$; b) $a_8 = -32; a_{41} = -197$.

7. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se cunosc a_1 și r. Găsiți formula termenului general a_n dacă:

a) $a_1 = -1; r = 0{,}5; n = 20$; b) $a_1 = 2; r = -2{,}5; n = 25$;

c) $a_1 = -3{,}5; r = -1; n = 100$; d) $a_1 = \frac{2}{7}, r = \frac{1}{2}, n = 13$.

8. Găsiți primul termen a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $a_{31} = 301, r = 10$; b) $a_{41} = -201; r = -5$;

c) $a_{51} = 0; r = -2$; d) $a_{61} = 11{,}5; r = 0{,}5$.

9. Găsiți primul termen a_1 și rația r ale unei progresii aritmetice dacă:

a) $a_7 = 68; a_{68} = 739$; b) $a_{37} = 73; a_{73} = 37$;

c) $a_1 + a_9 = 32; a_{13} - a_3 = 30$; d) $a_3 + a_5 = 26; a_1 a_7 = -56$.

10. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică și determinați primul termen și rația, dacă termenul general de rang n este dat prin formula:

a) $a_n = 2n - 3, \forall\, n \geq 1$; b) $a_n = 8 - 5n, \forall\, n \geq 1$;

c) $a_n = \frac{3n-4}{5}, \forall\, n \geq 1$; d) $a_n = \frac{7-4n}{3}, \forall\, n \geq 1$.

11. Determinați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $a_1 + a_3 + a_5 = 30; a_2 + a_4 + a_6 = 39$; b) $2a_2 + 7a_7 = 150; 3a_3 + 5a_5 = 94$;

c) $S_3 = 9; S_9 = 81$; d) $a_2 + S_2 = 8; a_8 + S_8 = 53$.

12. Găsiți suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $a_1 = 11, a_{100} = 89$; b) $a_1 = 11{,}5; a_{100} = 88{,}5$; c) $a_1 = 3; r = -1$; d) $a_1 = -2; r = 1$.

13. Cunoscând suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ să se găsească primul termen și rația progresiei dacă:
a) $S_n = n^2 - 2n, \forall n \geq 1$; b) $S_n = 2n^2 - n, \forall n \geq 1$;
c) $S_n = \frac{n^2}{4} + n, \forall n \geq 1$; d) $S_n = -\frac{n^2}{4} + n, \forall n \geq 1$.

14. Decideți dacă este progresie aritmetică un șir pentru care suma primilor n termeni este dată de formula:
a) $S_n = n^2 + \frac{3n}{2}, \forall n \geq 1$; b) $S_n = 2n^2 + 3n, \forall n \geq 1$;
c) $S_n = 3n - 4, \forall n \geq 1$; d) $S_n = n^2 + n + 1, \forall n \geq 1$.

15. Arătați că dacă șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sunt progresii aritmetice, atunci șirul $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este tot o progresie aritmetică.

16. Rezolvați ecuațiile:
a) $1 + 6 + 11 + \ldots + x = 235$;
b) $(x + 3) + (x + 5) + (x + 7) + \ldots + (x + 31) = 270$.

17. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, găsiți suma primilor:
a) 18 termeni, dacă $a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} = 18$;
b) 30 de termeni, dacă $a_{11} + a_{14} + a_{17} + a_{20} = 30$;
c) $2n + 8$ termeni, dacă $a_n + a_{n+3} + a_{n+6} + a_{n+9} = 2n + 8$.

18. Dacă într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ calculați S_p dacă:
a) $S_{10} = 100$, $S_{20} = 400$ și $p = 30$; b) $S_{13} = 169$, $S_{17} = 289$ și $p = 19$;
c) $S_n = n^2$, $S_m = m^2$, cu $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $p \in \mathbb{N}^*$.

19. Determinați x astfel încât următoarele numere să fie în progresie aritmetică:
a) $2x - 1, 7x - 3, 11x - 4$; b) $3x - 1, x^2 + 6, 11x + 1$; c) $2x + 1, 3x + 2, 4x + 3$;
d) $bx + a, cx + b, dx + c$, unde a, b, c, d sunt numere în progresie aritmetică;
e) $x^2 + x + 1, 2x^2 - 3x + 5, 3x^2 - 4x + 6$.

20. Determinați formula termenului general și rația unei progresii aritmetice dacă suma primilor n termeni ai săi verifică egalitatea:
a) $S_n = n^2 - 2n, \forall n \geq 1$; b) $S_n = 3n^2 + 8n, \forall n \geq 1$;
c) $S_n = 5n^2, \forall n \geq 1$; d) $S_{n-1} + S_{n+1} = n^2 + 1, \forall n \geq 1$.

21. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică și S_n suma primilor n termeni ai săi.
a) Determinați S_{m+n}, dacă $a_n = 2m + 1$ și $a_m = 2n + 1$.
b) Determinați S_n, dacă $a_n = am + b$ și $a_m = an + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

22. Demonstrați că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci și următoarele numere sunt în progresie aritmetică:
a) $a + x, b + x, c + x, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $a + b, c + a, b + c$;
c) $a^2 - bc, b^2 - ca, c^2 - ab$; d) $a^2 + ab + b^2, b^2 + bc + c^2, c^2 + ca + a^2$.

23. Demonstrați că dacă a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele următoare sunt în progresie aritmetică:
a) $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$; b) $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$.

Exerciții propuse

24. a) Dacă $a_1, a_2, .., a_n$ sunt numere reale nenule aflate în progresie aritmetică și $n \geq 2$, arătați că are loc egalitatea: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$.

b) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere reale pozitive, aflate în progresie aritmetică și $n \geq 2$, arătați că: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

25. a) Calculați suma $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

b) Calculați suma $S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

26. a) Calculați suma $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

b) Calculați suma $S=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

c) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ sunt numere reale nenule aflate în progresie aritmetică, calculați suma $S=\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$.

27. Arătați că soluțiile următoarelor ecuații sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:
a) $||x-1|-2|=2$; b) $||x+3|-7|=7$; c) $||x-a|-b|=b$, unde $a \in \mathbb{R}, b > 0$.

28. Demonstrați că următoarele numere nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:
a) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$; c) $\sqrt{2}, 3, \sqrt{5}$; d) $3, \sqrt{5}, \sqrt{7}$; e) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 5$.

29. Demonstrați că următoarele numere nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice:
a) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$; b) $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$; c) $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$; d) $\sqrt{2}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$.

30. Arătați că dacă doi termeni ai unei progresii aritmetice sunt numere raționale, atunci toți termenii progresiei sunt numere raționale.

31*. Găsiți progresiile aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ care verifică relațiile $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ și $a_1a_2a_3 = 28$. Determinați pentru acestea diferența $a_7 - a_5$.

(Admitere Facultatea de Chimie, Cluj, 1997)

32. Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pentru care suma primilor n termeni este dată prin formula $S_n = n^2 - 2n$, este o progresie aritmetică.

(Admitere Facultatea Științe Economice, Oradea, 1996)

33. Demonstrați că numerele $(a + x)^2, a^2 + x^2, (a - x)^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Calculați suma primilor n termeni, primul termen fiind $(a + x)^2$.

Exerciții propuse

3. Progresii geometrice

3.1. Definirea progresiei geometrice

Fie șirul puterilor naturale ale lui 2, adică 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ... Se observă că **fiecare termen al șirului**, începând cu al doilea, se obține **din termenul precedent prin înmulțirea cu numărul 2**.

Fie șirul puterilor naturale ale lui $\frac{1}{3}$, adică 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, ..., $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ...

Se observă că **fiecare termen al șirului**, începând cu al doilea, se obține **din termenul precedent prin înmulțirea cu numărul** $\frac{1}{3}$.

Asemenea șiruri de numere se numesc **progresii geometrice**.

Definiție

Un șir de numere, cu primul termen nenul, având proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr real nenul, se numește **progresie geometrică**.

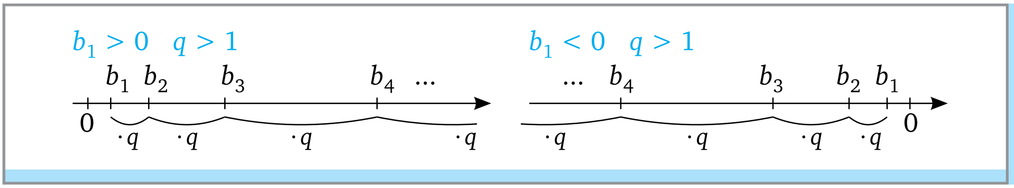
Reformulare

Un șir de numere $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $b_1 \neq 0$ se numește **progresie geometrică** dacă pentru orice $n \geq 1$ are loc relația:

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q}$$

unde $q \neq 0$ este un număr constant dat.

Numărul nenul q se numește **rația progresiei geometrice**.



Observații:

1. Într-o progresie geometrică, raportul dintre orice termen și predecesorul său este egal cu același număr, și anume, rația q:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, \ \forall\ n \geq 1$$

2. Progresia geometrică $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **este bine determinată** atunci când se cunosc primul termen b_1 și rația q.

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 \cdot q \\ b_3 &= b_2 \cdot q = b_1 q \cdot q = b_1 \cdot q^2 \\ b_4 &= b_3 \cdot q = b_1 q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \\ b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

3. Spunem că numerele $b_1, b_2, ..., b_n$ **sunt în progresie geometrică** dacă ele sunt *termeni consecutivi* ai unei progresii geometrice.

Exemple:

1. Numerele 1, 3, 9 sunt în progresie geometrică deoarece sunt termenii consecutivi ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: 1, 3, 9, 27, 81, .., 3^n, ...

2. Numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ sunt în progresie geometrică deoarece sunt termenii consecutivi ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$.

Notație

Pentru a pune în evidență faptul că șirul $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ formează o progresie geometrică se utilizează scrierea:

$$\div\!\div\; b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

Observații:

1. Dacă rația q a unei progresii geometrice este pozitivă ($q > 0$), atunci toți termenii progresiei au același semn și anume semnul lui b_1.

2. Dacă rația q este negativă ($q < 0$), atunci termenii de rang impar au semnul lui b_1, iar cei de rang par au semn contrar semnului lui b_1.

3.2. Proprietățile progresiei geometrice

1. Într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi, orice termen începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui.

Proprietatea 1

Dacă $b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, ...$ este o progresie geometrică cu termeni pozitivi, atunci pentru orice $n \geq 2$ are loc relația:

$$\boxed{b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}}$$

Demonstrație

Pentru $n \geq 2$ avem $b_n = b_{n-1} \cdot q$ și $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$.

Înmulțind aceste două egalități obținem: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Este adevărată și **afirmația reciprocă**, adică:

2. Dacă un șir de numere cu termeni pozitivi are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, atunci acest șir este o progresie geometrică.

Proprietatea 2

Fie șirul de numere pozitive $b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, ...$ cu proprietatea că pentru orice $n \geq 2$ are loc relația $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Atunci șirul dat este o progresie geometrică.

Demonstrație

Presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai șirului $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termeni pozitivi are loc relația $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Atunci $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Deoarece câtul dintre orice termen al șirului $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și predecesorul său este constant, deducem că $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică.

3.3. Formula termenului general al unei progresii geometrice

Dacă într-o progresie geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ cunoaștem primul termen b_1 și rația q ne propunem să găsim o formulă care să exprime orice termen al progresiei, adică termenul general.

Din definiția progresiei geometrice deducem:

$$
\begin{aligned}
b_2 &= b_1 \cdot q \\
b_3 &= b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2 \\
b_4 &= b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
b_n &= b_{n-1} \cdot q = (b_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Vom demonstra prin inducție matematică propoziția:

$$P(n) : b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n \geq 1$$

Etapa I: $P(1)$: $b_1 = b_1$ adevărat.

Etapa II: Vrem $P(k)$ adevărat implică $P(k+1)$ adevărat.

Știm că $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ și vrem să demonstrăm că $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$.

Avem $b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k$.

Din $P(1)$ adevărat și $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, deducem că $P(n)$ este propoziție adevărată pentru orice $n \geq 1$, n natural.

Termenul de rang n al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este dat de formula

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n \geq 1}$$

Exercițiu rezolvat

Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $b_1 = 2$ și $q = -\dfrac{1}{2}$. Calculați b_5, b_{12}, b_{21}.

Rezolvare

Ținând seama că $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$ obținem:

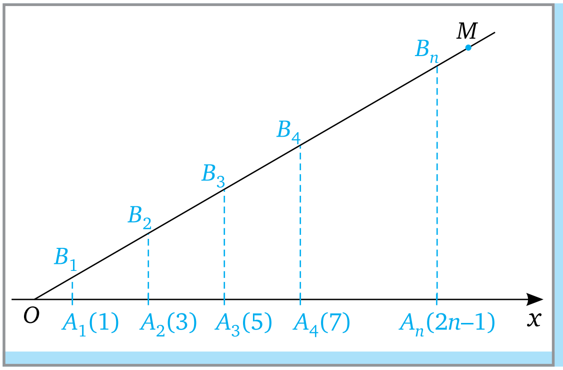
$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8};$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{-1}{2^{10}};\; b_{21} = b_1 \cdot q^{20} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{2^{19}}.$$

Activitate independentă

Pe axa numerelor Ox se consideră punctele $A_1(1)$, $A_2(3)$, $A_3(5)$, ..., $A_n(2n-1)$. Sunt coordonatele acestor puncte în progresie aritmetică? Dacă da, precizați rația.

Fie $(OM$ o semidreaptă oarecare din plan. Perpendicularele pe Ox duse în A_1, A_2, A_3, ... intersectează această semidreaptă în punctele $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Stabiliți dacă lungimile segmentelor A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... formează o progresie.



3.4. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Ne propunem să calculăm suma primelor n puteri naturale ale lui 2, adică

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} \quad (1)$$

Observăm că produsul termenilor egal depărtați de extremi este egal cu produsul termenilor extremi, adică 2^{n-1}. Înmulțim cu 2 egalitatea (1) și obținem:

$$2S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \quad (2)$$

Scăzând egalitatea (1) din (2) obținem:

$$S_n = 2^n - 1,\ \forall\ n \geq 1$$

Analog se poate proceda și pentru calculul sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice, demonstrând mai întâi că este adevărată următoarea propoziție:

Propoziție

Într-o progresie geometrică, produsul oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egal cu produsul numerelor extreme.

Reformulare

Dacă numerele reale $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ sunt în progresie geometrică, atunci:

$$\boxed{b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n}$$

Demonstrație

Avem $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-k} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot b_n$, unde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere în progresie geometrică cu rația q.

Fie suma $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$. (3)

Pentru calculul sumei distingem două cazuri:

1. Dacă rația $q = 1$, atunci $S_n = nb_1$.
2. Dacă rația $q \neq 1$, atunci înmulțim cu q relația (3) și obținem:

$$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + ... + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow q \cdot S_n = b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_n + b_n \cdot q \quad (4)$$

Scăzând egalitatea (3) din (4) obținem:

$qS_n - S_n = b_nq - b_1 \Leftrightarrow (q-1)S_n = b_nq - b_1 \Leftrightarrow S_n = \dfrac{b_nq - b_1}{q-1} \Leftrightarrow S_n = \dfrac{b_1q^n - b_1}{q-1}$ (deoarece $b_n = b_1q^{n-1}$).

În concluzie, suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dată de formula:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1,\ \forall\ n \geq 1}$$

Exercițiu rezolvat

Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $b_1 = 2$, $q = 3$. Calculați S_5, S_{10}, S_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare

Cu formula $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q \neq 1$, obținem: $S_5 = \dfrac{2(3^5-1)}{3-1} = 243 - 1 = 242$;

$S_{10} = \dfrac{2(3^{10}-1)}{3-1} = 3^{10} - 1 = 9049 - 1 = 9048$; $S_n = \dfrac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n - 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Exerciții propuse

1. Scrieți primii cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $b_1 = 1$, $q = 2$; b) $b_1 = 2$, $q = -1$; c) $b_1 = -3$, $q = \dfrac{1}{2}$; d) $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $q = \sqrt{3}$.

2. Scrieți primii doi termeni ai progresiei geometrice:

a) $\div\!\div\, b_1, b_2, 12, 24, 48, ...$; b) $b_1, b_2, -8, 16, -32, ...$.

3. Determinați termenul general al progresiei geometrice:

a) $\div\!\div\, 3, 6, 12, ...$; b) $3, 1, \dfrac{1}{3}, ...$; c) $\div\!\div\, \sqrt{3}, 1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{3}, ...$;

d) $\div\!\div\, \sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, ...$.

4. Determinați primii doi termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $b_5 = 1024$, $q = 4$; b) $b_4 = 27$, $b_7 = 729$; c) $b_3 = \dfrac{2}{27}$, $q = -\dfrac{1}{3}$.

5. Scrieți formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $b_1 = 3$, $b_{n+1} = 2b_n$; b) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = -3b_n$;

c) $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$; d) $b_1 = -0{,}5$; $b_{n+1} = \sqrt{2} \cdot b_n$.

6. Găsiți primul termen b_1 și rația q a unei progresii geometrice dacă:

a) $b_3 - b_1 = 3$ și $b_5 - b_1 = 15$; b) $b_2 + b_4 = \frac{5}{16}$ și $b_1 - b_2 + b_3 = \frac{7}{8}$;
c) $b_4 = 54$ și $b_6 = 486$; d) $b_5 = 0{,}10875$ și $b_7 = 0{,}0271875$.

7. Determinați suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:
a) $b_1 = 2, q = 3, n = 5$; b) $b_1 = 0{,}5, q = 1{,}5, n = 6$;
c) $b_1 = 128, b_8 = 2, n = 7$; d) $b_1 = -2, q = -1, n = 8$.

8. Determinați rația și suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

a) $b_1 = \frac{1}{2}, b_5 = \frac{1}{162}, n = 6$; b) $b_2 = \frac{4}{3}, b_6 = \frac{64}{3}, n = 8$;
c) $b_3 = 4, b_{13} = 4096, n = 10$; d) $b_4 = 1, b_{17} = -1, n = 12$.

9. Decideți dacă este progresie geometrică un șir de numere reale $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general:

a) $b_n = 3^n, \forall n \geq 1$; b) $b_n = 4^{-n+1}, \forall n \geq 1$; c) $b_n = \frac{3^n}{5^n}, \forall n \geq 1$;

d) $b_n = \frac{2}{3^n}, \forall n \geq 1$; e) $b_n = \frac{-3}{(-2)^n}, \forall n \geq 1$; f) $b_n = 2^n - 1, \forall n \geq 1$;
g) $b_n = 2^n + 3^n, \forall n \geq 1$; h) $b_n = 2n + 1, \forall n \geq 1$; i) $b_n = n^2 + 2n, \forall n \geq 1$.

10. Decideți dacă este progresie geometrică șirul de numere reale pentru care suma primilor n termeni este dată de formula:
a) $S_n = n^2 + n + 1, \forall n \geq 1$; b) $S_n = 2^n - 8, \forall n \geq 1$;
c) $S_n = 3^{n+1} - 1, \forall n \geq 1$; d) $S_n = 5^n - 1, \forall n \geq 1$.

11. Determinați primul termen b_1 și rația q ale unei progresii geometrice știind că suma primilor doi termeni este 9, iar suma următorilor doi termeni este 36.

12. Determinați primul termen b_1 și rația q ale unei progresii geometrice știind că suma primilor trei termeni este 13, iar suma următorilor trei termeni este 351.

13. Determinați progresia geometrică $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:
a) $b_4 - b_1 = 21$ și $b_5 - b_2 = 42$; b) $b_{n+3} - b_n$ și $b_{n+4} - b_{n+1} = 2a$, unde $a > 0$;
c) $b_6 = 64$ și $b_8 = 256$; d) $b_4 = 81$ și $b_6 = 729$; e) $b_1 - b_2 + b_3 = 3$ și $b_2 - b_3 + b_4 = 6$;
f) $b_1 + b_2 + b_3 = 3$ și $b_3 + b_4 + b_5 = 12$;
g) $b_1 - b_2 + b_3 = a$ și $b_2 - b_3 + b_4 = 2a$, unde $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
h) $b_1 + b_2 + b_3 = a$ și $b_3 + b_4 + b_5 = 4a$, unde $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

14. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât fiecare dintre tripletele următoare să fie în progresie geometrică:
a) $2x - 1, 3x - 1, 5x - 1$; b) $4x - 3, 5x - 3, 7x - 3$; c) $x, x + 2, x + 8$;

d) $x, 2x + 1, 3x + 6$; e) $x, \frac{x}{2}, \frac{x+1}{5x+3}$; f) $\sqrt{x+1}, \sqrt{x+4}, \sqrt{x+16}$;

g) $\sqrt{x+1}, \sqrt{x+a}, \sqrt{x+a^2}, a \in \mathbb{R}$; h) $\sqrt{x+1} - 1, \sqrt{x+6}, 2\sqrt{x+1} + 5$.

Exerciții propuse

15. Calculați sumele:

a) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{10}$; b) $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^9$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{10}}$;

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - ... + \frac{1}{2^9}$; e) $1 - 2 + 2^2 - ... + 2^{10}$; f) $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + ... + 3^{10}$;

g) $1 + a + a^2 + ... + a^{10}$, $a \in \mathbb{R}$; h) $1 - a + a^2 - a^3 + ... + a^{10}$, $a \in \mathbb{R}$.

16. Determinați primul termen, rația și termenul general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:
a) $S_n = 2(3^n - 1)$, $\forall\, n \geq 1$; b) $S_n = 3(5^n - 1)$, $\forall\, n \geq 1$;
c) $S_n = a(b^n - 1)$, $\forall\, n \geq 1$, unde $a > 0$, $b > 0$.

17. Găsiți suma primilor 9 termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:
a) $S_3 = 4$, $S_6 = 6$; b) $S_3 = 40$, $S_6 = 60$; c) $S_3 = 4a$, $S_6 = 6a$, $a \neq 0$; d) $S_3 = 400$, $S_6 = 600$.

18. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere să fie în progresie geometrică:
a) $1 + x$, $2 + x$, $4 + x$; b) $2 + x$, $5 + x$, $11 + x$;
c) $1 + x$, $2 + x$, $3 + x$; d) $a + x$, $b + x$, $c + x$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

19. Calculați sumele:

a) $a + a^2 + ... + a^n$, $a \in \mathbb{R}$; b) $a^2 + a^4 + ... + a^{2n}$, $a \in \mathbb{R}$; c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + ... + \frac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}^*$;

d) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + ... + \frac{1}{a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}^*$; e) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + ... + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)^2$, $a \in \mathbb{R}^*$.

20. Știind că numerele $b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}$ sunt în progresie geometrică, calculați sumele:

a) $\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2}{b_3} + ... + \frac{b_n}{b_{n+1}}$; b) $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_n}$; c) $\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + ... + \frac{1}{b_n^2}$;

d) $\frac{1}{b_1^3} + \frac{1}{b_2^3} + ... + \frac{1}{b_n^3}$; e) $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2$; f) $\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + ... + \sqrt{b_n}$, $b_n > 0$;

g) $\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}} + \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3} - \sqrt{b_2}} + ... + \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n}}$, $b_n > 0$.

21. Arătați că următoarele numere nu pot fi termeni ai unei progresii geometrice:
a) 11, 12, 13; b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; d) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; e) 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$.

22. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$, $n \geq 1$. Arătați că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$, $\forall\, n \geq 1$, este o progresie geometrică.

Exerciții propuse

4. Probleme de numărare

O importanță deosebită o au problemele de completare a unui șir, de numărare a termenilor unui șir, de determinare a formei generale sau a regulii de formare a termenilor unui șir, de aflare a sumei primilor n termeni dintr-un șir, de determinare a termenilor de pe locul n dintr-un șir, de aflare a poziției ocupate de un număr într-un șir, de numărare a aparițiilor unei cifre în scrierea unui număr, de numărare a unor numere care au o anumită proprietate etc.

Există o varietate de probleme care se pot încadra în acestă temă, dintre care vom prezenta câteva.

4.1. Completarea unui șir cu încă p termeni, $p \in \mathbb{N}^*$

Problemă rezolvată

Completați cu încă trei termeni următoarele șiruri:

a) 11, 13, 15, ...
b) 11, 14, 17, ...
c) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
d) 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, ...

Rezolvare

a) Numerele din șir sunt numere impare consecutive; șirul se completează cu 17, 19, 21.
b) Numerele din șir se formează după regula: $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Șirul se completează cu: 20, 23, 26.
c) Numerele din șir se formează după regula $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, ... ; în general: $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
În felul acesta șirul se completează cu: 13, 21, 34.
d) Numerele din șir se formează după regula: $a_1 = 0$; $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 2$; șirul se completează cu: 32, 64, 128.

4. 2. Numărarea termenilor dintr-un șir

Problemă rezolvată

Determinați câte numere naturale sunt în șirurile următoare:

a) 20, 21, 22, ..., 50; b) 2, 4, 6, ..., 60;
c) 4, 7, 10, ..., 91; d) 2, 7, 12, ..., 92;

Rezolvare

a) Șirul conține $50 - 20 + 1 = 31$ numere naturale.
b) Șirul conține termeni de forma $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, ... , 2 \cdot 30$, deci are 30 de termeni. *Altfel:* $(60 - 2) : 2 + 1 = 30$.
c) Șirul are termeni de forma $3 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 2 + 1, 3 \cdot 3 + 1, ... , 3 \cdot 30 + 1$, deci conține 30 de termeni. *Altfel:* $(91 - 4) : 3 + 1 = 30$.
d) Șirul are termeni de forma $5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 2 + 2, ... , 5 \cdot 18 + 2$, deci conține 19 termeni. *Altfel:* $(92 - 2) : 5 + 1 = 19$.

4.3. Determinarea termenului de pe locul n, $n \geq 1$, dintr-un șir

Probleme rezolvate

1. Fie șirul de numere naturale $1; 2 \cdot 3; 4 \cdot 5 \cdot 6; 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10, \ldots$.
Determinați al 9-lea termen, al 50-lea și al 101-lea termen.

Rezolvare

Se observă că termenul a_n este produs de n numere naturale consecutive.
Trebuie deci să deducem forma ultimului factor în funcție de locul al n-lea din șir. Ultimul număr din a_n este numărul $n(n + 1) : 2$.
Prin urmare, al 9-lea termen va fi produs de 9 numere consecutive, ultimul factor fiind $9(9 + 1) : 2 = 36$, deci termenul căutat este:
$28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36$.
Ultimul factor din al 50-lea termen va fi $50 \cdot 51 : 2 = 1275$. Termenul al 50-lea va fi produsul a 50 de numere consecutive dintre care ultimul este 1275.
Al 50-lea termen este: $1226 \cdot 1227 \cdot \ldots \cdot 1275$.
Ultimul număr din al 101-lea termen va fi $101 \cdot 102 : 2 = 5151$. Al 101-lea termen va fi $5051 \cdot 5052 \cdot 5053 \cdot \ldots \cdot 5151$, produs de 101 numere consecutive.

2. Fie șirul de numere naturale $0; 2; 6; 12; 20; 30, \ldots$
a) Care este al 2004-lea termen al șirului.
b) Este 2005 termen al șirului?

Rezolvare

a) Se observă că termenii șirului se obțin astfel: $a_1 = 0 \cdot 1$, $a_2 = 1 \cdot 2$; $a_3 = 2 \cdot 3$; $a_4 = 3 \cdot 4$; $a_5 = 4 \cdot 5$; $a_6 = 5 \cdot 6 \ldots$; $a_n = (n - 1)\, n$; $n > 1$.
Deci $a_{2004} = (2004 - 1) \cdot 2004 = 2003 \cdot 2004 = 4\,014\,012$.
b) 2005 nu este termen al șirului deoarece nu se poate scrie ca produs de două numere consecutive: $44 \cdot 45 = 1980 < 2005 < 2070 = 45 \cdot 46$.

4.4. Aflarea sumei primilor n termeni dintr-un șir

Probleme rezolvate

1. Calculați următoarele sume:
a) $S_1 = 111 + 222 + \ldots + 999$;
b) $S_2 = 9 + 19 + 29 + 39 + \ldots + 1999$;
c) $S_3 = 3 + 5 + 7 + \ldots + 2003 - 2 - 4 - 6 - \ldots - 2002$.

Rezolvare

a) $S_1 = 111(1 + 2 + \ldots + 9) = 111 \cdot (9 \cdot 10 : 2) = 111 \cdot 45 = 4995$.
b) $S_2 = 9 + (10 \cdot 1 + 9) + (10 \cdot 2 + 9) + (10 \cdot 3 + 9) + \ldots + (10 \cdot 199 + 9)$ are 200 de termeni. Aplicând proprietățile adunării și grupând obținem:
$S_2 = 9 \cdot 200 + 10(1 + 2 + \ldots + 199) = 1800 + 10 \cdot (199 \cdot 200 : 2) =$
$= 1800 + 10 \cdot 199 \cdot 100 = 200\,800$.
c) S_3 se poate scrie grupând termenii 2 câte 2, astfel: fiecare dintre cele 1001 numere impare cu fiecare dintre cele 1001 numere pare și vom obține 1001, deci:
$S_3 = (3 - 2) + (5 - 4) + (7 - 6) + \ldots + (2003 - 2002) = 1001$.

2. Calculați următoarele sume:

a) $S_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 19 \cdot 20$;

b) $S_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 18 \cdot 19 \cdot 20$.

Rezolvare

a) Prin înmulțirea cu 3 obținem: $3S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot 3$. În membrul drept îl scriem pe 3 ca diferență de două numere astfel:
$3S_1 = 1 \cdot 2 \cdot (3 - 0) + 2 \cdot 3 \cdot (4 - 1) + 3 \cdot 4 \cdot (5 - 2) + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot (21 - 18)$.
Efectuând calculele obținem:
$3S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots +$
$+ 19 \cdot 20 \cdot 21 - 18 \cdot 19 \cdot 20 \Rightarrow S_1 = 19 \cdot 20 \cdot 21 : 3 \Rightarrow S_1 = 19 \cdot 20 \cdot 7 = 2660$.

b) Procedăm asemănător ca la a):
$4S_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 + \ldots + 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4 - 0) +$
$+ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5 - 1) + \ldots + 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot (21 - 17) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 +$
$+ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 - 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 =$
$= 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \Rightarrow S_3 = 18 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 20 : 4 = 18 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 5 = 35\,910$.

Generalizare:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)(n + 2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

4.5. Numărarea unor numere care au o anumită proprietate

Probleme rezolvate

1. Câte numere de cinci cifre încep și se termină cu cifra 5?

Rezolvare

Vom afla câte numere de forma $\overline{5abc5}$ există. Cum cifra a poate lua 10 valori adică pe cele din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, iar pentru o valoare fixată a lui a, cifra b poate lua tot 10 valori din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, există $10 \cdot 10 = 100 = 10^2$ posibilități. De asemenea, c poate lua la rândul său tot 10 valori din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și deci există $10^2 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ de numere care încep și se termină cu cifra 5.

Comentariu:

1. Faptul că numerele încep și se termină cu cifra 5 nu este esențial. Același rezultat îl obținem dacă se cere să aflăm câte numere de 4 cifre există, știind că prima cifră este dată.

2. Câte numere de n cifre de forma $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1}$ există?

   Cifra a_n poate lua 9 valori din mulțimea: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Oricare altă cifră a numărului poate lua 10 valori din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Fiecare cifră ia aceste valori indiferent de ce valori au luat celelalte.

   Deci, numărul numerelor de n cifre este: $9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$.

3. Problema dată poate fi rezolvată și astfel: $\overline{abc}$ poate avea oricare dintre formele 000, 001, 002, ..., 998, 999, în total 1000 de posibilități.

2. a) Câte numere naturale nenule, mai mici decât 100, nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3?

b) Câte numere naturale nenule, mai mici decât 1000, nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7?

Rezolvare

a) Pentru că numerele cerute sunt mai mici decât 100, vom considera primele 99 începând cu 1, dintre care vom exclude, în primul rând, numerele divizibile cu 2. Acestea sunt 2, 4, 6, ..., 98, adică $\left[\frac{99}{2}\right] = 49$ de numere. Excludem, apoi, numerele multipli de 3, care sunt 3, 6, ..., 99, adică $\left[\frac{99}{3}\right] = 33$ astfel de numere. S-ar părea că rămân $99 - (49 + 33) = 99 - 82 = 17$ numere care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3. Se observă însă că anumite numere au fost numărate de două ori, de exemplu 6, 12, 18, ..., adică acele numere care se divid și cu 2 și cu 3, deci și cu 6. Acestea sunt în număr de $\left[\frac{99}{6}\right] = 16$. Rezultă astfel că numerele divizibile cu 2 sau cu 3 sunt în număr de $49 + 33 - 16 = 66$.
Numerele mai mici decât 100 care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3 sunt în număr de $99 - 66 = 33$.

b) Folosind același procedeu ca la a) obținem că numărul celor divizibile cu 3 este $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$, al celor divizibile cu 5 este $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$, iar al celor divizibile cu 7 este $\left[\frac{999}{7}\right] = 142$. Am obținut astfel $333 + 199 + 142 = 674$ de numere în care le-am numărat de două ori pe cele divizibile cu 3 și 5, cu 3 și 7 și cu 5 și 7. Numărul acestora este $\left[\frac{999}{15}\right] + \left[\frac{999}{21}\right] + \left[\frac{999}{35}\right] - \left[\frac{999}{105}\right] = 66 + 47 + 28 - 9 = 132$.

Am scăzut $\left[\frac{999}{105}\right]$ pentru că altfel am fi numărat de două ori numerele divizibile cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 5 și 7 luate două câte două, adică pe cele divizibile cu 15 și cu 21 și cu 35.
Astfel, numerele naturale nenule mai mici decât 1000, care nu se divid nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7 sunt în număr de $999 - (674 - 132) = 457$.

Comentariu:

Problema admite și alte variante de rezolvare. Astfel:

a) $n = 99 - \left[\frac{99}{2}\right] - \left[\frac{99}{3}\right] + \left[\frac{99}{2\cdot 3}\right]$;

b) $n = 999 - \left[\frac{999}{3}\right] - \left[\frac{999}{5}\right] - \left[\frac{999}{7}\right] + \left[\frac{999}{15}\right] + \left[\frac{999}{21}\right] + \left[\frac{999}{35}\right] - \left[\frac{999}{105}\right]$.

4.6. Aflarea poziției ocupate de un număr într-un șir

Probleme rezolvate

1. Se scriu numerele raționale pozitive sub forma următorului șir:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$. Al câtelea termen al șirului este $\frac{2003}{1999}$?

Rezolvare

Împărțim numerele în grupe în felul următor:

În grupa k ($k \geq 2$) intră numerele pentru care suma dintre numărător și numitor este k.

Avem: Grupa 2: $\frac{1}{1}$; Grupa 3: $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$; Grupa 4: $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$

Grupa k: $\frac{k-1}{1}, \frac{k-2}{2}, \frac{k-3}{3}, \ldots, \frac{2}{k-2}, \frac{1}{k-1}$. În grupa k vor fi $k - 1$ numere. Ordinea lor în această grupă este dată de numărul de la numitor.

În cazul problemei propuse, k este $2003 + 1999 = 4002$. Numărul $\frac{2003}{1999}$ este al 1999-lea în această grupă. În grupa 4001 vor fi 4000 de numere.

Până la primul număr din grupa 4002 vor fi:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 4000 = \frac{4000 \cdot 4001}{2} = 2000 \cdot 4001 = 8\,002\,000$ de numere.

Numărul $\frac{2003}{1999}$ va fi deci pe locul $8\,002\,000 + 1999 = 8\,003\,999$ în șirul considerat.

Comentariu:

Se observă că, în șirul considerat, dintre două numere, înainte este acela în care suma dintre numărător și numitor este mai mică, iar dacă acestea sunt egale, primul este acela cu numitorul mai mic.

2. Considerăm toți multiplii lui 5, începând cu 0, în ordine crescătoare. Al câtelea este cel mai mic dintre aceștia dacă suma cifrelor sale este egală cu 45?

Rezolvare

Astfel de multipli există. *Exemplu:* 919 191 915.

Să-l aflăm întâi pe cel mai mic cu proprietatea cerută. El se află printre multiplii cu 6 cifre, pentru că cel mai mic număr cu suma cifrelor 45 este 99 999, dar acesta nu este multiplu de 5. Singurul multiplu de 5 cu șase cifre care se termină în 0 și are proprietatea cerută este 999 990.

Vom căuta acum pe cel mai mic multiplu de 5 cu 6 cifre care are suma cifrelor 45 și se termină în 5. Dacă ultima cifră este 5, atunci celelalte 5 cifre au suma 40, iar cel mai mic număr de 5 cifre cu suma 40 este 49 999. Rezultă că cel mai mic număr cu proprietatea cerută este 499 995. Rămâne să vedem al câtelea este acesta în șirul multiplilor lui 5, începând cu 0. Până la el, inclusiv, sunt 499 995 : 5 = 99 999 multipli nenuli ai lui 5. Întrucât numărătoarea o facem de la 0, rezultă că cel mai mic multiplu de 5 cu proprietatea cerută este al 100 000-lea în succesiunea cerută.

4.7. Numărarea aparițiilor unei cifre în scrierea unui număr

Probleme rezolvate

1. Care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui 100!?

Rezolvare

Din șirul de numere 1, 2, 3, ..., 100, fiecare al doilea număr se divide cu 2. Cum $100 = 2 \cdot 50 + 0$, rezultă că de la 1 la 100 sunt 50 de numere divizibile cu 2. Dintre acestea, fiecare al doilea este divizibil cel puțin cu puterea a doua a lui 2, adică cu 2^2. Cum $50 = 2 \cdot 25 + 0$, rezultă că sunt 25 astfel de numere. Dintre acestea 25, fiecare al doilea este divizibil cel puțin cu puterea a treia a lui 2, 2^3. Cum $25 = 2 \cdot 12 + 1$, rezultă că sunt 12 astfel de numere. Dintre cele 12 numere, fiecare al doilea este divizibil cu 2^4, deci din $12 = 2 \cdot 6 + 0$ rezultă că sunt 6 astfel de numere, iar 3 dintre acestea sunt divizibile cel puțin cu 2^5. Dintre aceste 3 numere, cum $3 = 2 \cdot 1 + 1$, unul singur este divizibil cu 2^6. Nu există nici un număr divizibil cu 2^7 pentru că $2^7 = 128 > 100$.

Fie acum produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 99 \cdot 100 = 100!$

Exponentul lui 2 din descompunerea acestui produs în factori primi este numărul $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ deoarece fiecare factor al produsului 100! divizibil cu 2^k, însă nu și cu 2^{k+1}, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se socotește, în modul indicat, de k ori ca fiind divizibil cu $2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^k$.

Comentariu:

1. De la împărțirile efectuate am reținut numai câturile, nu și resturile. Aceste câturi reprezintă, de fapt, părțile întregi ale numerelor: $\frac{100}{2}, \frac{100}{2^2}, \frac{100}{2^3}, \frac{100}{2^4}$ etc.

   Deci, exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a lui 100! este:
   $$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]=$$
   $$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$$

2. Folosind același raționament se poate arăta că exponentul numărului prim p din descompunerea în factori primi a lui $n!$ este egal cu: $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + ...$

   Această sumă este finită pentru că $\exists\, a \in \mathbb{N}$ astfel încât $n < p^a$ și deci $\left[\frac{n}{p^b}\right] = 0$, pentru orice $b \in \mathbb{N}$, $b \geq a$.

2. În câte zerouri se termină 1 000!?

(*Observație:* Prin $n!$ am notat produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ și citim „n factorial“.)

Rezolvare

Pentru a afla cu câte zerouri se termină 1000! vom observa că numărul zerourilor este dat de exponentul lui 10 din acest produs. Cum $10 = 2 \cdot 5$, exponentul lui 10 este dat de exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a lui 1000! pentru că

exponentul lui 2 din această descompunere este mai mare decât cel al lui 5. Pentru aflarea acestuia folosim procedeul indicat în comentariul punctului a).
Astfel, vom avea:

$$\left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Rezultă că 1000! se termină în 249 de zerouri.

Probleme propuse

1. Completați șirurile care urmează cu încă trei termeni:
a) 13, 14, 15, ...
b) 10, 12, 14, ...
c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

2. Fie șirul de numere naturale: 1, 5, 9, 13, ...
a) Completați șirul cu încă trei termeni.
b) Găsiți al 150-lea, al 505-lea, al 2004-lea termen.
c) Care dintre următoarele numere fac parte din șir: 491, 1012, 2003, 2006, 3007, 4008, 5009? Precizați locul în șir, dacă este cazul.
d) Calculați suma primilor 26 de termeni.

3. Aflați suma tuturor cifrelor numerelor naturale de la 1 la 1 000 000 000.

4. Fie numărul $N = 1234567891011121314 15\ldots 200220032004$.
a) Aflați câte cifre are numărul N.
b) Care este a 2005-a cifră a numărului?
c) Determinați cifra de pe locul 34 788 .

5. Fie numărul $A = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{2004\text{ cifre}}$. Câte cifre de 1 are A?

6. Câte numere pare de trei cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3?
Care este suma lor?

7. Câte numere de patru cifre divizibile cu 4, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?

8. Pentru numerotarea paginilor unei cărți (dicționar enciclopedic) s-au folosit 3829 de cifre. Câte pagini are dicționarul?

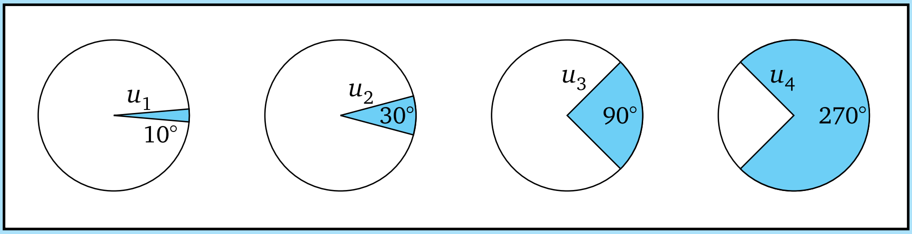
9. Câte numere naturale, mai mici decât 1331, sunt prime cu numărul 1331?

10. Câte numere naturale, mai mici decât 4500, sunt prime cu numărul 4500?

Probleme propuse

Test de evaluare

1p **1.** Priviți desenul de mai jos și stabiliți dacă măsurile u_1, u_2, u_3, u_4 formează o progresie. Dacă răspunsul este afirmativ, stabiliți tipul progresiei, apoi calculați rația și determinați măsura $u_5 - 2\pi$.



1p **2.** Determinați progresia aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ știind că $a_1 + a_2 + a_3 = a_1a_2a_3 = 6$.

1p **3.** Rezolvați ecuația $x + (2x + 1) + (3x + 2) + ... + nx + n - 1 = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

1p **4.** Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică și S_n suma primilor n termeni ai săi. Dacă $S_n = n$ și $S_m = m$, $n \neq m$, calculați S_{m+n}.

1p **5.** Determinați progresia geometrică $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ știind că $b_1 + b_2 + b_3 = b_1b_2b_3 - 1 = 7$.

1p **6.** Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică și S_n suma primilor n termeni ai săi. Dacă $S_3 = 4\pi$ și $S_6 = 6\pi$, calculați S_9.

1p **7.** Determinați $x \geq 0$ astfel încât numerele $1 + \sqrt{x}$, $2 + \sqrt{x+1}$, $\frac{31}{7} + \sqrt{x}$ să fie în progresie geometrică.

1p **8.** Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică cu rația q.

Calculați suma $S = b_1^{-2} + b_2^{-2} + ... + b_n^{-2}$.

1p **9.** Demonstrați că numerele a, b, c sunt în progresie geometrică dacă și numai dacă numerele $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b-c}$ sunt în progresie aritmetică.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 3

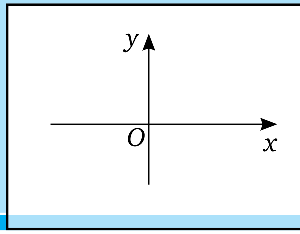
Funcții, lecturi grafice

1. Reper cartezian, produs cartezian

1.1. Reper cartezian

Definiție

Prin **reper cartezian** sau **sistem ortogonal de axe** înțelegem un sistem (ansamblu) format din două axe de coordonate perpendiculare, cu originea comună O, pe care se consideră aceeași unitate de măsură în sensurile convenționale. Reperul cartezian se notează xOy.



Considerăm un sistem ortogonal în plan xOy.

Orice punct M din plan se poate proiecta pe cele două axe astfel:

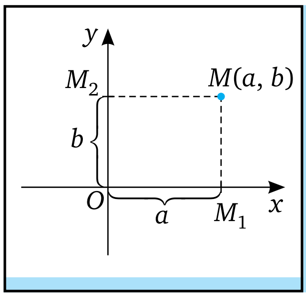
- proiecția lui M pe axa Ox este punctul M_1, căruia i se poate asocia numărul real a;
- proiecția lui M pe axa Oy este M_2, căruia i se poate asocia numărul real b.

Prin urmare, oricărui punct M din plan i se asociază *în mod unic* o **pereche ordonată de numere reale** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Notăm $M(a, b)$ și citim M de coordonate a și b.

Numerele reale a și b se numesc **coordonatele carteziene** ale punctului M:

- a este **abscisa** punctului M;
- b este **ordonata** punctului M.

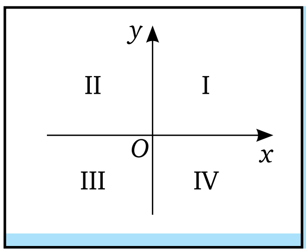


Observații:

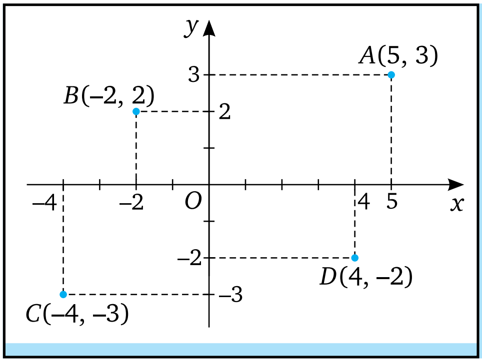
1. Punctele de pe axa Oy au **abscisa 0**.
2. Punctele de pe axa Ox au **ordonata 0**.
3. Originea O are **și ordonata și abscisa 0**.

Un reper cartezian xOy într-un plan determină împărțirea planului în **patru cadrane** definite astfel:

$\mathrm{I} = \{M(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$,
$\mathrm{II} = \{M(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$,
$\mathrm{III} = \{M(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$,
$\mathrm{IV} = \{M(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$.



Exemple:



1. În figura alăturată punctul A se află în cadranul I și are coordonatele 5 și 3; punctul B se află în cadranul II și are abscisa –2, iar ordonata 2; punctul C de coordonate –4 și –3 se află în cadranul III, iar punctul $D(4; -2)$ în cadranul IV.
2. Punctul $M(2x + 7, y - 3)$ este situat în cadranul III dacă îndeplinește condițiile $2x + 7 < 0$ și $y - 3 < 0$, adică dacă $x < -\frac{7}{3}$ și $y < 3$.
3. Punctul $N(5 - x, y^2 + 1)$ având ordonata $y^2 + 1 > 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, poate fi situat în primul sau în al doilea cadran. Dacă $x < 5$, punctul N aparține primului cadran, iar dacă $x > 5$ punctul N aparține celui de-al doilea cadran.

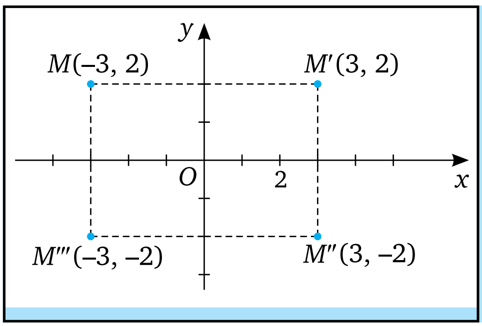
Exercițiu rezolvat

În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-3, 2)$.

a) Reprezentați în acest reper punctele M' – simetricul lui M față de Oy, M'' – simetricul lui M față de O, M''' – simetricul lui M față de Ox și scrieți coordonatele acestor puncte.

b) Arătați că punctele M și M'' sunt simetrice față de originea O.

Rezolvare



a) Construim $MA \perp Oy, A \in Oy$ $\Rightarrow MA \parallel Ox$, $OA = 2$; prelungim MA dincolo de A cu $AM' = MA = 3$. Ducem $M'B \perp Ox$, $B \in Ox \Rightarrow AM'BO$ dreptunghi $\Rightarrow M'B = AO = 2$.
În concluzie, coordonatele lui M' sunt 3 și 2. Analog se obține $M''(3, -2)$, $M'''(-3, -2)$;

b) Din $\Delta MAO \equiv \Delta M''CO$ (C.C.), unde $M''C \perp Oy, C \in Oy$, rezultă că $OM = OM''$ și că punctele M, O, M'' sunt coliniare.

1.2. Produsul cartezian a două mulțimi

În cele ce urmează, reamintim și aprofundăm noțiunile privind produsul cartezian.
Fie mulțimile $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $a \in A$ și $b \in B$.

■ Cu elementele a și b putem forma o mulțime ordonată (a, b) pe care o numim **pereche**. Elementul a se numește **prima componentă**, iar elementul b **a doua componentă** a perechii (a, b).

Definiție

Perechile (a, b) și (α, β) se numesc **egale** dacă și numai dacă $a = \alpha$ și $b = \beta$. Scriem $(a, b) = (\alpha, \beta)$.

Exercițiu rezolvat

Determinați $x, y \in \mathbb{R}$, știind că $(2, y + 1) = (x + 4, 6)$.

Rezolvare

$(2, y + 1) = (x + 4, 6) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x + 4 \\ y + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$.

Observație: $(-2, 5) \neq (5, -2)$ în timp ce $\{-2; 5\} = \{5; -2\}$. Altfel spus, perechea este diferită de mulțime.

Definiție

Se numește **produs cartezian** al mulțimilor A și B mulțimea tuturor perechilor (a, b), cu $a \in A$ și $b \in B$. Se notează $A \times B$. Avem:

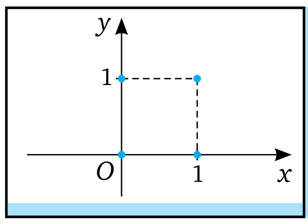
$$\boxed{A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}}$$

Observație: $A \times A = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A\} \overset{\text{not.}}{=} A^2$.

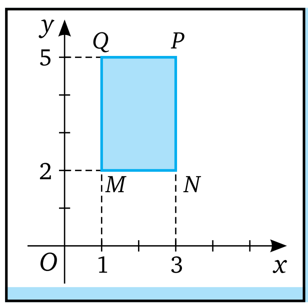
Exemple:

1. Dacă $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{x, y\}$, atunci $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$.

2. Dacă $A = \{0, 1\}$, atunci $A^2 = A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
Ținând seama de faptul că oricărei perechi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ îi putem asocia în mod unic în plan, raportat la un sistem de axe ortogonale, punctul $M(x, y)$ (și reciproc), rezultă reprezentarea geometrică alăturată a produsului cartezian $A \times A$.



3. Dacă $A = [1, 3]$ și $B = [2, 5]$, atunci $A \times B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 5\}$. Reprezentarea geometrică a produsului cartezian $A \times B$ este suprafața dreptunghiului $MNPQ$. (*Observație:* Dacă A și B ar fi fost intervale deschise, atunci reprezentarea produsului cartezian $A \times B$ ar fi fost suprafața dreptunghiului $MNPQ$ fără contur.)



Exerciții (oral)

Studiați și reprezentați produsul cartezian $A \times B$ în cazurile:
a) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$; b) $A = \mathbb{R}, B = \{0\}$; c) $A = \{0\}, B = \mathbb{R}$.

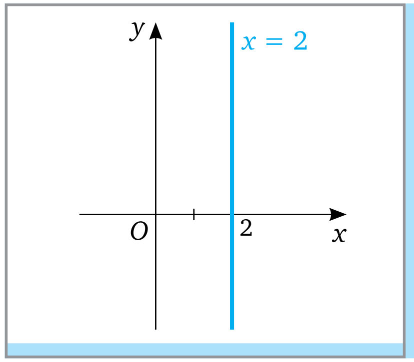
Notație

Dacă A este o mulțime finită vom nota numărul elementelor sale cu $n(A)$ sau $|A|$ sau card A.

Observație: Dacă $|A| = m$ și $|B| = n$, atunci $|A \times B| = m \cdot n$.

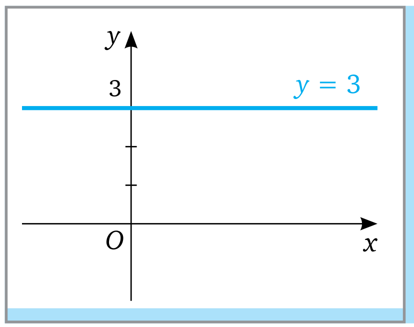
1.3. Drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbb{R}$

Reprezentând în plan punctele $M_1(2, -3)$, $M_2(2, 0)$, $M_3(2, 2)$, $M_4(2, 4)$ observăm că, datorită faptului că au aceeași abscisă 2, acestea sunt situate pe o dreaptă paralelă cu axa Oy, dusă prin punctul $M_2(2, 0)$. Această dreaptă este formată din toate punctele $M(2, y)$, $y \in \mathbb{R}$, și i se asociază ecuația $x = 2$.



Reprezentând în plan mai multe puncte cu aceeași ordonată, cum ar fi $N_1(-2, 3)$, $N_2(0, 3)$, $N_3(4, 3)$, $N_4(5, 3)$, observăm că acestea sunt situate pe o dreaptă paralelă cu axa Ox, dusă prin N_2.

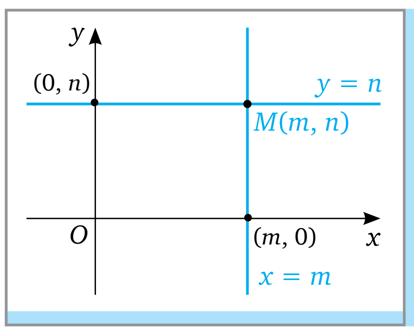
Tragem concluzia că toate punctele de forma $N(x, 3)$, $x \in \mathbb{R}$, se află pe dreapta paralelă cu Ox, dusă prin punctul $N_2(0, 3)$. Asociem acestei drepte ecuația $y = 3$.



În general, pentru un număr $m \in \mathbb{R}$, avem:

- dreapta care este reprezentarea geometrică a mulțimii $\{(m, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ are ecuația $x = m$, este paralelă cu Oy și trece prin punctul de coordonate $(m, 0)$;
- dreapta care este reprezentarea geometrică a mulțimii $\{(x, m) \mid x \in \mathbb{R}\}$ are ecuația $y = m$, este paralelă cu Ox și trece prin punctul de coordonate $(0, m)$.

Dacă reprezentăm într-un reper cartezian dreptele d_1, de ecuație $x = m$, și d_2, de ecuație $y = n$, punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 este punctul $M(m, n)$.



2. Funcții

2.1. Noțiunea de funcție

Noțiunea de funcție a devenit familiară matematicienilor pe la sfârșitul secolului al XVI-lea și începutul celui de-al XVII-lea, o dată cu cercetările lui Neper, Descartes și Fermat. Termenul de funcție apare în lucrările lui Leibniz, în anul 1694. Trebuie să evidențiem însă faptul că matematicienii au folosit corespondența dintre mărimi încă din antichitate. Ideea de funcție s-a clarificat treptat, în secolul al XVII-lea prin lucrările lui Leibniz și Newton, astfel încât pe la sfârșitul secolului al XVII-lea, Jean Bernoulli, elevul lui Leibniz, a introdus pentru prima dată în terminologia matematică definiția noțiunii de funcție și, în același timp, simbolul pentru desemnarea funcției de o variabilă reală. Lui Leonhard Euler, elevul lui Jean Bernoulli, îi aparține simbolul $f(x)$, introdus în anul 1740.

Definiție

Fie A și B două mulțimi nevide. Prin **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se înțelege orice **lege** f (procedeu sau convenție etc.) prin care **oricărui element $x \in A$ i se asociază un unic element, notat $f(x)$, din B.**

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției, iar mulțimea B se numește **codomeniul** (domeniul valorilor) funcției.

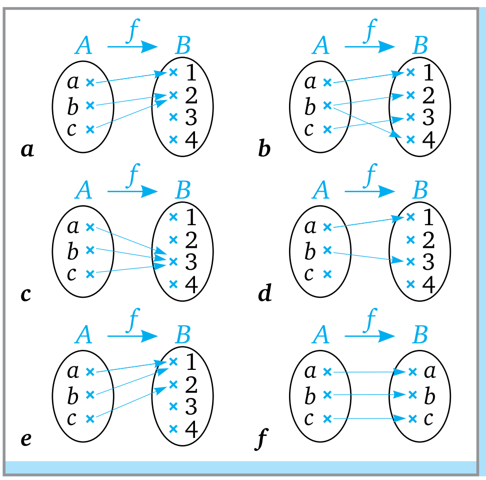
O funcție definită pe A cu valori în B se notează $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$ și se citește f definit pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

Exercițiu rezolvat

Fie mulțimile finite $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ și corespondențele indicate prin săgeți din figurile a)–f). Care dintre corespondențele date definește o funcție pe A cu valori în B?

Rezolvare

Evident, schema din figura ***a*** definește o funcție definită pe A cu valori în B, deoarece oricărui element din A îi corespunde în B un element și numai unul; schema din figura ***b*** nu definește o funcție deoarece elementului $b \in A$ îi corespund în B elementele 2 și 4; schema din figura ***c*** definește o funcție constantă deoarece $f(a) = f(b) = f(c) = 3$ și avem $f(A) \subset B$; schema din figura ***d*** nu definește o funcție deoarece elementul $c \in A$ nu are imagine în B; schema din figura ***e*** definește o funcție și avem $f(A) \subset B$; schema din figura ***f*** descrie o funcție definită pe A cu valori în mulțimea A.



Rețineți! O funcție este determinată de trei elemente:
- domeniul de definiție A;
- mulțimea în care funcția ia valori B;
- legea de corespondență.

Definiție

Fie $f: A \to B$ o funcție. Dacă x este un element oarecare din A, iar y este elementul $f(x)$, atunci vom scrie $y = f(x)$. Această egalitate se numește **dependență funcțională** asociată funcției f, iar x se numește **variabilă** sau **argument**.

2.2. Modalități de a descrie o funcție

Funcțiile pot fi definite în mai multe moduri, dar, de fiecare dată, indiferent de modul cum este descrisă funcția, trebuie să precizăm cele trei elemente care o caracterizează.

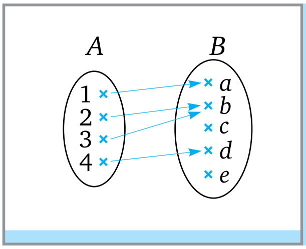
2.2.1. Funcții definite sintetic

O funcție $f: A \to B$ poate fi definită precizând pentru fiecare element din A ce element i se asociază din mulțimea B.

Exemplu:

Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$. Definim $f: A \to B$ astfel: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$, $f(4) = d$.
Legea de asociere a acestei funcții poate fi reprezentată printr-o diagramă Venn Euler, ca cea de alături, sau printr-un tabel, ca cel mai jos:

A	1	2	3	4
B	a	b	b	d



2.2.2. Funcții definite analitic

O funcție $f: A \to B$ poate fi definită specificând o proprietate (sau relațiile) ce leagă un element oarecare x din A de elementul $f(x)$ din B.

Exemple:

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, care asociază fiecărui număr real x cubul său, x^3.

2. Dându-se o formulă (sau o expresie algebrică) $E(x)$, putem să-i asociem o funcție sau mai multe funcții care vor avea domeniul și codomeniul submulțimi ale lui $\mathbb{R}$. De exemplu, fie expresia $E(x) = x^2 + 4$. Putem defini funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = x^2 + 4$.
   Dar putem asocia aceleiași expresii $E(x) = x^2 + 4$, funcția $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 4$, care este diferită de funcția f definită mai sus, deoarece cele două funcții nu au același domeniu de definiție.

   În concluzie, **unei expresii sau formule i se pot asocia mai multe funcții.**

Când definim o funcție cu ajutorul unei expresii algebrice trebuie să punem condiții astfel încât expresia respectivă să aibă sens pentru orice element din domeniul de definiție.

Exemplu:

Dacă $E(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$, acestei expresii îi putem asocia funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$, dar nu și funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$, deoarece expresia $E(x)$ nu are sens pentru $x = 3$.

O funcție definită prin mai multe formule se numește **funcție multiformă**.

Exemplu:

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{dacă } x < 1 \\ x^2+1, & \text{dacă } 1 \le x \le 5 \\ \dfrac{2}{x}, & \text{dacă } x > 5 \end{cases}$ este o funcție definită cu ajutorul mai multor formule, adică o funcție multiformă.

În cazul unei funcții multiforme trebuie să avem în vedere faptul că fiecare dintre formule este valabilă pentru o anumită submulțime a domeniului de definiție, iar două dintre formule nu pot fi folosite pentru determinarea imaginii unuia și aceluiași element.

2.3. Funcții egale

Definiție

Fie A, B, A', B' mulțimi nevide. Două funcții $f : A \to B$ și $g : A' \to B'$ se numesc **egale** dacă și numai dacă $A = A'$, $B = B'$ și $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in A$.

Dacă există cel puțin un element $x \in A$ astfel încât $f(x) \ne g(x)$, atunci funcțiile f și g nu sunt egale și se notează $f \ne g$.

Exemplu:

1. Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $g(x) = (x-1)^2(x+2)$ sunt egale întrucât au același domeniu de definiție, același codomeniu și $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. Fie funcțiile $f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{-2, -1, 8, 12\}$, $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \in \{2,3\} \\ x^2-5x+12, & x \in \{4,5\} \end{cases}$ și $g: \{2, 3, 4, 5\} \to \{-2, -1, 8, 12\}$, $g(x) = \begin{cases} x^2-4x+2, & x \in \{2,3\} \\ 4x-8, & x \in \{4,5\} \end{cases}$.
   Se observă că f și g au același domeniu de definiție, același codomeniu și $f(2) = g(2)$, $f(3) = g(3)$, $f(4) = g(4)$, $f(5) = g(5)$. Prin urmare, $f = g$.
3. Fie funcțiile $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5x-4}{x^2+1}$, $g(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+x+1}$. Se constată că nu există nici o submulțime $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f = g$, deoarece $\dfrac{5x-4}{x^2+1} \ne \dfrac{5x+4}{x^2+x+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Așadar, $f \ne g$.

2.4. Prelungirea și restricția unei funcții

Definiție

Fie o funcție $f : A \to B$ și $X \subset A$.

Funcția $g: X \to B$, $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$, se numește **restricția funcției** f la submulțimea X.

Funcția f se mai numește **prelungirea funcției** g la mulțimea A.

Exemplu:

Să considerăm funcțiile: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{pentru } x \in [-1,1] \\ \dfrac{1}{2}, & \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}.$$

Funcția f este, în acest caz, restricția la intervalul $[-1, 1] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$ a funcției g, iar g este prelungirea la mulțimea $\mathbb{R}$ a funcției f.

2.5. Graficul unei funcții

Definiție

Fie o funcție $f : A \to B$. Se numește **graficul** funcției f mulțimea

$$\boxed{G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}}$$

Observații:

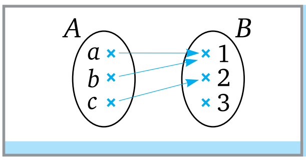
1. Graficul G_f este independent de codomeniul B și $G_f \subseteq A \times B$.
2. Un punct $M(\alpha, \beta) \in A \times B$ aparține graficului G_f dacă $\alpha \in A$ și $\beta = f(\alpha)$. Putem scrie

$$\boxed{G_f = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in A \times B, \beta = f(\alpha)\}}$$

Exemplu:

Fie funcția $f : A \to B$ definită prin diagrama alăturată.
Graficul funcției f este mulțimea

$$G_f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}.$$



2.6. Imaginea și preimaginea unei funcții

Definiție

Fie funcția $f : A \to B$. Mulțimea tuturor valorilor pe care le ia funcția se numește **imaginea funcției** și se notează $\mathrm{Im} f$. Putem scrie:

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \{y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y\}}$$

Observație:

Se observă că $\mathrm{Im}f$ este o submulțime a codomeniului. Deci, se impune a se face distincție între codomeniul B (mulțimea în care funcția ia valori) și mulțimea valorilor funcției, care este $\mathrm{Im}f$.

Exemple:

1. Fie $f: \{2, 3, 4\} \to \{6, 9, 12, 15, 18\}, f(x) = 3x$.
   Avem $\mathrm{Im}f = \{f(2), f(3), f(4)\} = \{6, 9, 12\} \subset B$, dar $\mathrm{Im}f \neq B$.
2. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2$ are $\mathrm{Im}f = \{-2\} \subset \mathbb{R}$.
3. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$ are $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}$.

Definiție

Dacă X este o submulțime a lui A, notăm cu $f(X)$ mulțimea valorilor pe care le ia $f(x)$ atunci când $x \in X$. Mulțimea $f(X)$ se numește **imaginea mulțimii X prin funcția f**. Putem scrie:

$$\boxed{f(X) = \{y \in B \mid \exists\, x \in X \text{ astfel încât } f(x) = y\}}$$

Exemple:

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$. Fie $X = \{2, 4, 6, 8\}$.
   Avem $f(X) = f(\{2, 4, 6, 8\}) = \{f(2), f(4), f(6), f(8)\} = \{6, 12, 18, 24\}$.
2. Fie funcția $f: A \to \{a, b, c, d, e\}$, cu $A = \{1, 2, 3, 4\}$, definită prin tabelul:

x	1	2	3	4
$f(x)$	a	b	c	e

   Avem $f(A) = f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{a, b, c, e\} = \mathrm{Im}f$.

Definiție

Fie funcția $f: A \to B$ și $C \subseteq f(A)$ o submulțime a mulțimii valorilor funcției f. Mulțimea $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ se numește **preimaginea mulțimii C prin funcția f**.

Observație:

Preimaginea mulțimii C prin funcția f este o submulțime a domeniului de definiție al funcției f.

Exemple:

1. Fie funcția $f: \{0; 1; 2; 3\} \to \{-8; -6; -4; -2; 0; 2\}, f(x) = -2x$.
   Fie mulțimile $C = \{-6; -4; -2; 0\}$, $D = \{-4; 0\}$, $E = \{-4; -2; 0\}$. Obținem că:
   - $\{0; 1; 2; 3\}$ este preimaginea mulțimii C prin funcția f;
   - $\{0; 2\}$ este preimaginea mulțimii D prin funcția f;
   - $\{0; 1; 2\}$ este preimaginea mulțimii E prin funcția f.
2. Fie funcția $f: [-2; 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$. Preimaginea intervalului $[-1, 0]$ prin funcția f este intervalul $[0; 1]$ deoarece $\{x \in [-2; 2] \mid f(x) \in [-1; 0]\} =$
   $= \{x \in [-2; 2] \mid -1 \le x - 1 \le 0\} = \{x \in [-2; 2] \mid 0 \le x \le 1\} = [0; 1]$.

2.7. Funcția identică

Definiție

Funcția $\mathbf{1}_A : A \to A$, definită prin $\mathbf{1}_A(x) = x$ pentru orice $x \in A$ se numește **funcția identică** a mulțimii A.

Exemple:

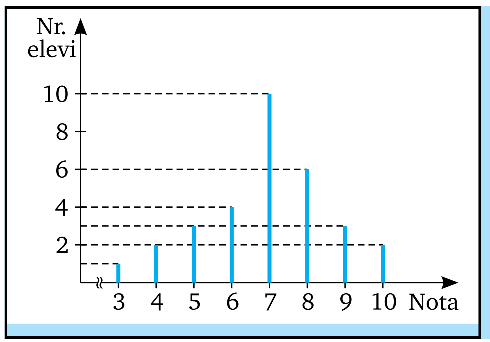
1. Funcția $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este funcția identică a mulțimii numerelor reale.
2. Funcția $e : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, definită prin $e(i) = i$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este funcția identică a mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$.

2.8. Lecturi grafice

Pentru prezentarea unor fenomene, tendințe din natură și societate, de multe ori se recurge la o reprezentare geometrică a graficului fenomenului sau procesului respectiv. Pentru simplificarea limbajului (și dacă nu există pericol de confuzie) vom numi reprezentarea geometrică a graficului tot grafic. Studiind graficul putem să înțelegem comportamentul unei funcții chiar și fără să analizăm în amănunt toate corespondențele pe care funcția le realizează.

Exemple:

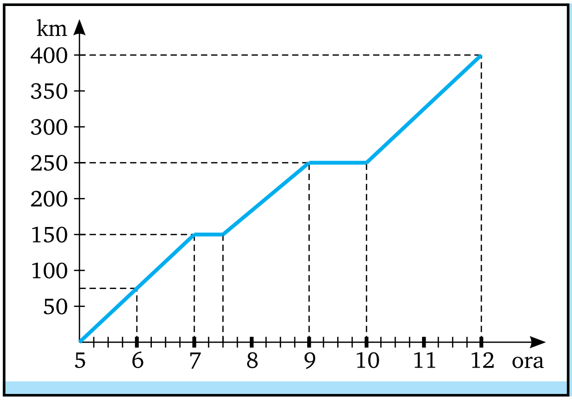
1. Graficul alăturat prezintă rezultatele unei probe de evaluare la matematică la sfârșitul semestrului I. Pe axa orizontală au fost (reprezentate) fixate notele, iar pe axa verticală numărul de elevi.



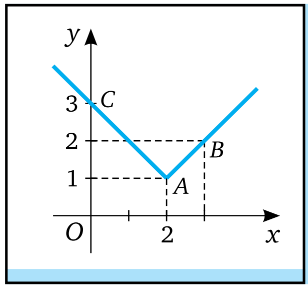
   De pe grafic citim unele informații precum:
   - nota 6 a fost luată de 4 elevi;
   - nota obținută de cei mai mulți elevi a fost 7, iar cea obținută de cei mai puțini a fost 3;
   - sunt mai mulți elevi care au luat note de la 7 la 10 ($10 + 6 + + 3 + 2 = 21$) decât cei care au luat note sub 7 ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$ elevi).

2. În figura următoare este redat prin grafic modul cum un autoturism a parcurs 400 km în intervalul de timp de la ora 5 la ora 12. Pe axa orizontală (axa absciselor) este reprezentat timpul, iar pe axa verticală (axa ordonatelor) distanța exprimată în km. Graficul ne oferă observații precum:
   - plecarea s-a făcut la ora 5;
   - până la ora 7 fuseseră parcurși 150 km și începând cu ora 7 face o pauză de o jumătate de oră;

- în primele două ore a mers cu viteza medie $v = \dfrac{150-0}{7-5} = 75$ km/h;
- traseul este străbătut cu două pauze: una de o jumătate de o oră între orele 7 și 7:30 și alta de o oră între orele 9 și 10.



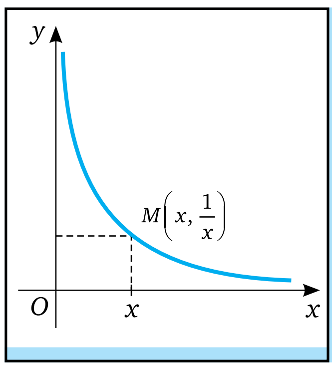
3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = |x-2| + 1$, care se mai poate scrie și sub forma $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \ge 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$ al cărei grafic este prezentat în figura alăturată.



Desprindem următoarele caracteristici:

- funcția este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 2]$ și crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$;
- are toate valorile mai mari sau egale cu 1, deci $\mathrm{Im}\, f = [1, +\infty)$; în concluzie, funcția este mărginită inferior de valoarea 1 și nemărginită superior;
- imaginea geometrică a graficului este constituită din două semidrepte $[AC$ și $[AB$ (se prezintă sub forma unui unghi drept), unde $A(2; 1)$, $B(3; 2)$ și $C(0; 3)$;
- graficul este simetric față de dreapta de ecuație $x_0 = 2$.
  Într-adevăr, considerând două valori x_1 și x_2 simetrice față de $x_0 = 2$, de exemplu, $x_1 = 2 - m$ și $x_2 = 2 + m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, funcția are valorile:
  – pentru $x_1 = 2 - m < 2 \Rightarrow f(x_1) = -x_1 + 3 = -(2 - m) + 3 = m + 1$;
  – pentru $x_2 = 2 + m > 2 \Rightarrow f(x_2) = x_2 - 1 = 2 + m - 1 = m + 1$.
  Rezultă $f(x_1) = f(x_2) = m + 1$.

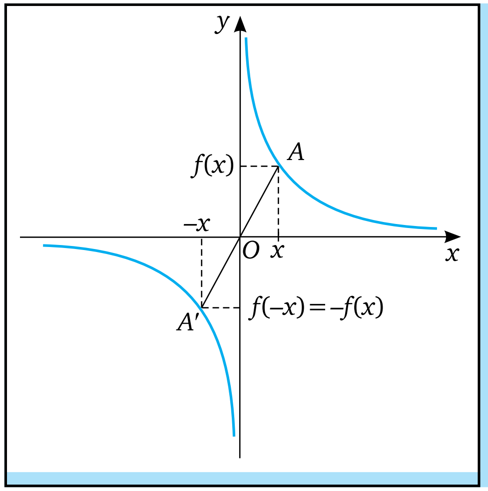
4. Considerăm funcția $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}$, al cărei grafic este prezentat în figura alăturată.



Se observă că dacă x crește foarte mult (spre $+\infty$), punctele graficului G_f „se apropie“ din ce în ce mai mult de axa Ox fără, însă, a o intersecta. Spunem că axa Ox (sau dreapta $y = 0$) este *asimptotă orizontală* (la $+\infty$) pentru graficul funcției f. Asemănător, dacă x ia valori cât mai apropiate de valoarea 0, graficul funcției „se apropie“ din ce în ce mai mult de axa Oy (fără a o intersecta). Spunem că axa Oy (sau dreapta $x = 0$) este *asimptotă verticală* (la dreapta) pentru graficul funcției f.

Din grafic mai citim despre funcția f următoarele însușiri:

- este descrescătoare;
- $f(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$;
- nu intersectează axele de coordonate;
- este mărginită inferior de 0 și nemărginită superior, adică $\text{Im} f = (0, +\infty)$;
- este impară, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

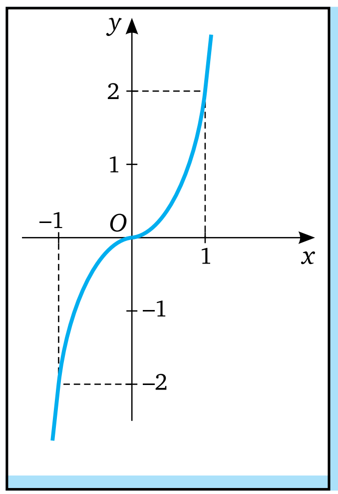


Observație: Dacă prelungim funcția dată f la funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dată prin $g(x) = \dfrac{1}{x}$, atunci graficul funcției arată ca în figura alăturată și este simetric față de origine. Pe intervalul $(-\infty, 0)$, funcția g este descrescătoare. Observăm că dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală pentru graficul funcției g atât la $+\infty$, cât și la $-\infty$. De asemenea, axa Oy (dreapta $x = 0$) este asimptotă verticală pentru graficul funcției g, atât la stânga, cât și la dreapta.

Exercițiu rezolvat

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x$, al cărei grafic este prezentat în figura alăturată. Analizați graficul și precizați:

a) monotonia funcției f;
b) semnul funcției f;
c) punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate;
d) imaginea funcției f;
e) paritatea funcției f;
f) dacă funcția are punct sau axă de simetrie.



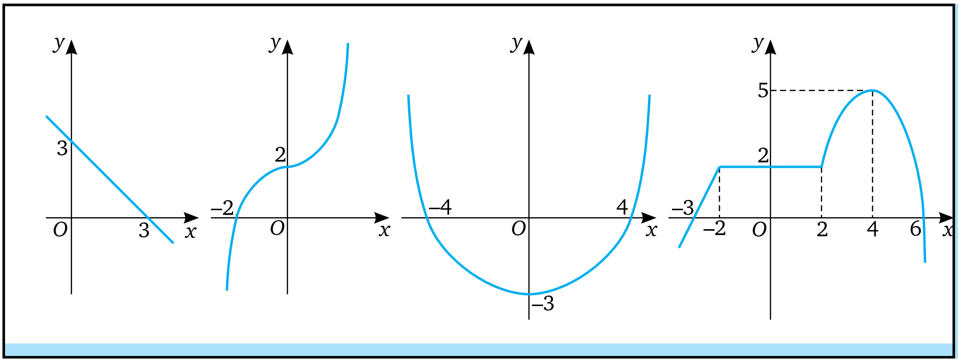
Rezolvare

a) f este crescătoare pe $\mathbb{R}$;
b) $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$,
$f(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$,
$f(x) = 0$ pentru $x = 0$;
c) graficul intersectează axele de coordonate în punctul $O(0, 0)$;
d) $\text{Im} f = \mathbb{R}$;
e) $\forall x \in \mathbb{R}$ avem $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, deci f este impară;
f) graficul lui f este simetric față de punctul $O(0, 0)$

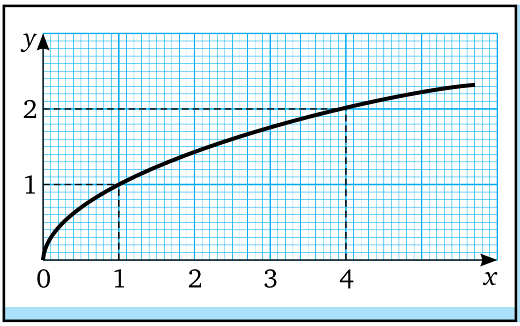
Observație: Orice dreaptă de ecuație $y = m$ intesectează graficul lui f într-un singur punct. Exemplu: $y = 10$. Punctul de intersecție dintre graficul lui f și această dreaptă este soluția ecuației $f(x) = y \Rightarrow x^3 + x = 10 \Leftrightarrow x^3 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) + (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Ecuația $x^2 + 2x + 5 = 0$ nu are soluții reale deoarece $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$. În concluzie, pentru $x = 2$ obținem $f(2) = 10$, rezultă punctul $M(2, 10) \in G_f$.

Exerciții propuse

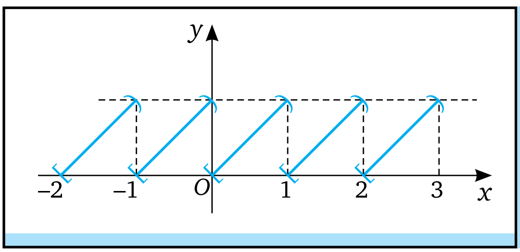
1. Pentru fiecare dintre funcțiile definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$ reprezentate grafic mai jos, precizați:
a) monotonia; b) semnul;
c) coordonatele punctelor de intersecție a graficului cu axa Ox și cu axa Oy.



2. În figura alăturată este reprezentată grafic funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$. Precizați următoarele caracteristici:
a) monotonia; b) Im f;
c) citiți (cu aproximație) de pe grafic:
i) $f(2)$; ii) $f(3)$;
iii) x pentru care $f(x) = 0{,}5$.



3. Figura alăturată prezintă graficul funcției parte fracționară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$. Analizați graficul și răspundeți următoarelor cerințe:
a) precizați semnul funcției;
b) precizați monotonia funcției;
c) arătați că funcția este periodică și determinați perioada.



Exerciții propuse

3. Funcții numerice. Operații cu funcții numerice

Definiție

O funcție $f : A \to B$ pentru care $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se numește **funcție numerică** sau **funcție reală de argument real**.

Exemple:

Următoarele funcții sunt funcții numerice:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$;

2. $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-1}$;

3. $f : [-\infty, 0) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$;

4. $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

3.1. Operații cu funcții numerice

Cu funcțiile numerice se pot realiza aceleași operații care se pot realiza și cu numere, rezultatele fiind tot funcții numerice.

Definiție

Fie funcțiile numerice (sau reale) $f : A \to \mathbb{R}$ și $g : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$.

1. Funcția $s = f + g : A \to \mathbb{R}, s(x) = f(x) + g(x)$, pentru orice $x \in A$, se numește **suma** dintre funcția f și funcția g.
2. Funcția $d = f - g : A \to \mathbb{R}, d(x) = f(x) - g(x)$, pentru orice $x \in A$, se numește **diferența** dintre funcția f și funcția g.
3. Funcția $p = f \cdot g : A \to \mathbb{R}, p(x) = f(x) \cdot g(x)$, pentru orice $x \in A$, se numește **produsul** funcțiilor f și g.
4. Funcția $h = \dfrac{f}{g} : A_1 \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, pentru orice $x \in A_1 = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, se numește **câtul** funcțiilor f și g.

3.2. Graficul unei funcții numerice

Graficul unei funcții numerice $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

Observații:

1. $M(a, b) \in G_f$ dacă și numai dacă $b = f(a)$.
2. Putem scrie $G_f = \{(a, b) \mid a \in A; b = f(a)\}$.
3. Putem reprezenta geometric graficul unei funcții numerice prin raportarea acestuia la un sistem de coordonate, adică asociind fiecărui element al graficului funcției un punct din plan.

Mulțimea $\{P(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in G_f\}$ se numește **reprezentarea geometrică a graficului funcției *f***; pentru simplificarea limbajului (și dacă nu există posibilitatea unei confuzii) această reprezentare geometrică se numește tot **graficul funcției *f***.

4. Orice paralelă la axa Oz taie graficul funcției f în cel mult un punct.

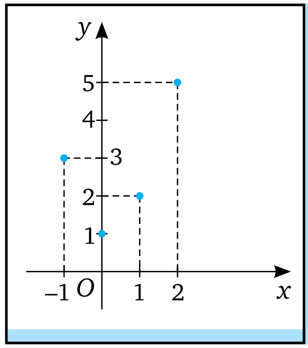
Exemplu:

Fie funcția dată prin tabelul următor:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	1	2	5

Graficul funcției este mulțimea:
$G_f = \{(-1, 3), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$.

Reprezentând perechile de numere din G_f într-un sistem de coordonate carteziene, obținem 4 puncte din plan (figura alăturată). Prin urmare, reprezentarea geometrică a graficului funcției f este formată din patru puncte.



3.3. Intersecția graficului cu axele de coordonate

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ o funcție numerică.

■ **Intersecția cu axa *Ox*** este mulțimea $G_f \cap Ox = \{(x, f(x)) \mid f(x) = 0\}$. Deci, pentru a determina intersecția graficului cu axa Ox trebuie să rezolvăm ecuația $f(x) = 0$, $x \in A$.

■ **Intersecția cu axa *Oy*** este mulțimea $G_f \cap Oy = \{(0, f(0) \mid 0 \in A\}$. Deci, pentru a determina intersecția graficului cu axa Oy trebuie să verificăm dacă $0 \in A$ și apoi, dacă $0 \in A$, să calculăm $f(0)$; dacă $0 \notin A$, atunci intersecția graficului cu axa Oy este mulțimea vidă.

Exemplu:

Fie funcția $f : (-4, 5) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$.
Intersecția graficului cu axa Ox este $G_f \cap Ox = \{(1; 0)\}$, deoarece ecuația $f(x) = 0$ are soluția $x = 1$.
Intersecția graficului cu axa Oy este mulțimea $G_f \cap Oy = \{(0; 1)\}$, deoarece $0 \in (-4; 5)$ și $f(0) = 1$.

3.4. Funcții mărginite

Definiții

Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție numerică și $m, M \in \operatorname{Im} f$.
Numărul m se numește **minim al funcției** f dacă $f(x) \geq m$, $\forall\, x \in A$.
Numărul M se numește **maxim al funcției** f dacă $f(x) \leq M$, $\forall\, x \in A$.
O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ se numește **mărginită** dacă există $m, M \in \operatorname{Im} f$ astfel încât $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in A$.

3.5. Funcții pare și funcții impare

Definiții

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o submulțime simetrică față de origine (adică $\forall\, x \in A \Rightarrow -x \in A$) și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție reală.

- f se numește **funcție pară** dacă $f(-x) = f(x),\ \forall\, x \in A$.
- f se numește **funcție impară** dacă $f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in A$.

Exemple:

1. Fie funcția $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \cdot \sqrt{x^2 - 1}$. Luăm $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ și avem $-x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; $f(-x) = |-x| \cdot \sqrt{(-x)^2 - 1} = |x| \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$, deci f este pară.
2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5$ este impară deoarece $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
3. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ nu este nici pară, nici impară.

3.6. Simetria graficului unei funcții față de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$, sau față de puncte oarecare din plan

3.6.1. Simetria față de origine

Fie funcția $f : A \to B$. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este graficul funcției.

Un punct $P(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este **punct de simetrie** pentru graficul funcției f dacă pentru orice $M \in G_f$, simetricul M' al lui M față de P aparține lui G_f.

Altfel spus, $P(a, b)$ este punct de simetrie pentru graficul funcției f dacă, pentru orice $x \in A$, avem:

- $2a - x \in A$ (punctul $a \in \mathbb{R}$ este punct de simetrie pentru mulțimea $A \subset \mathbb{R}$);
- $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

În particular, originea $O(0, 0)$ este punct de simetrie pentru G_f dacă pentru orice $x \in A$ avem $-x \in A$ și $f(-x) = -f(x)$. În acest caz se spune că funcția $f : A \to B$ este impară și că G_f este simetric față de originea O.

3.6.2. Simetria față de axa *Oy*

Axa Oy, de ecuație $x = 0$, este **dreaptă de simetrie** pentru G_f dacă, pentru orice $x \in A$, avem $-x \in A$ (O este punct de simetrie pentru A) și $f(-x) = f(x)$.

În acest caz se spune că funcția $f : A \to B$ este pară și că G_f este simetric față de axa Oy.

3.6.3. Simetria față de o dreaptă paralelă cu *Oy*

Dreapta $d \parallel Oy$, de ecuație $x = a$, este **dreaptă de simetrie** pentru graficul funcției f dacă pentru orice $M \in G_f$, simetricul M' al lui M față de dreapta d aparține lui G_f. Altfel spus, $x = a$ este dreaptă de simetrie pentru graficul funcției f dacă, pentru orice $x \in A$, avem:

- $2a - x \in A$ (punctul $a \in \mathbb{R}$ este punct de simetrie pentru $A \subset \mathbb{R}$);
- $f(2a - x) = f(x)$.

3.7. Funcții monotone

Fie A și B submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ și funcția numerică $f : A \to B$. În cazul unor funcții numerice ne interesează ce se întâmplă cu șirul valorilor corespunzătoare ale funcției, dacă vom considera un șir oarecare strict crescător sau strict descrescător de valori ale lui x din submulțimea A' a lui A.

Definiție

Spunem că f este **strict crescătoare** (respectiv **crescătoare**) pe mulțimea A' dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A'$, $x_1 < x_2$, are loc inegalitatea $f(x_1) < f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) \le f(x_2)$).

Cu alte cuvinte, dacă argumentul x „crește“ de la x_1 la x_2, atunci și valoarea funcției „crește“ de la $f(x_1)$ la $f(x_2)$.

Definiție

Spunem că funcția f este **strict descrescătoare** (respectiv **descrescătoare**) pe mulțimea A' dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A'$, $x_1 < x_2$, are loc inegalitatea $f(x_1) > f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) \ge f(x_2)$).

Dacă funcția f este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe A' spunem că este **strict monotonă** pe A'.

Analog, funcția f este **monotonă** pe A' dacă este crescătoare sau descrescătoare pe A'.

Exemple:

1. Funcția $f : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ este crescătoare, deoarece pentru orice $x_1 < x_2$ din $\{0, 1, 2\}$ avem $f(x_1) \le f(x_2)$.
2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x$ este strict descrescătoare, deoarece pentru orice $x_1 < x_2$, avem $-3x_1 > -3x_2$, deci $f(x_1) > f(x_2)$.

Observații:

1. Despre funcția crescătoare se spune că „păstrează sensul inegalităților“, adică în cazul când $f : A \to B$ este crescătoare, atunci $x_1 \le x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$. Spre deosebire de funcțiile crescătoare, funcțiile descrescătoare „schimbă sensul inegalităților“, adică dacă $f : A \to B$ este descrescătoare, atunci $x_1 \le x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$.
2. Putem studia monotonia unei funcții numerice cercetând semnul raportului $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, unde $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$. Deci:
   - f este crescătoare $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \ge 0$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$;
   - f este descrescătoare $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le 0$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$;

- f este strict crescătoare $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0,\ \forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$;
- f este strict descrescătoare $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0,\ \forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$.

Exemplu:

Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$. Studiem monotonia acestei funcții.

Avem $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1^2-1}{2x_1} - \dfrac{x_2^2-1}{2x_2} = \dfrac{x_1^2x_2 - x_2 - x_2^2x_1 + x_1}{2x_1x_2} =$

$= \dfrac{x_1x_2(x_1-x_2)+(x_1-x_2)}{2x_1x_2} = \dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{2x_1x_2}$.

Deci $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{x_1x_2+1}{2x_1x_2} > 0$, deoarece $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$.

Prin urmare, funcția f este strict crescătoare pe $[1, +\infty)$.

3.2. Funcții periodice

Definiție

Fie $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$,o funcție. Funcția f se numește **periodică** dacă $\exists\ T \in A$, $T \neq 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x),\ \forall\ x \in A$.

Numărul T, dacă există, se numește **perioada funcției f**.

Cel mai mic număr cu această proprietate se numește **peroada principală a funcției f**.

Exemplu:

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2004, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \sqrt{13}, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ este periodică și are ca perioadă orice număr întreg nenul.

Contraexemplu:

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ nu este periodică.

Demonstrație

Presupunem că f este periodică cu perioada $T > 0$.

Atunci $f(x + T) = 2(x + T) + 3 = 2x + 2T + 3$.

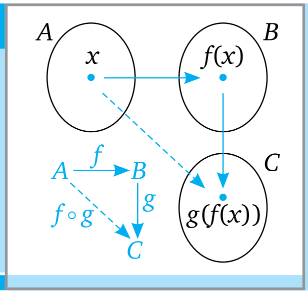
Condiția de periodicitate: $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow 2x + 2T + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow T = 0$, contradicție.

4. Compunerea funcțiilor

Definiție

Fie A, B, C trei mulțimi nevide și funcțiile $f : A \to B$ și $g : B \to C$ (putem scrie $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$).

Funcția $h : A \to C$ definită prin $h(x) = g(f(x))$ pentru orice $x \in A$ se numește **compunerea funcțiilor** g și f și se notează $h = g \circ f$.



Exemple:

1. Fie funcțiile $f : \{x_1, x_2\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$, definită prin $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, și $g : \{y_2, y_2, y_3\} \to \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, definită prin $g(y_1) = z_1$, $g(y_2) = z_2$, $g(y_3) = z_3$.
Atunci $g \circ f : \{x_1, x_2\} \to \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ este definită prin $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = z_1$, $(g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2) = z_2$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Deoarece domeniile și codomeniile celor două funcții sunt $\mathbb{R}$ sunt posibile compunerile $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ și $g \circ g$. Avem funcțiile:
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$;
$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 3x^2 + 2$;
$f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3f(x) + 2 = 3(3x + 2) + 2 = 9x + 8$;
$g \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(g(x)) = (g(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Atunci există funcția $f \circ f$.

$$f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) \in \mathbb{Q} \\ -f(x), & f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, & f(x) = x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & f(x) = -x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{Q}, & f(x) = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -(-x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & f(x) = -x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $f \circ f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$.

Exercițiu rezolvat

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date prin expresiile:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in (-\infty, 3] \\ 4x - 20, & x \in (3, +\infty) \end{cases} \text{ și } g(x) = \begin{cases} -5x - 2, & x \in (-\infty, 1] \\ -x + 9, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

Determinați funcția $g \circ f$.

Rezolvare

Metoda I. $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -5f(x) - 2, & f(x) \le 1 \\ -f(x) + 9, & f(x) > 1 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} -5f(x)-2, & (2x+1 \le 1 \wedge x \in (-\infty,3]) \vee (4x-20 \le 1 \wedge x > 3) \\ f(x)+9, & (2x+1 > 1 \wedge x \in (-\infty,3]) \vee (4x-20 > 1 \wedge x > 3) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -5f(x)-2, & (x \le 0 \wedge x \le 3) \vee \left(x \le \dfrac{21}{4} \wedge x > 3\right) \\ -f(x)+9, & (x > 0 \wedge x \le 3) \vee \left(x > \dfrac{21}{4} \wedge x > 3\right) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -5f(x)-2, & x \in (-\infty, 0] \cup \left(3, \dfrac{21}{4}\right] \\ -f(x)+9, & x \in (0, 3] \cup \left(\dfrac{21}{4}, +\infty\right) \end{cases} = \begin{cases} -5(2x+1)-2, & x \in (-\infty,0] \\ -5(4x-20)-2, & x \in \left(3, \dfrac{21}{4}\right] \\ -(2x+1)+9, & x \in (0, 3] \\ -(4x-20)+9, & x \in \left(\dfrac{21}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$

Metoda a II-a. $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = \begin{cases} -5f(x)-2, & f(x) \le 1 \\ -f(x)+9, & f(x) > 1 \end{cases}$.

Alcătuim tabelul de monotonie al funcției f.

x	$-\infty$		0		3			$\frac{21}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	7	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(f(x)) = \begin{cases} -5f(x)-2, & x \in (-\infty,0] \cup \left(3, \dfrac{21}{4}\right] \\ -f(x)+9, & x \in (0,3] \cup \left(\dfrac{21}{4}, +\infty\right) \end{cases} = \begin{cases} -5(2x+1)-2, & x \in (-\infty,0] \\ -5(4x-20)-2, & x \in \left(3, \dfrac{21}{4}\right] \\ -(2x+1)+9, & x \in (0, 3] \\ -(2x+1)+9, & x \in \left(\dfrac{21}{4}, +\infty\right) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -10x-7, & x \in (-\infty,0] \\ -2x+8, & x \in (0, 3] \\ -20x+98, & x \in \left(3, \dfrac{21}{4}\right] \\ -4x+89, & x \in \left(\dfrac{21}{4}, +\infty\right) \end{cases}.$$

Proprietățile compunerii funcțiilor

1. Compunerea funcțiilor este asociativă.

Dacă $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, atunci

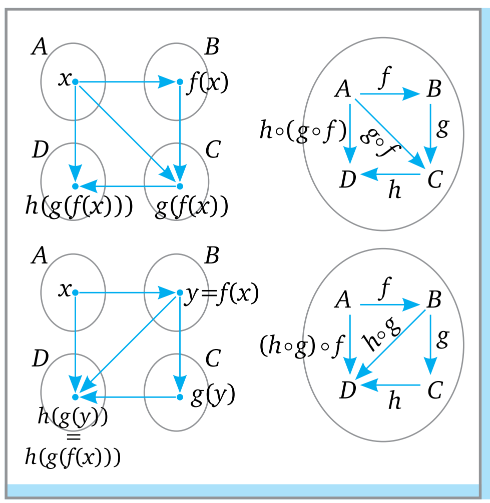
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demonstrație

Într-adevăr, există $h \circ (g \circ f) : A \to D$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, $(h \circ g) \circ f : A \to D$, $((h \circ g) \circ f)(x) = $ $= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ pentru orice $x \in A$, de unde rezultă $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Din acest motiv are sens scrierea

$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



2. Dacă $f : A \to B$, atunci $f \circ \mathbf{1}_A = f \wedge \mathbf{1}_B \circ f = f$.

Demonstrație

Într-adevăr, $f \circ \mathbf{1}_A : A \to B$, $(f \circ \mathbf{1}_A)(x) = f(\mathbf{1}_A(x)) = f(x)$, $\forall\, x \in A$.

$\mathbf{1}_B \circ f : A \to B$, $(\mathbf{1}_B \circ f)(x) = \mathbf{1}_B(f(x)) = f(x)$, $\forall\, x \in A$.

Rezultă că $f \circ \mathbf{1}_A = f$ și $\mathbf{1}_B \circ f = f$.

3. Dacă $A \xrightarrow{f} B$ și $C \xrightarrow{g} D$, atunci $g \circ f$ are sens în cazul în care $f(A) = \mathrm{Im} f \subset C$.

4. Este posibil ca fiind date două funcții $f : A \to B$, $g : C \to D$, $g \circ f$ să aibă sens, iar $f \circ g$ să nu aibă sens.

Exemplu:

Pentru funcțiile $f : [0, 1] \to [2, 3]$, $f(x) = x + 2$, $g : [2, 3] \to [4, 9]$, $g(x) = x^2$, are sens $g \circ f : [0, 1] \to [4, 9]$, $(g \circ f)(x) = g(f(x) = (f(x))^2 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$, dar nu are sens compunerea funcției f cu g, deoarece $\mathrm{Im} g = g([2, 3]) = [4, 9]$ nu este inclus în domeniul de definiție $[0, 1]$ al funcției f.

5. **Compunerea funcțiilor nu este comutativă.**
Există funcții $f : A \to B$, $g : C \to D$ astfel încât să aibă sens $g \circ f$ și $f \circ g$, dar $g \circ f \neq g \circ f$.

Exemplu:

Pentru funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g(x) = x^2$, avem
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$;
$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 2 = x^2 + 2$.
Cum $(f \circ g)(0) = 2$ și $(g \circ f)(0) = 4 \neq 2$, deducem că $f \circ g \neq g \circ f$.

Exerciții rezolvate

1. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \left[\frac{7}{4}, +\infty\right]$, $f(x) = x^2 + x + 2$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.
Determinați $f \circ g$, dacă există.

Rezolvare

Există $h = f \circ g : \mathbb{R} \to \left[\frac{7}{4}, +\infty\right]$, a cărei expresie se calculează astfel:
$h(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 + (x + 1) + 2 = x^2 + 3x + 4$; deci $h(x) = x^2 + 3x + 4$.

2. Fie funcțiile $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ și $g : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $g(x) = x^2 + 1$.
Determinați $f \circ g$, dacă există.

Rezolvare

Există $h = g \circ f : \mathbb{R} \to [2, \infty)$, unde $h(x) = g(f(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$.

3. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$.
Determinați $f \circ g$, dacă există.

Rezolvare

Există $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 2)^2 + 3 = x^2 + 4x + 7$.

4. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x \leq -1 \\ 2x + 1, & x > -1 \end{cases}$.
Determinați funcția $f \circ g$, dacă există.

Rezolvare

Evident, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 3g(x)+1, & g(x) < 1 \\ (g(x))^2+1, & g(x) \geq 1 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} 12x+10, & x \leq -1, x < \frac{1}{2} \\ 6x+4, & x > -1, x < 0 \\ 16x^2+24x+10, & x \leq -1, x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2+4x+2, & x > -1, x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} 12x+10, & x \in (-\infty, -1] \\ 6x+4, & x \in (-1, 0) \\ 4x^2+4x+2, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

*5. Inversa unei funcții

Se consideră o mulțime oarecare A. Vom nota cu $\mathbf{1}_A : A \to A$ funcția definită astfel: $\mathbf{1}_A(a) = a$, $(\forall)\ a \in A$. Reamintim că o astfel de funcție se numește **funcția identică a mulțimii A**.

Teoremă

Fie A o mulțime și 1_A funcția sa identică. Atunci:
1. Pentru orice mulțime B și pentru orice funcție $f : A \to B$, avem $f \circ 1_A = f$.
2. Pentru orice mulțime C și pentru orice funcție $g : C \to A$, avem $1_A \circ g = g$.

Demonstrație

1. Funcțiile f și $f \circ 1_A$ au același domeniu și codomeniu. Pentru a avea egalitate între $f \circ 1_A$ și f va trebui să arătăm că pentru orice $a \in A$ avem $(f \circ 1_A)(a) = f(a)$. Într-adevăr, $(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a)$.

2. Funțiile $1_A \circ g$ și g au același domeniu și codomeniu. Va trebui să arătăm că are loc egalitatea $1_A \circ g = g$. Într-adevăr, $\forall\ c \in C$ avem $(1_A \circ g)(c) = 1_A(g(c)) = g(c)$.

Definiție

O funcție $f : A \to B$ se numește **inversabilă** dacă există o funcție $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. (1)

Se observă că funcția g definită de relațiile (1) este unică. Pentru a demonstra acest lucru folosim metoda reducerii la absurd.

Presupunem că există și o altă funcție $g' : B \to A$ astfel încât $g' \circ f = 1_A$ și $f \circ g' = 1_B$ (2)

Atunci obținem: $g = 1_A \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_B = g'$.

Prin urmare, funcția g este unică.

Dacă f este o funcție inversabilă, atunci funcția g definită de relațiile (1) care este unică, se numește **inversa** funcției f și se notează f^{-1}.

*Temele marcate cu asterisc sunt facultative.

Exercițiu rezolvat

Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}, f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$ este inversabilă și determinați funcția inversă.

Rezolvare

Fie $y\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ oarecare; arătăm că există un unic $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, astfel încât $f(x)=y$. Într-adevăr ecuația $f(x)=y$ cu necunoscuta x se scrie succesiv:

$$\frac{3x-1}{x+1}=y \Leftrightarrow 3x-1=xy+y \Leftrightarrow (3-y)x=1+y \Leftrightarrow x=\frac{1+y}{3-y}.$$

Se observă că x obținut are sens deoarece $y\neq 3$ și mai mult, $x\neq -1$, adică $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Așadar funcția f este inversabilă și inversa funcției f este:

$$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\}, f^{-1}(y)=\frac{1+y}{3-y}.$$

Exerciții propuse

1. Se consideră funcțiile:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2-3x, & x\in(-\infty, 2)\\ x-1, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(-\infty,0)\\ 2x-4, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

Determinați $f+g, f-g, f\cdot g$ și $\dfrac{f}{g}$.

2. Efectuați compunerile $f\circ g$ și $g\circ f$ pentru funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite astfel:
a) $f(x)=2x+4, g(x)=-3x+2$; b) $f(x)=2x+4, g(x)=-x^2+5x+1$;
c) $f(x)=x^3, g(x)=4x-5$; d) $f(x)=2x-1, g(x)=\dfrac{x+1}{2}$.

3. Pentru fiecare dintre următoarele funcții $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, determinați două funcții $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $h=g\circ f$:
a) $h(x)=3(x+2)^2-2(x+2)+5$; b) $h(x)=(2x^2-4)^3$; c) $h(x)=5x^4-2x^2+3$;
d) $h(x)=-(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)-4$; e) $h(x)=(x^2-4x+3)^5$;
f) $h(x)=-2(x-2)^2+3(x-2)+1$.

4. Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-4, g(x)=\dfrac{x+4}{3}$. Arătați că $f\circ g=g\circ f$.

5. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date prin $f(x)=3x+1, g(x)=-2x$ și $h(x)=-4x+2$. Determinați funcția $f\circ g\circ h$.

6. Fie $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=(x-1)(x-2)(3-x)(4-x)$. Determinați două funcții $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $h=g\circ f$.

7. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<1\\ x^2+1, & x\geq 1\end{cases}$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}4x+3, & x\leq -1\\ 2x+1, & x>-1\end{cases}$.

Determinați $g\circ f$.

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$. Determinați $f\circ f$.

Exerciții propuse

9. Se consideră mulțimile $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și funcțiile

$f : A \to B, f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g : B \to A, g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

a) Determinați funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$. b)* Precizați inversele funcțiilor f și g.

10. Arătați că funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 0, x \text{ par} \\ 1, x \text{ impar} \end{cases}$ este periodică având perioada principală egală cu 2.

11. Studiați paritatea sau imparitatea funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 1$; b) $f : [-3, 4) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x$; d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^4 + 2x^2| + 1$.

12. Arătați că funcția $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ este impară și mărginită.

Funcția sgn x se numește signum de x sau semnul lui x.

Test de evaluare

1p **1.** Se consideră mulțimile $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-2, 0, 1\}$. Reprezentați într-un plan raportat la un reper cartezian xOy produsul cartezian $A \times B$.

2p **2.** Fie funcția $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{-2, 0, 1\}$ definită prin $f(-1) = -2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Reprezentați diagrama Venn Euler și apoi graficul funcției.

1p **3.** Reprezentați într-un plan raportat la un sistem de axe ortogonale următoarele perechi de puncte ordonate de numere reale $A(-2, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 3)$, $D(1, 4)$. Definiți o funcție care să aibă ca grafic mulțimea perechilor ordonate de mai sus.

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Graficul funcției este unghiul cu vârful în originea sistemului de axe și având ca laturi semidreptele ce sunt bisectoare ale primelor două cadrane. Realizând lectura grafică precizați:

0,5p a) mulțimea valorilor funcției;

0,25p b) monotonia;

0,25p c) coordonatele punctului de minim;

0,25p d) zerourile funcției;

0,25p e) axa de simetrie;

0,5p f) paritatea funcției;

0,5p g) numărul de soluții ale ecuației $f(x) = m$; discuție după $m \in \mathbb{R}$;

0,5p h) mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) \leq 1$.

2p **5.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 0 \\ 3x-2, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ 3x+2, & x > 0 \end{cases}$.

Calculați $g \circ f$ și $f \circ g$.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 4

Funcția de gradul întâi

Obiectele și fenomenele din natură depind unele de altele, astfel încât, de multe ori, una dintre mărimile ce caracterizează din punct de vedere cantitativ un fenomen este complet determinată de valorile celorlalte. Studierea acestor interdependențe a arătat necesitatea trecerii de la diferite dependențe concrete la forma lor generală, cu care operează teoria matematică. Astfel, legăturile dintre lungimea cercului și diametrul său, dintre forță și accelerație, dintre dilatarea unei bare și creșterea temperaturii, dintre cantitatea de materie primă folosită în procesul de fabricare a unui produs și cantitatea fabricată, toate acestea au ceva comun: reprezintă dependențe direct proporționale. Ele se pot scrie, matematic, cu ajutorul formulelor: $L = \pi D$; $F = m \cdot a$; $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t$, respectiv $Q = q \cdot C$. Aceste formule se pot reuni într-una singură, de forma $y = kx$, relație studiată matematic, independent de interpretarea mărimilor variabilelor y și x.

1. Definiția funcției de gradul întâi și reprezentarea geometrică a graficului

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Definiții

Dacă $a \neq 0$, atunci f se numește **funcție de gradul întâi** cu coeficienții a și b; ax se numește **termenul de gradul întâi**, iar b **termenul liber al funcției**.

Dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, atunci f se numește **funcție liniară** ($f(x) = ax$).

Dacă $a = 0$, atunci funcția f se numește **funcția constantă** ($f(x) = b$).

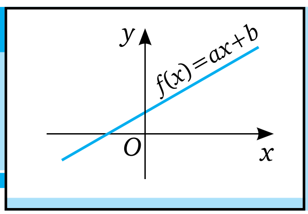
Ecuația $ax + b = 0$ se numește **ecuația atașată** funcției f.

Exemple:

1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ este o funcție de gradul întâi.
2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$ este o funcție liniară, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ este o funcție constantă.

Propoziție

Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul întâi este o **dreaptă** de ecuație $y = ax + b$, numită și dreapta soluțiilor ecuației $y = ax + b$.



Demonstrație

Fie $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ trei puncte ale graficului.

Arătăm că $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = a$,

de unde rezultă că punctele sunt coliniare.

Deducem că procedeul practic de a reprezenta grafic o funcție de gradul întâi este următorul: atribuim lui x două valori distincte x_1 și x_2, calculăm valorile corespunzătoare $f(x_1)$ și $f(x_2)$ și apoi reprezentăm punctele $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$ în plan, obținând astfel dreapta AB care este tocmai graficul funcției f.

Intersecția cu axele de coordonate

Fie funcția de gradul întâi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Intersecția cu axa *Ox*** este mulțimea $G_f \cap Ox = \{(x, f(x) \mid f(x) = 0\}$. Rezolvând ecuația $ax + b = 0$, obținem $x = -\dfrac{b}{a}$, deci $G_f \cap Ox = \left\{A\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)\right\}$.
- **Intersecția cu axa *Oy*** este mulțimea $G_f \cap Oy = \{(0, f(0) \mid 0 \in \mathbb{R}\} = \{B(0, b)\}$.

Observație: Cele două puncte ale graficului funcției de gradul întâi folosite pentru trasarea dreptei care reprezintă graficul funcției se pot lua astfel încât să fie punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate. Astfel, graficul funcției $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, este dreapta AB neparalelă cu axele de coordonate, de ecuație $y = ax + b$.

Exemple:

Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:
a) $f(x) = 3x - 5$; b) $f(x) = -2x + 1$; c) $f(x) = 2$.

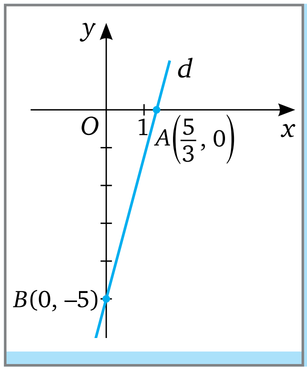
Rezolvare

a) Alcătuim tabelul de valori al funcției:
$x = 0 \Rightarrow f(0) = -5 \Rightarrow$ dreapta d de ecuație $y = 3x - 5$ intersectează axa Oy în punctul $B(0, -5)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dreapta d intersectează axa Ox în punctul $A\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$.

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-5	0	$+\infty$

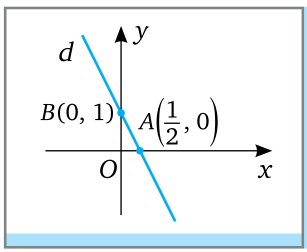


b) $f(0) = 1 \Rightarrow$ dreapta d de ecuație $y = -2x + 1$ intersectează axa Oy în punctul $B(0, 1)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ dreapta d intersectează axa Ox în punctul $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Alcătuim tabelul de valori al funcției:

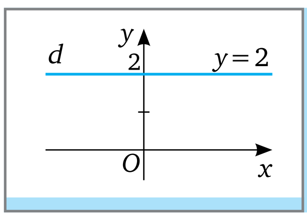
x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	0	$-\infty$



c) Alcătuim tabelul de valori al funcției:

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	2	2	2

Dreapta d de ecuație $y = 2$ este paralelă cu axa Ox.



Exerciții propuse

Exerciții propuse

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}5x+3, & x\in(-\infty,0]\\ 2, & x\in(0,1]\\ -3x-4, & x\in(1,5]\\ 4, & x\in(5,\infty)\end{cases}$.

Determinați $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$ și $f(6)$.

2. Reprezentați geometric dreptele de ecuații:
a) $4x+y-6=0$; b) $-3x-y+4=0$; c) $x=1$;
d) $x=0$; e) $x=-1$; f) $y=1$; g) $y=0$; h) $y=1$.

3. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$, $g(x)=5x+4$.

Determinați funcțiile: $f+g$, $f-g$, fg, $3f$, $-5g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, f^2, g^2.

4. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}10x-1, & x\le 2\\ -3x+7, & x>2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-6x+4, & x\le 5\\ 2x-9, & x>5\end{cases}$.

Determinați funcțiile: $f+g$, $f-g$, fg, $2f$, $-4q$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, f^2, g^2.

2. Monotonia și semnul funcției de gradul întâi

Referitor la monotonia funcției $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$ are loc următoarea teoremă:

Teoremă

Funcția de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, este:
- **strict crescătoare** dacă $a>0$;
- **strict descrescătoare** dacă $a<0$.

Demonstrație

Pentru $a>0$ avem $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, prin urmare funcția este strict crescătoare (vezi capitolul 3), iar pentru $a<0$ avem $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, deci funcția este strict descrescătoare.

Exemple:

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$ este strict crescătoare deoarece $a=2>0$.
2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$ este strict descrescătoare, deoarece $a=-1<0$.

În cele ce urmează vom stabili semnul funcției de gradul întâi.

A **stabili semnul** funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, înseamnă a determina valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) > 0$ și valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) < 0$. Pentru aceasta vom ține seama de monotonia lui f și de soluția ecuației atașate lui f.

Următorul rezultat stabilește „regula“ după care se determină semnul funcției de gradul întâi.

Teoremă

Funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, are zeroul $x = -\frac{b}{a}$, iar semnul său este semnul contrar lui a pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, respectiv este semnul lui a pe intervalul $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

Demonstrație

Rezolvând ecuația atașată $ax + b = 0$, obținem $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Presupunem că $a > 0$. În acest caz, funcția este strict crescătoare, deci:

- pentru $x < -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) < f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$; așadar, $\forall\, x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, avem $f(x) < 0$, adică semnul lui f este contrar lui a;
- pentru $x > -\frac{b}{a} \Rightarrow f(x) > f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$; așadar, $\forall\, x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, avem $f(x) > 0$, adică semnul lui f este semnul lui a.

Analog se procedează în în care când $a < 0$.

Pentru a afla semnul funcției de gradul întâi se parcurg următoarele etape:

- se află soluția ecuației atașate;
- se alcătuiește un tabel cu semnul funcției.

Exemple:

1. Pentru a studia semnul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$, vom determina zeroul funcției rezolvând ecuația atașată. Avem $2x - 6 = 0$ $\Rightarrow x = 3$.

Tabelul de semn al funcției este:

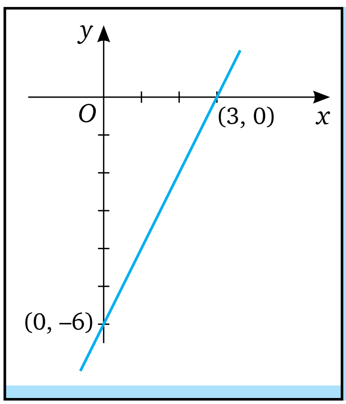
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$- - -$	0	$+ + +$

Prin urmare avem:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{3\}$;

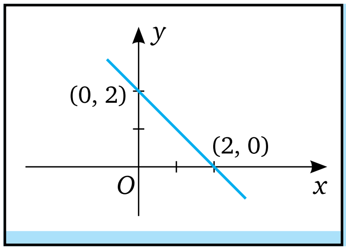
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$.



2. Studiem semnul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$.
Cum ecuația atașată are soluția $x = 2$ și $a = -1 < 0$, tabelul de semne al funcției f este:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$

Deci $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2\}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$.



Prin urmare, enunțul teoremei referitoare la semnul funcției de gradul întâi se poate schematiza în următorul **tabel de semne**:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	semn contrar lui a	0	semnul lui a

Exerciții propuse

Exerciții propuse

1. Precizați monotonia funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

a) $f(x) = 8x - 3$; b) $f(x) = -4x + 1$; c) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (-\infty, -3] \\ 4, & x \in (-3, 2] \\ -x+7, & x \in (2, \infty) \end{cases}$.

2. Alcătuiți tabelul de semne și reprezentați grafic funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = 7x + 2$; b) $f(x) = -2x + 6$; c) $f(x) = \begin{cases} 5x+1, & x \in (-\infty, 2] \\ -4x+9, & x \in (2, \infty) \end{cases}$.

3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0, ax + b < 0$

Definiții

- Inecuațiile de forma $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numesc **inecuații de gradul întâi** cu o singură necunoscută.
- Un număr real α este **soluție** a unei inecuații dacă dând lui x valoarea α se obține o propoziție adevărată.

A **rezolva** o inecuație în mulțimea $\mathbb{R}$, înseamnă a determina numerele reale x care verifică inegalitatea respectivă, aceasta fiind o problemă echivalentă cu aceea a stabilirii semnului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

Mulțimea soluțiilor unei inecuații de gradul întâi cu o necunoscută reprezintă un interval semimărginit al mulțimii $\mathbb{R}$, iar din punct de vedere geometric este o semidreaptă a axei.

Exerciții rezolvate

1. Rezolvați inecuația $2x - 4 \geq 0$.

Rezolvare

$2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty)$.

2. Rezolvați inecuația $3x + 2 < 0$.

Rezolvare

$3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 3x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$.

3. Rezolvați inecuația $2(x - 1) - 3(2x - 3) > 6 - 3(x + 5)$.

Rezolvare

$2(x - 1) - 3(2x - 3) > 6 - 3(x + 5) \Leftrightarrow 2x - 2 - 6x + 9 > 6 - 3x - 15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 6x + 3x > 2 - 9 + 6 - 15 \Leftrightarrow -x > -16 \Leftrightarrow x < 16 \Rightarrow x \in (-\infty, 16)$.

Există cazuri când inecuațiile se prezintă sub formă de produs sau raport. Mulțimea soluțiilor inecuațiiei într-un asemenea caz este dată de semnul produsului sau raportului respectiv.

3.1. Semnul unui produs

Pentru a studia semnul unui produs aplicăm regula semnelor de la înmulțire:

- produsul a doi factori care au același semn este pozitiv;
- produsul a doi factori care au semne contrare este negativ.

$(+) \cdot (+) = (+) \qquad (+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+) \qquad (-) \cdot (+) = (-)$

Exercițiu rezolvat

Rezolvați inecuațiile:

a) $(3x + 1)(2x - 7) \leq 0$; b) $(5 - x)(x + 3) > 0$

Rezolvare

a) Aflăm rădăcinile ecuației: $(3x + 1)(2x - 7) = 0$

$(3x + 1)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow (3x + 1 = 0 \text{ sau } 2x - 7 = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \text{ sau } x = \frac{7}{2}\right)$.

Alcătuim tabelul de semne:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x + 1$		$- - -$	0	$+ + +$		$+ + +$	
$2x - 7$		$- - - - - -$		$- - - - - -$	0	$+ + +$	
$(3x + 1)(2x - 7)$		$+ + +$	0	$- - - -$	0	$+ + +$	

Soluția inecuației este $x \in \left[-\frac{1}{3}, -\frac{7}{2}\right]$.

b) Aflăm rădăcinile ecuației $(5 - x)(x + 3) = 0$.

$(5 - x)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (5 - x = 0$ sau $x + 3 = 0) \Leftrightarrow (x = 5$ sau $x = -3)$.

Alcătuim tabelul de semne:

x	$-\infty$ $\quad$ -3 $\quad$ 5 $\quad$ $+\infty$
$5 - x$	+ + + + + + + 0 − − − −
$x + 3$	− − − 0 + + + + + + +
$(5 - x)(x + 3)$	− − − 0 + + + 0 − − − −

Soluția inecuației este $x \in (-3, 5)$

3.2. Semnul unui raport

Pentru a studia semnul unui raport, se pune condiția ca numitorul raportului să fie nenul și apoi să aplicăm regula semnelor de la împărțire:

- raportul a doi factori nenului care au același semn este pozitiv;
- raportul a doi factori nenuli care au semne contrare este negativ

$$\frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

$$\frac{(-)}{(-)} = (+) \qquad \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

Execițiu rezolvat

Rezolvați inecuația: $\dfrac{x+2}{3x-9} \leq 0$.

Rezolvare

Aflăm rădăcinile lui $x + 2 = 0$ și $3x - 9 = 0$. Deci $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ și $3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Alcătuim tabelul de semne:

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
$x + 2$	− − − 0 + + + + + +
$3x - 9$	− − − − − − − − − − − 0 + + +
$\dfrac{x+2}{3x-9}$	+ + + 0 − − − − | + + +

Soluția inecuației este $x \in [-2, 3)$.

Exerciții propuse

Rezolvați inecuațiile pentru $x \in \mathbb{R}$:

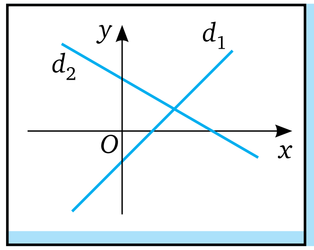
a) $7x - 2 \geq 0$; b) $7x - 2 < 0$; c) $-3x + 1 < 0$; d) $-5x + 9 \geq 0$;

e) $(x - 0{,}4)(2x + 5) > 0$; f) $\dfrac{7-x}{3x+1} < 0$.

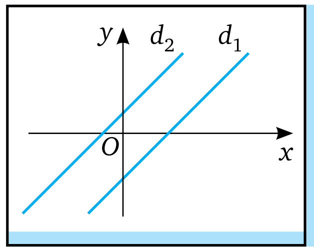
4. Pozițiile relative a două drepte în plan

Într-un plan înzestrat cu sistemul de axe xOy, considerăm două drepte: d_1, de ecuație $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, și d_2, de ecuație $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. În funcție de pozițiile pe care le pot avea, cele două drepte d_1 și d_2 pot fi:

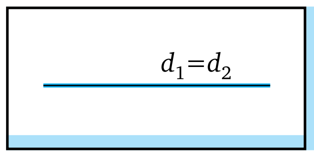
1. **drepte concurente** (au un punctul comun).
   Fie $d_1 \cap d_2 = \{A(\alpha, \beta)\}$. Avem $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$ și $a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$, cu alte cuvinte, perechea ordonată (α, β) verifică sistemul format din ecuația primei drepte și din ecuația celei de-a doua drepte.
   Între coeficienții necunoscutelor celor două ecuații are loc relația $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.



2. **drepte paralele** (nu au nici un punct comun; se simbolizează $d_1 \| d_2$). În acest caz, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.
   Între coeficienții necunoscutelor celor două ecuații are loc relația $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.



3. **drepte confundate** sau **suprapuse** (au toate punctele comune; se simbolizează $d_1 = d_2$).
   Un punct M aflat pe cele două drepte confundate are coordonatele $M\left(\alpha, \frac{-c_1 - a_1\alpha}{b_1}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Între coeficienții necunoscutelor celor două ecuații are loc relația $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.



5. Sisteme de tipul $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$

În majoritatea aplicațiilor practice ale algebrei, nu se ține seama numai de câte o condiție, ci se impun mai multe condiții deodată, astfel încât suntem conduși de cele mai multe ori la rezolvarea unor sisteme de ecuații. Mai precis, dacă trebuie să calculăm anumite mărimi, care urmează să verifice simultan un număr de condiții ce se pot scrie matematic sub forma unor ecuații, determinarea acestor mărimi se face prin rezolvarea sistemului format cu ecuațiile respective.

Definiție

Un sistem de forma $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$ (s), cu $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ se numește **sistem liniar** de două ecuații cu două necunoscute.

Necunoscutele sistemului (s) sunt x și y, iar a, b, m, n sunt **coeficienţii necunoscutelor**. Numerele reale c și p se numesc **termeni liberi**.

Definiție

Prin **soluţia sistemului** (s) înțelegem orice pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ care verifică fiecare ecuație a sistemului.

5.1. Metode de rezolvare

Pentru rezolvarea unui asemenea sistem, adică pentru a afla perechile soluție, utilizăm metoda substituției sau metoda reducerii. Există și o metodă grafică, dar aceasta poate să intuiască soluțiile sau existența lor și nu să le determine propriu-zis.

5.1.1. Metoda substituției

Dacă, de exemplu, $a \neq 0$, atunci din prima ecuație deducem $x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$ și sistemul (s) devine: $\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a} \\ m\left(-\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\right) + ny = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a} \\ (an - bm)y = pa - mc \end{cases}$ (1)

- Dacă $an - bm \neq 0$, sistemul are **soluţie unică** (se mai numește **compatibil determinat**) și din (1) aflăm soluția sa: $\begin{cases} x = \dfrac{nc - pb}{an - bm} \overset{\text{not}}{=} \alpha \\ y = \dfrac{pa - mc}{an - bm} \overset{\text{not}}{=} \beta \end{cases}$.
  În acest caz, $M(\alpha, \beta)$ reprezintă punctul de intersecție a dreptelor d_1, de ecuație $ax + by = c$, și d_2, de ecuație $mx + ny = p$.
- Dacă $an - bm = 0$ și $pa - mc = 0$, sistemul are o infinitate de soluții de forma $\begin{cases} x = -\frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} \\ y = \lambda \in \end{cases}$.
  În acest caz, sistemul se numește **compatibil nedeterminat**, iar dreptele d_1 și d_2 sunt confundate (satisfac condiția $d_1 = d_2$).
- Dacă $an - bm = 0$ și $pa - mc \neq 0$, sistemul nu are soluție. În acest caz, sistemul se numește **incompatibil**, iar dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

Observație: Dacă $a = 0$, realizăm același procedeu cu unul dintre coeficienții b, c, m, n care este nenul.

5.1.2. Metoda reducerii

Înmulțind prima egalitate cu n, a doua cu $-b$, apoi prima cu $-m$ și a doua cu a, prin adunare, obținem: $\begin{cases} ax + by = c & | \cdot n \quad | \cdot (-m) \\ mx + ny = p & | \cdot (-b) \quad | \cdot a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (an - bm)x = cn - bp \\ (an - bm)y = pa - mc \end{cases}$, apoi se repetă raționamentul prezentat la metoda substituției.

Observație: La rezolvarea unui sistem se poate folosi metoda substituției combinată cu metoda reducerii.

Exerciții rezolvate

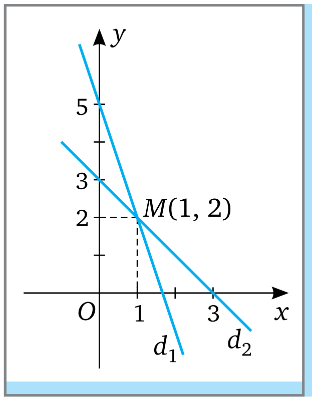
Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemele:

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$.

Rezolvare

a) Substituind y din a doua ecuație sistemul notat cu (s) devine: $\begin{cases} 3x + 3 - x = 5 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Sistemul având soluție unică, dreptele d_1, de ecuație $3x + y = 5$, și d_2, de ecuație $x + y = 3$, sunt concurente în punctul $M(1, 2)$.



b) Sistemul se mai scrie sub forma echivalentă:

$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2(3x + y) = 2 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \in \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$ și,

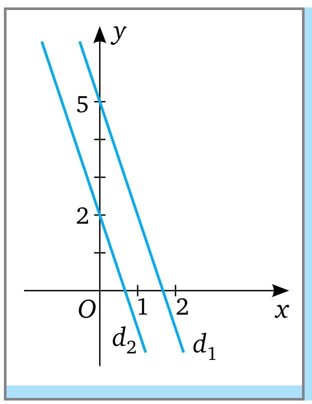
în acest caz, orice pereche de forma $(\lambda, 5 - 3\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, este soluție a sistemului. Dreptele d_1, de ecuație $3x + y = 5$, și d_2, de ecuație $6x + 2y = 10$, sunt confundate (satisfac condiția $d_1 = d_2$).

c) Sistemul se mai scrie sub forma echivalentă:

$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2(3x + y) = 2 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

Presupunând că există $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o pereche soluție, atunci scăzând cele două egalități obținem $0 = 3$. Contradicție! Deci sistemul nu are soluție.

În acest caz, dreptele d_1: $3x + y = 5$ și d_2: $3x + y = 2$ sunt paralele.



Exerciții propuse

Exerciții propuse

1. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ știind că:
a) $(3x, y + 5) = (1, 2)$; b) $(5x + 2y, 3y - x) = (3, -1)$; c) $(-3y + 8x; 0{,}5x - 5y) = (-2, 12)$.

2. Rezolvați sistemele de ecuații făcând de fiecare dată interpretarea geometrică:

a) $\begin{cases} 4x + y = 13 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -5x - 3y = -2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 9x + 7y = 13 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 8x + 3y = 5 \\ 16x + 6y = 10 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 6x - 5y = 2 \\ 12x - 10y = 3 \end{cases}$.

6. Sisteme de inecuații de gradul întâi

Dacă două sau mai multe inecuații de gradul întâi sunt legate prin conjuncția „și“ (sau operatorul logic „$\wedge$“), atunci aceste inecuații se pot scrie și rezolva ca un sistem.

Definiție

Un sistem de forma (s) $\begin{cases} ax + b \geq c & (>, \leq, <) \\ mx + n \geq p & (>, \leq, <) \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$, se numește **sistem liniar de două inecuații de gradul întâi**.

Necunoscuta sistemului este x, iar a și m sunt **coeficienții necunoscutelor**. Numerele reale b, c, n și p se numesc **termeni liberi**.

Definiție

Prin **soluția sistemului** (s) înțelegem orice pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ care verifică fiecare inecuație a sistemului.

Pentru a rezolva un asemenea sistem, adică pentru a afla perechile soluție, determinăm soluțiile (intervalele de soluție) pentru fiecare inecuație în parte, apoi le intersectăm.

Exercițiu rezolvat

Rezolvați sistemele de inecuații: a) $\begin{cases} x - 4 < 5 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 5 \geq 6 \\ 9 - x > 8 \end{cases}$.

Rezolvare

a) $\begin{cases} x < 9 \\ 2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 9) \\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 9) \cap \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

b) $\begin{cases} 3x \geq 1 \\ -x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right) \cap (-\infty, 1) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

Exerciții propuse

1. Determinați domeniul maxim de definiție al funcțiilor următoare:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{3}{4x-2} + \dfrac{5}{4x+2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-6x+9}$; d) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{25x^4-20x^3+3}$

2. Determinați funcția f știind că verifică relația:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(ax + b) = cx + d, \forall\, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x-2) = x^2 - 6x + 8, \forall\, x \in \mathbb{R}$;

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, f(x-1) = \dfrac{1}{x+1}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3x+1}{1-x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$;

e) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) = x^2 + 2x, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

3. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea
(1) $f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

4. Stabiliți ecuația dreptei $y = ax + b$, știind că trece prin punctele A și B, în cazurile:
a) $A(1, 2), B(-3, 4)$; b) $A(-2, -1), B(2, 2)$; c) $A(-3, -2), B(3, 4)$.

5. Stabiliți dacă tripletele de drepte sunt concurente:
a) $3x + y - 5 = 0$; $5x - 2y - 1 = 0$; $x + 3y - 7 = 0$;
b) $3x + 2y - 4 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $2x - y - 3 = 0$.

6. Fie dreapta d de ecuație $y = ax + b$.
Stabiliți care din tripletele de puncte de mai jos se află pe dreapta d:
a) $(1, -2), (3, 2), (2, 0)$; b) $(3, -1), (1, 1), (2, 0)$; c) $(1, 4), (3, 6), (0, 2)$.

7. Determinați mulțimea $\mathrm{Im}(f)$ în următoarele situații:

a) $f: \{-3, -2, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$.

8. Determinați imaginea fiecăreia dintre funcțiile de mai jos:
a) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n)$ este restul împărțirii lui n la 7; b) $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, g(n) = (-1)^n$;
c) $h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $h(n)$ este ultima cifră a lui 9^n.

9. a) Există o funcție $f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin relația $f_1(x) = x - 5$?

b) Există o funcție $f_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definită prin relația $f_2(x) = \dfrac{4x}{3}$?

c) Există o funcție $f_3: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin relația $f_3(x) = \dfrac{5}{\dfrac{2}{x} - 2}$?

d) Există o funcție $f_4: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definită prin relația $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$?

10. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin relația

$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Z} \\ 2, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ 3, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și numerele $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Calculați $f(a + b)$, $f(a - b)$, $f(ab)$. Aflați valorile lui x pentru care $f(ax) \neq 3$ și $f(x) \neq 3$.

11. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

Determinați mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

12. Există o funcție al cărei grafic conține punctele $A(1, 3)$, $B(-2, -1)$, $C(1, 4)$? De ce?

13. a) Reprezentați grafic funcția $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 2n, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$.

b) Care este imaginea lui f?

14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|x - 1| + |x + 2| + |y + 3| = 3$.

15. Rezolvați ecuația $|x - a| + |x - 2| = 4$, $a \in \mathbb{R}$; discuție după a.

16. Determinați funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al cărei grafic taie axa Ox în punctul de abscisă 2 și axa Oy în punctul de ordonată 2. Reprezentați graficul funcției.

17. Determinați funcția de gradul întâi al cărei grafic conține punctele distincte $A(a, a + 1)$, $B(b, b + 1)$.

18. Reprezentați grafic funcțiile de mai jos și precizați imaginea fiecăreia dintre ele:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -3, & x < 0 \end{cases}$; b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ 1, & x \in (-2, 2) \\ -2+1, & x \leq -2 \end{cases}$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x, & |x| \geq 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$.

19. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date de relațiile $f(x) = 2(x + a)$, $g(x) = ax + 7$. Aflați valoarea lui a cunoscând că graficele celor două funcții au un punct comun de abscisă 3. Reprezentați grafic funcțiile obținute.

20. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date de relațiile $f(x) = (a - 1)x + 2$, $g(x) = 3x + a$. Determinați valoarea lui a și reprezentați grafic funcțiile cunoscând că graficele lor sunt două drepte paralele.

21. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demonstrați că pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ are loc relația $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

22. Considerăm familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m + 1)x - 2m + 1$.

a) Pentru ce valoare a lui m funcția este constantă?

b) Reprezentați în același sistem ortogonal graficele funcțiilor f_{-1}, f_0, f_1.

c) Demonstrați că graficele tuturor funcțiilor f_m trec printr-un punct fix.

23. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 3 \\ 4 - 2x, & x < 3 \end{cases}$.

Determinați mulțimile $A = \{x \mid |f(x| \leq 10\}$, $B = \{x \mid f(x) = f(3)\}$, $C = \{x \mid f(x) = -\pi\}$.

Exerciții propuse

24. Studiați monotonia funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$; b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 5 - 2x$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ x+1, & x \leq -1 \end{cases}$; d) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, l(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 3 \\ -7, & x > 3 \end{cases}$.

25. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx - 12$. Aflați valoarea lui m cunoscând că funcția este strict crescătoare și că graficul său conține punctul $A(m, m)$.

26. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1-m}{2+m}x + 1, m \neq -2$.

a) Aflați valorile lui m pentru care funcția este strict descrescătoare.

b) Determinați mulțimea $A = \{m \in \mathbb{Z} / f(m) \in \mathbb{Z}\}$.

27. Dați exemplu de funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 0)$ și $[0, \infty)$, care să nu fie monotonă pe $\mathbb{R}$.

28. Câte funcții strict monotone se pot construi pe mulțimea $\{1, 2, 3\}$ cu valori în mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$?

29. Care dintre următoarele mulțimi sunt simetrice (față de origine):
$A = (-3; 3]$; $B = [-3; 3)$; $C = [-3; 3]$; $D = (-3, 3) \setminus \{0\}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$;
$H = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; $K = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 10\}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

30. Studiați dacă funcțiile de mai jos sunt pare sau impare:
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$; $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$;
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = x^4$; $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = x^2 + x$;
$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$; $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_7(x) = x|x|$; $f_8(x) = |x - 1|$.

31. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ este impară.

32. Determinați imaginea fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$; b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 5$;

c) $h : (0, 3) \to \mathbb{R}, h(x) = x - 1)$; d) $l : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, l(x) = 2x$.

33. Rezolvați inecuațiile:

a) $5(2 - x) \leq 7x - 12$; b) $(x - 1)(1 - 3x) < 0$; c) $(x - 2)(4 - 3x) > 0$;

d) $(4x - 1)(x- 2)(x + 1) \geq 0$; e) $\frac{x}{x-2} \geq 3$; f) $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$; g) $\frac{x-1}{4} \leq \frac{x+3}{2}$;

h) $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$; i) $\frac{(x+2)(4-x)}{(x+3)(2-x)} \geq 0$; j) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 4$.

34. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4y=10 \\ 2x+4y=9 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 4 \\ 2x - \sqrt{3}y = \sqrt{3} \end{cases}$.

35. Pentru ce valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} ax - 8y = 6 \\ 2x - ay = -3 \end{cases}$

a) are o infinitate de soluții; b) are o singură soluție; c) nu are soluții?

36. Rezolvați (discuție după parametrul real a) următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x+3y=7 \\ ax+6y=13 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ ax - ay = -3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$.

Exerciții propuse

Exerciții propuse

37. Rezolvați sistemele de mai jos, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a:

a) $\begin{cases} 3[x]+5[y]=2 \\ 2[x]-3[y]=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2[x]+y=8,4 \\ x+3[y]=9,9 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2[y]=7,7 \\ 2[x]+y=8,1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+[y]=13,9 \\ [x]+2y=24,3 \end{cases}$.

38. Rezolvați sistemele de inecuații cu o necunoscută:

a) $\begin{cases} 5x+3\geq 0 \\ -2x+7>0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 9x+5>0 \\ -7x+15>0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-1<0 \\ 3x+4\geq 0 \\ \dfrac{4x-5}{6x-7}\leq 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2x+1}>0 \\ \dfrac{-x+4}{3x-2}\leq 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \dfrac{(2x-1)(7x-5)}{(x-1)(x-2)}>0 \\ (8x+3)(4x-7)(-x+9)\leq 0 \end{cases}$.

Test de evaluare

1. Reprezentați grafic funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date prin legea de corespondență:

0,5p a) $f(x) = 2x - 3$;

0,5p b) $f(x) = -3x + 5$.

2. Se consideră funcția de gradul întâi, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = mx + m - 1$, unde $m\in\mathbb{R}^*$.

1p a) Pentru $m = 2$, să se reprezinte grafic funcția și studiați monotonia și semnul acesteia.

1p b) Pentru $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, calculați raportul $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ și precizați monotonia funcției în funcție de parametrul $m\in\mathbb{R}^*$.

0,5p c) Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcției să intersecteze axa Ox într-un punct de abscisă pozitivă.

0,5p d) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să intersecteze axa Oy într-un punct de ordonată negativă.

1p e) Pentru $m = -3$, rezolvați inecuația $f(x - 1) + f(x + 1) \leq 0$.

3. Fie dreptele d_1: $mx + 3y = 8$ și d_2: $3x - 4y = -5$.

1p a) Arătați că pentru $m = 2$ dreptele d_1, d_2 sunt concurente și precizați punctul de intersecție.

1p b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele să fie paralele.

1p c) Determinați funcția de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care trece prin originea sistemului de axe și punctul de concurență al dreptelor d_1, d_2 de la a).

1p **4.** Rezolvați sistemul de inecuații $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x}{3}\leq 1 \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{1-3x}{2}\leq 2 \end{cases}$.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 5

Funcția de gradul al doilea

Formulele ce reprezintă legăturile dintre aria cercului și raza sa, distanța parcursă de un corp în cădere liberă și timpul necesar parcurgerii, energia cinetică și viteză, cantitatea de căldură degajată de un curent electric și intensitatea lui etc., pot fi reprezentate, în general, prin formula $y = ax^2$.

1. Definiția funcției de gradul al doilea

Definiție

Fiind date numerele reale a, b, c cu $a \neq 0$, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin formula $f(x) = ax^2 + bx + c$, se numește **funcție de gradul al doilea** cu coeficienții a, b, c.

Exemple:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ are coeficienții $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 5x^2 - 1$ are coeficienții $a = 5$, $b = 0$, $c = -1$;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -2x^2 + 4x$ are coeficienții $a = -2$, $b = 4$, $c = 0$.

Observații:

1. Funcția de gradul al doilea este o funcție numerică (reală) deoarece atât domeniul de definiție cât și codomeniul este mulțimea numerelor reale.
2. În definiția funcției de gradul al doilea condiția $a \neq 0$ este esențială, deoarece dacă $a = 0$ obținem o funcție de gradul întâi. Dacă și $b = 0$, obținem o funcție constantă.

Forma canonică a funcției de gradul al doilea

În studiul funcției de gradul al doilea este util să cunoaștem *forma canonică* a funcției de gradul al doilea.

Fie funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Avem:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Forma canonică a funcției de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, este:

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}}$$

Exercițiu rezolvat

Aduceți la forma canonică funcțiile:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 5$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = 3x^2 + 5$;
c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = 2x^2 - 4x$.

Rezolvare

a) Avem $a = 1, b = -4, c = 5$, deci $\Delta = 16 - 20 = -4$. Prin urmare, forma canonică a funcției f este $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
b) Întrucât $a = 3, b = 0, c = 5$, rezultă că forma canonică a funcției g este: $g(x) = 3x^2 + 5$.
c) Forma canonică a lui h este: $h(x) = 2[(x-1)^2 - 1] = 2(x-1)^2 - 2$.

2. Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul al doilea

Graficul funcției de gradul al doilea este mulțimea:

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = ax^2 + bx + c\}.$$

Pentru a reprezenta geometric graficul funcției de gradul al doilea folosim metoda prin „puncte remarcabile“ ale graficului, care constă în a reprezenta în plan câteva dintre punctele importante ale graficului care vor fi unite printr-o curbă continuă. Pentru a simplifica limbajul vom numi ***reprezentarea geometrică a graficului funcției f*** tot ***graficul funcției f***.

Graficul funcției de gradul al doilea se numește **parabolă**.

Punctele remarcabile ale graficului funcției de gradul al doilea sunt: **punctul de extrem** al graficului și **punctele în care graficul taie axele** de coordonate.

Pentru trasarea graficului funcției de gradul al doilea vom parcurge următoarele etape:

1. *Determinarea intersecției parabolei cu axele de coordonate*
   - **Intersecția graficului cu axa *Oy***: luăm $x = 0$ și obținem $y = f(0) = c$. Deci punctul $B(0, c)$ reprezintă intersecția graficului cu axa Oy.
   - **Intersecția graficului cu axa *Ox***: luăm $y = 0$ și rezolvăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Avem trei cazuri:
     1. dacă $\Delta > 0$, ecuația (1) admite două rădăcini reale și distincte $x_1 < x_2$, iar punctele $A_1(x_1, 0)$ și $A_2(x_2, 0)$ sunt punctele de intersecție a graficului cu axa Ox;
     2. dacă $\Delta = 0$, ecuația (1) are două rădăcini reale și egale $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, iar punctul $A\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ este punctul în care graficul taie axa Ox;
     3. dacă $\Delta < 0$, ecuația (1) nu are rădăcini reale, adică graficul nu intersectează axa Ox.
2. *Determinarea punctului de extrem*
   Calculăm $x_V = -\frac{b}{2a}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ și astfel obținem punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ care se numește **vârful parabolei**.
3. *Determinarea altor valori importante*
   Dacă parabola nu taie axa Ox se aleg două valori la dreapta lui x_V și alte două valori la stânga lui x_V care să fie simetrice față de dreapta $x = -\frac{b}{2a}$.

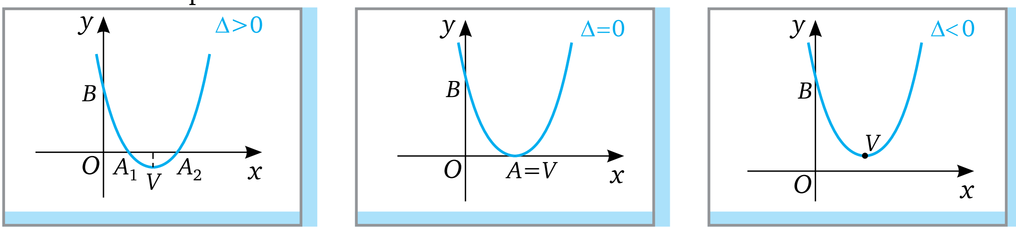
4. *Trasarea tabelului de variație*

Alcătuim tabelul de variație a funcției f, în care vom trece valorile importante ale lui x și pe cele corespunzătoare ale lui $y = f(x)$.

■ Dacă $a > 0$, tabelul de variație arată astfel (luăm $b > 0$; cazul $b \leq 0$ se tratează analog):

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	0	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{\Delta}{4a}$	c	0	$+\infty$

Graficele posibile sunt:

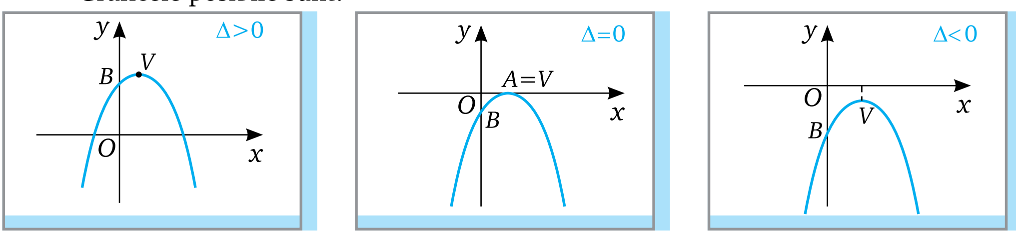


În acest caz și spunem că graficul este convex, iar funcția este **convexă**.

■ Dacă $a < 0$, tabelul de variație arată astfel (luăm $b < 0$; cazul $b \geq 0$ se tratează analog):

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	0	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{\Delta}{4a}$	c	0	$-\infty$

Graficele posibile sunt:



În acest caz, graficul este concav, iar funcția este **concavă**.

Parabolele construite au ca axă de simetrie o dreaptă care are direcția axei Oy. Să determinăm ecuația acestei axe de simetrie.

Definiție

O dreaptă de ecuație $x = m$ este **axă de simetrie a graficului unei funcții** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă și numai dacă are loc relația:

$$\boxed{f(m - x) = f(m + x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

În particular, pentru $m = 0$ obținem că axa de simetrie este axa Oy, care are ecuația $x = 0$. În acest caz, $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, adică funcția este pară.

Rețineți! Graficul funcției de gradul al doilea are ca **axă de simetrie** dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$.

Demonstrație

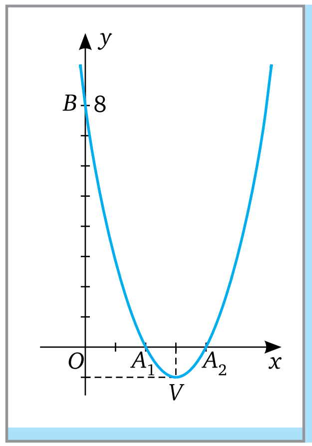
Utilizând forma canonică a funcției de gradul al doilea, $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, obținem că $f\left(-\frac{b}{2a}-x\right) = f\left(-\frac{b}{2a}+x\right) = ax^2 - \frac{\Delta}{4a}$, deci $x = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie a graficului funcției f. Punctul de pe axa de simetrie a parabolei are abscisa $x = -\frac{b}{2a}$ și ordonata $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$. Acesta este vârful parabolei $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exerciții rezolvate

Reprezentați grafic funcțiile:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 8$;   b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = x^2 - 4x + 4$;
c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = -x^2 + 4x - 5$.

Rezolvare

a) Avem $a = 1 > 0$ și $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$.
Coordonatele vârfului sunt
$x_V = -\frac{b}{2a} = 3$ și $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4} = -1$, deci vârful este punctul $V(3, -1)$.

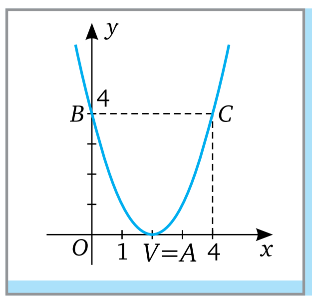


Intersecția cu axa Ox: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$, deci $G_f \cap Ox = \{A_1(2, 0), A_2(4, 0)\}$,
Intersecția cu axa Oy: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 8$,
prin urmare $G_f \cap Oy = \{B(0, 8)\}$.
Tabelul de variație este:

x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	8	0	-1	0	$+\infty$

Graficul arată ca în figura alăturată.

b) Avem $a = 1 > 0$ și $\Delta = 16 - 16 = 0$. Coordonatele vârfului sunt
$x_V = -\frac{b}{2a} = 2$ și $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0$, deci vârful parabolei este punctul $V(2, 0)$.
Intersecția cu axa Ox: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$,
deci $G_f \cap Ox = \{A(2, 0)\}$, care coincide cu vârful parabolei.
Intersecția cu axa Oy: $x = 0 \Rightarrow y = g(0) = 4$, deci $G_f \cap Oy = \{B(0, 4)\}$. Simetricul lui $x = 0$ față de $x_V = 2$ este $x = 4$ și avem $g(4) = 4$, deci punctul $C(4, 4)$ aparține graficului.



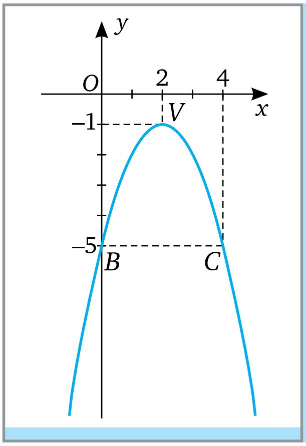
Tabelul de variație este:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	4	0	4	$+\infty$

Graficul arată ca în figura alăturată.

c) Avem $a = -1 < 0$ și $\Delta = 16 - 20 = -4$. Coordonatele vârfului sunt $x_V = -\frac{b}{2a} = 2$ și $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -1$, deci vârful parabolei este punctul $V(2, -1)$.
Intersecția cu axa Ox: $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 5 = 0$, care nu are rădăcini reale.
Intersecția cu axa Oy: $x = 0 \Rightarrow y = h(0) = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow G_f \cap Oy = \{B(0, -5)\}$.
Simetricul lui $x = 0$ față de $x_V = 2$ este $x = 4$ și avem $h(4) = h(0) = -5$, deci punctul $C(4, -5)$ aparține graficului. Tabelul de variație este:

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	-5	-2	-1	-2	-5	$+\infty$



3. Relațiile lui Viète

Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ în care $a \neq 0$ și $\Delta \geq 0$. Rezultă că ecuația are soluții reale și ele sunt $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Vrem să calculăm suma și produsul rădăcinilor.

Avem: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$;

$$P = x_1x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Relațiile

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ și } P = x_1x_2 = \frac{c}{a}}$$

se numesc **relațiile lui Viète** și exprimă suma și produsul soluțiilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ în funcție de coeficienții acesteia.

Exemplu:

Fie ecuația $7x^2 - 5x - 4 = 0$. Avem $S = \frac{5}{7}$, $P = -\frac{4}{7}$.

Invers, dacă se cunosc suma S și produsul P putem scrie ecuația corespunzătoare acestora:
$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0.$

Exemplu:

Scrieți ecuația care are soluțiile $x_1 = \frac{3}{4}$ și $x_2 = \frac{1}{4}$.

Avem $S = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ și $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

Ecuația este $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$ sau $16x^2 - 16x + 3 = 0$.

Exercițiu rezolvat

Fie ecuația $5x^2 + mx + 2 = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Scrieți ecuația de gradul al doilea în necunoscuta y care are soluțiile $y_2 = 2 - x_1$ și $y_2 = 2 - x_2$.

Rezolvare

Din ecuația în x avem $S_x = x_1 + x_2 = -\frac{m}{5}$ și $P_x = x_1x_2 = \frac{2}{5}$.

Calculăm $S_y = y_1 + y_2 = 4 - (x_1 + x_2) = 4 + \frac{m}{5}$ și

$$P_y = (2 - x_1)(2 - x_2) = 4 - 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 4 + \frac{2m}{5} + \frac{2}{5} = \frac{22 + 2m}{5}.$$

Ecuația în y este $y^2 - S_y y + P_y = 0 \Leftrightarrow y^2 - \frac{20 + m}{5}y + \frac{22 + 2m}{5} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5y^2 - (20 + m)y + 22 + 2m = 0.$

4. Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}, s, p \in \mathbb{R}$

Un sistem de forma (1) $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$, unde $s, p \in \mathbb{R}$, iar x, y sunt necunoscutele se numește **sistem simetric** de două ecuații cu două necunoscute. Aceasta înseamnă că dacă înlocuim în ecuațiile sistemului pe x cu y și pe y cu x, ecuațiile sistemului nu se modifică.

Prin urmare, dacă sistemul admite soluția $x = \alpha, y = \beta$, admite și soluția $x = \beta, y = \alpha$.

Soluțiile sistemului (1) sunt soluțiile ecuației de gradul doi $t^2 - st + p = 0$ (2).

Fie $\Delta = s^2 - 4p$ discriminantul ecuației (2).

Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația (2) are soluțiile reale t_1 și t_2, $t_1 \neq t_2$, și avem că soluțiile sistemului (1) sunt $\begin{cases} x_1 = t_1 \\ y_1 = t_2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_2 = t_2 \\ y_2 = t_1 \end{cases}$.

Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (2) are soluțiile reale $t_1 = t_2$ și avem că soluțiile sistemului (1) sunt $x = y = t_1 = t_2$.

Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația (2) nu are rădăcini reale și sistemul (1) nu are soluții.

Exemplu:

Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

Rezolvare

Avem $s = 5$ și $p = 6$, deci ecuația în t asociată este $t^2 - 5t + 6 = 0$, care rezolvată conduce la $t_1 = 2$ și $t_2 = 3$. Soluțiile sistemului sunt (2, 3) și (3, 2).

Exerciții propuse

1. Scrieți forma canonică a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin:
a) $f(x) = 5x^2 - 3x - 4$; b) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$; c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

2. Determinați intersecțiile graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu axele de coordonate pentru:
a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$; b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;
c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$; d) $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$.

3. Determinați ecuația dreptei care este axă de simetrie pentru graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = -3x^2 + 7x - 1$; b) $f(x) = x^2 - 7$; c) $f(x) = 11x^2 - \sqrt{2}\,x + 4$.

4. Scrieți relațiile lui Viète pentru ecuațiile:
a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $\sqrt{3}\,x^2 - 3 = 0$; c) $12x^2 - 24x + 36 = 0$.

5. Scrieți ecuațiile care au soluțiile:
a) $x_1 = 2$ și $x_2 = 7$; b) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ și $x_2 = 2 + \sqrt{3}$;
c) $x_1 = a$ și $x_2 = -2a$; d) $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$; e) $x_1 = 13$ și $x_2 = 2$.

6. Fie ecuația $3x^2 + 8x + 3 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2. Scrieți ecuația de gradul al doilea în y care să aibă soluțiile $y_1 = x_1 - 3$ și $y_2 = x_2 - 3$.

7. Rezolvați sistemele:
a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -25 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{3} \\ xy = 9 \end{cases}$.

Exerciții propuse

Test de evaluare

1. Se consideră funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.
0,5p a) Determinați intersecția graficului funcției cu axele de coordonate.
0,5p b) Calculați coordonatele vârfului parabolei.
0,5p c) Reprezentați geometric graficul funcției f.
0,5p d) Scrieți ecuația axei de simetrie.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m - 3)x + m + 3$, $m \in \mathbb{R}^*$.
1p a) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze axa Ox.
1p b) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât axa de simetrie a parabolei să fie în dreapta axei Oy.
1p c) Determinați o relație independentă de m între soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $f(x) = 0$.

1p **3.** Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuațiile $(m - n)x^2 + (m + n - 1)x + 4 = 0$ și $(m + n)x^2 + (2m + 3n - 3)x + 8 = 0$ să aibă aceleași soluții.

4. Rezolvați sistemele simetrice:
1p a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$; 1p b) $\begin{cases} 2xy + 3(x + y) = 45 \\ 3xy + 4(x + y) = 64 \end{cases}$; 1p c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 6

Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al doilea

1. Monotonia funcției de gradul al doilea

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. *Rata creșterii* funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a \neq 0$, este dată de: $R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{ax_1^2 + bx_1 + c - ax_2^2 - bx_2 - c}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b$.

Teoremă

Funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este monotonă pe fiecare dintre intervalele $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$, adică:

a) dacă $a > 0$, funcția f este **descrescătoare** pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ și **crescătoare** pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$;

b) dacă $a < 0$, funcția este **crescătoare** pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ și **descrescătoare** pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Demonstrație

a) Presupunem $a > 0$. Dacă $x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$, $x_1 \neq x_2$, rezultă $x_1 \leq -\dfrac{b}{2a}$, $x_2 \leq -\dfrac{b}{2a}$, deci $x_1 + x_2 \leq -\dfrac{b}{a}$; cum $a > 0$, de aici rezultă că $a(x_1 + x_2) + b \leq 0$, adică $R(x_1, x_2) \leq 0$. Rezultă că f este descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$.

Dacă $x_1, x_2 \in \left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$, $x_1 \neq x_2$, rezultă $x_1 \geq -\dfrac{b}{2a}$, $x_2 \geq -\dfrac{b}{2a}$, deci $x_1 + x_2 \geq -\dfrac{b}{a}$; cum $a > 0$ de aici rezultă că $a(x_1 + x_2) + b \geq 0$, adică $R(x_1, x_2) \geq 0$. Rezultă că f este crescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

b) Dacă $a < 0$, se procedează analog.

Observație:

Concluziile de mai sus le putem obține și pe altă cale, folosind forma canonică a funcției de gradul al doilea: $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

Considerând funcția de gradul al doilea sub forma canonică, putem calcula ușor valoarea funcției în punctul $x = -\frac{b}{2a}$.

Avem $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$. Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este vârful parabolei și este unul dintre punctele remarcabile ale graficului.

Teoremă

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Dacă $a > 0$, minimul valorilor funcției f este valoarea $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$;

b) Dacă $a < 0$, maximul valorilor funcției f este valoarea $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Demonstrație

a) Presupunem $a > 0$ și fie x arbitrar. Dacă $x \leq -\frac{b}{2a}$, rezultă $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, deoarece funcția f este descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Dacă $x \geq -\frac{b}{2a}$, atunci $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, deoarece funcția f este crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Prin urmare, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, ceea ce înseamnă că $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ este minimul valorilor funcției.

b) Cazul în care $a < 0$ se tratează la fel.

Observații:

1. Teorema precedentă ne conduce la următoarele denumiri:

a) În cazul când $a > 0$, abscisa $x = -\frac{b}{2a}$ se numește **punctul de minim al funcției *f***, iar ordonata $y - \frac{\Delta}{4a}$ se numește **minimul funcției**.

Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ se numește **punctul de minim al graficului**.

b) În cazul când $a < 0$, abscisa $x = -\frac{b}{2a}$ se numește **punctul de maxim al funcției *f***, iar ordonata $y = -\frac{\Delta}{4a}$ se numește **maximul funcției**.

Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ se numește **punctul de maxim al graficului**.

2. Cu alte cuvinte, abscisa $x = -\frac{b}{2a}$ este punctul de extrem al funcției, ordonata $y = -\frac{\Delta}{4a}$ este extremul funcției, iar punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ se numește **punctul de extrem** al graficului sau *vârful graficului*.

3. Afirmațiile de mai sus se pot transpune în tabele:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow\nearrow +\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow\searrow -\infty$

2. Semnul funcției de gradul al doilea

A **studia semnul funcției** de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, înseamnă a determina valorile lui x pentru care $f(x)$ este pozitiv și valorile lui x pentru care $f(x)$ este negativ. Un rol important în studiul semnului funcției de gradul al doilea îl are discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vom utiliza forma canonică a funcției: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$; avem $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Avem următoarele cazuri:

1. Cazul $\Delta < 0$. Distingem două subcazuri:

a) Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ și $\frac{-\Delta}{4a} > 0$, deci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0$.
Așadar, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) > 0$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ și $\frac{-\Delta}{4a} < 0$, deci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < 0$;
prin urmare, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) < 0$.

În concluzie, putem spune că:
Dacă $\Delta < 0$, atunci $f(x)$ are același semn ca al lui a, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
Acest rezultat poate fi trecut într-un tabel ca cel de alături:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	

2. Cazul $\Delta = 0$. Avem $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Distingem două subcazuri:

a) Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, deci $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, deci $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

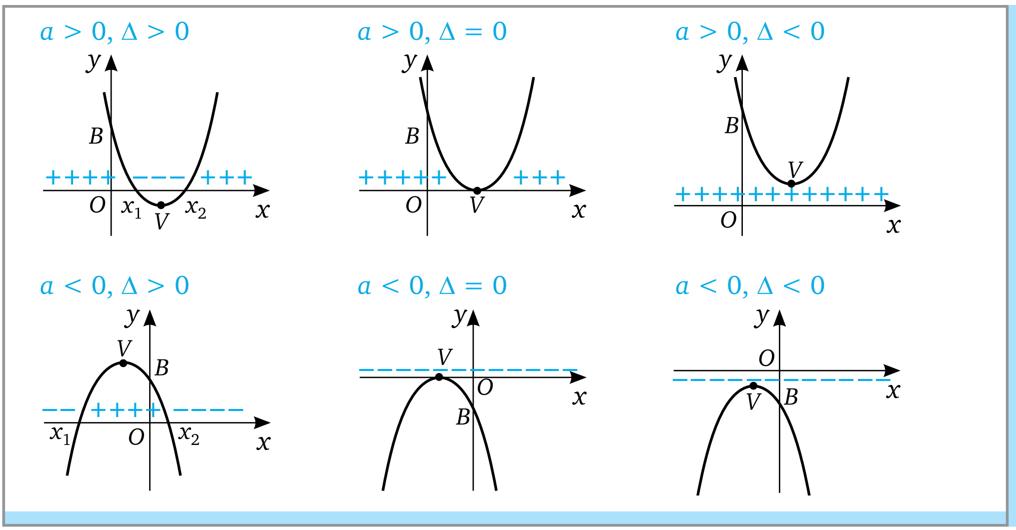
Prin urmare:
Dacă $\Delta = 0$, atunci $f(x)$ are același semn cu al lui a, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, cu excepția lui $x = -\frac{b}{2a}$, unde f ia valoarea zero. Trecem acest rezultat în tabelul următor:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	0	semnul lui a	

3. **Cazul $\Delta > 0$.** În acest caz, ecuația atașată $ax^2 + bx + c = 0$ are două rădăcini distincte x_1 și x_2 și putem scrie $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Ținând seama de regula semnului la înmulțire, rezultă că $(x - x_1)(x - x_2)$ are semnul „+“ pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, respectiv semnul „–“ pe (x_1, x_2). Așadar, f are semnul lui a pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, și semnul contrar lui a pe (x_1, x_2).
Acest lucru se reprezintă în tabelul următor:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Interpretarea geometrică (grafică) a semnului funcției de gradul al doilea este dată în figurile de mai jos:



Exemple:

1. Studiați semnul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x + 10$.
Cum $\Delta = 36 - 40 = -4 \leq 0$, suntem în primul caz.
Avem $a = 1 > 0$ și tabelul semnului funcției este următorul:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = x^2 + 6x + 10$	+ + + + + + + + + + +

2. Fie funcția $f(x) = -x^2 - 6x - 9$. Cum $\Delta = 36 - 36 = 0$ și $a = -1$, tabelul cu semnul funcției f este următorul:

x	$-\infty$		-3		∞
$f(x) = -x^2 - 6x - 9$		– – – – – – – –	0	– – – – – – – – –	

3. Fie funcția $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Deoarece $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$, rezultă că ecuația $x^2 - 5x + 4 = 0$ are două rădăcini reale și distincte $x_1 = 1$ și $x_2 = 4$.
Tabelul semnului funcției este următorul:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 5x + 4$		+ + + +	0	– – – –	0	+ + + +	

3. Inecuații de gradul al doilea

Inecuațiile de forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ unde a, b, c sunt numere reale date ($a \neq 0$) se numesc **inecuații de gradul al doilea**.

3.1. Exemple de rezolvare

Rezolvarea acestor inecuații presupune studierea semnului funcției de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exerciții rezolvate

1. Rezolvați inecuația $x^2 - 4x + 3 > 0$.

Rezolvare

Considerăm ecuația asociată $x^2 - 4x + 3 = 0$. Se vede că $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$.
Soluțiile ecuației asociate sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$.
Tabelul semnului funcției $f(x) = x^2 - 4x + 3$ este următorul:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+ + +	0	– – –	0	+ + +	

Din acest tabel rezultă că mulțimea soluțiilor inecuației date este $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

2. Rezolvați inecuația $2x^2 + 3x \leq -1$.

Rezolvare

Această inecuație este echivalentă cu inecuația $2x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
Considerăm ecuația asociată $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Se observă că $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$.

Soluțiile ecuației asociate sunt $x_1 = -1$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$.
Tabelul semnului funcției $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ este următorul:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+ + +	0	– – –	0	+++	

Mulțimea soluțiilor inecuației date este $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

3. Rezolvați inecuația $(x - 1)^2 > 4x - 8$.

Rezolvare

Această inecuație este echivalentă cu inecuația $x^2 - 2x + 1 > 4x - 8$, care, la rândul său, este echivalentă cu inecuația $x^2 - 6x + 9 > 0$.

Avem $\Delta = 36 - 36 = 0$. Soluțiile ecuației $x^2 - 6x + 9 = 0$ sunt $x_1 = x_2 = 3$.

Tabelul semnului funcției $f(x) = x^2 - 6x + 9$ este

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		+ + +	0	+ + +	

Din acest tabel rezultă că mulțimea soluțiilor inecuației date este $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

3.2. Alte tipuri de inecuații de gradul al doilea

Există cazuri când inecuațiile se prezintă sub formă de produs de raport. Mulțimea soluțiilor inecuației într-un asemenea caz este dată de semnul produsului sau raportului respectiv.

3.2.1 Semnul unui produs

Semnul unui produs este del dat de regula semnelor de la înmulțire, prezentată shematic astfel:

$(+) \cdot (+) = (+)$ $\quad$ $(+) \cdot (-) = (-)$

$(-) \cdot (-) = (+)$ $\quad$ $(-) \cdot (+) = (-)$

Exercițiu rezolvat

Rezolvați inecuația $(x^2 + x - 12)(x^2 - 2x - 3) < 0$

Rezolvare

Aflăm rădăcinile ecuației asociate:

$(x^2 + x - 12)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 12 = 0$ sau $x^2 - 2x - 3 = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 = -4, x_2 = 3$ sau $x_1 = -1, x_2 = 3)$.

Alcătuim tabelul de semne:

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
$x^2 + x - 12$		+ + +	0	– – – – –		– – –	0	+ + + +	
$x^2 - 2x - 3$		+ + + +	+ + +	+	0	– – – –	0	+ + +	
$(x^2 + x - 12)(x^2 - 2x - 3)$		+ + +	0	– – –	0	+ + +	0	+ + +	

Soluția inecuației este $x \in (-4, -1)$.

3.2.2 Semnul unui raport

Pentru a exista un raport se pune condiția ca numitorul să fie nenul. Semnul unui raport este cel dat de regula semnelor de la împărțire, prezentată schematic astfel:

$\frac{(+)}{(+)} = (+)$ $\quad$ $\frac{(+)}{(-)} = (-)$

$\frac{(-)}{(-)} = (+)$ $\quad$ $\frac{(-)}{(+)} = (-)$

Exercițiu rezolvat

Rezolvați inecuația $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x-4} \geq 0$

Rezolvare

Condițiile de existență: $x^2 - 3x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-1; 4\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$. Aflăm rădăcinile ecuației asociate: $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x-4} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ și $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Alcătuim tabelul de semne:

x	$-\infty$ -1 $-\frac{1}{2}$ 2 4 $+\infty$
$2x^2-3x-2$	+ + +++++ + + 0 − − − 0 + + + + + + +
x^2-3x-4	+ + + 0 − − − − − − − − − − − − − 0 + + +
$\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x-4}$	+ + + | − − − − 0 + + + 0 − − − − | + + +

Soluția inecuației este $x \in (-\infty; -1) \cup \left[-\dfrac{1}{2};\ 2\right] \cup (4; +\infty)$.

3.3. Imagini și preimagini ale unor intervale

Fie o funcție de forma $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

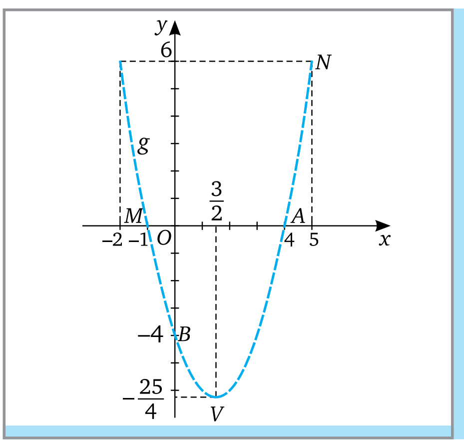
În anumite situații este nevoie de a trasa graficul unei restricții a funcției de gradul al doilea pe o submulțime A a lui $\mathbb{R}$. Pentru a trasa graficul unei restricții procedăm astfel: întâi reprezentăm graficul funcției extinse pe $\mathbb{R}$, apoi întărim porțiunea din grafic corespunzătoare domeniului de definiție A.

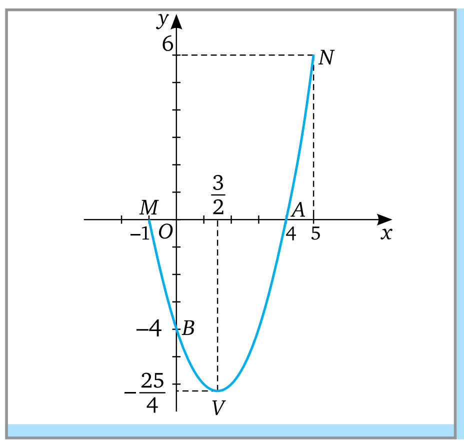
Exerciții rezolvate

1. Reprezentați grafic funcția $f : [-1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Rezolvare

Reprezentăm grafic mai întâi extensia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x - 4$, al cărui grafic este trasat punctat. Trasăm continuu porțiunea din grafic cuprinsă între punctele $M(-1; f(-1))$ și $N(5; f(5))$, adică $M(-1; 0)$ și $N(5; 6)$. Citim: $\text{Im}f = [0; 6]$.





2. Trasați graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |-x^2 - x + 2|$.

Rezolvare

Avem $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \\ -x^2 - x + 2, & x \in [-2, 1] \end{cases}$.

Explicitarea modulului s-a făcut folosind semnul expresiei $-x^2 - x + 2$.

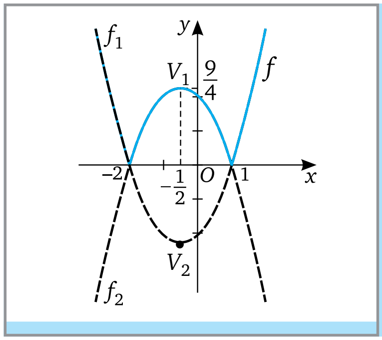
Graficul funcției f va fi reuniunea restricțiilor funcțiilor $f_1 : (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 + x - 2$, și $f_2 : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -x^2 - x + 2$.

Pentru f_1, $x_V = -\frac{1}{2} \notin (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; $f_1(-3) = 4$, $f_1(2) = 4$.

Pentru f_2, $x_V = -\frac{1}{2} \in [-2, 1]$, $f_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Vom reprezenta valorile lui $f_1(x)$ și $f_2(x)$ în același tabel și graficele funcțiilor f_1 și f_2 în același sistem de coordonate.

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$f(x)$		4	10	$\frac{9}{4}$	0	4	



Imaginea funcției f este $\text{Im} f = [0, +\infty)$?

4. Sisteme de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y' \end{cases}$ $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$

4.1. Metoda de rezolvare

Sistemele formate dintr-o ecuație de gradul întâi cu două necunoscute și o ecuație de gradul al doilea cu două necunoscute sunt sistemele de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$ (1), unde $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Rezolvarea acestui tip de sisteme se face prin **metoda substituției**.

Se înlocuiește $y = mx + n$ din prima ecuație în a doua ecuație a sistemului și se obține ecuația de gradul al doilea $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ (2).

Fie $\Delta = (b - m)^2 - 4a(c - n)$ descriminantul ecuației (2).

- Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația (2) are două rădăcini reale și distincte x_1 și x_2. Înlocuind pe x din prima ecuație a sistemului, pe rând, cu x_1 și x_2 obținem $y_1 = mx_1 + n$ și $y_2 = mx_2 + n$ și sistemul (1) are două soluții (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (2) are două rădăcini reale confundate $x_1 = x_2 = x_0$, de unde $y_1 = y_2 = y_0$ și, în acest caz, sistemul (1) admite două soluții care se confundă.
- Dacă $\Delta < 0$, ecuația (2) nu are rădăcini reale, deci sistemul (1) nu are soluții în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.2. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă

Fie dreapta d, de ecuație $mx + n = y$ și parabola P de ecuație $ax^2 + x + c = y$.

Pentru a vedea pozițiile dreptei d față de parabola P trebuie să vedem soluțiile sistemului format de ecuațiile lor: $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$, cu $m, n, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Reciproc, soluțiile sistemului ne dau coordonatele punctelor în care dreapta intersectează parabola.

Avem următoarele echivalențe:

- Sistemul are două soluții distincte, dacă și numai dacă **dreapta intersectează parabola în două puncte** distincte.
- Sistemul are o singură soluție, dacă și numai dacă **dreapta este tangentă parabolei**.
- Sistemul nu are nici o soluție, dacă și numai dacă **dreapta nu intersectează parabola**.

4.3. Interpretarea geometrică

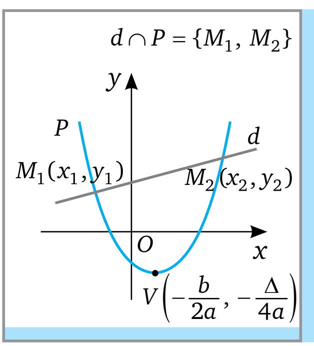
Fie sistemul (s) $\begin{cases} mx + n + p = 0 \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$, cu $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$, format din ecuația unei drepte d și a unei parabole P. Avem d: $mx + ny + p = 0$ și P: $ax^2 + bx + c = y$.

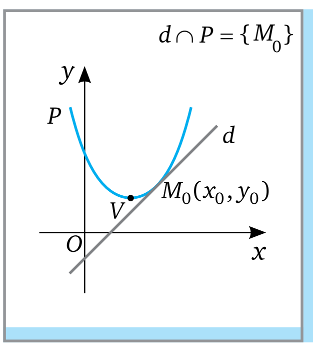
Dacă $n \neq 0$, atunci: $(s) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{n} \\ ax^2 + \left(b + \dfrac{m}{n}\right)x + c + \dfrac{p}{n} = 0 \end{cases}$.

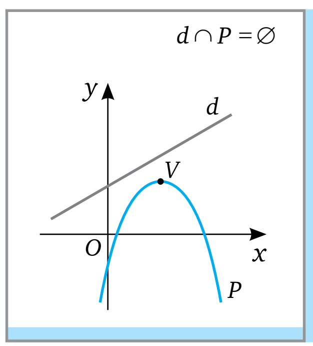
Dacă a doua ecuație are două soluții reale și distincte x_1 și x_2, atunci (s) are două soluții (x_1, y_1), (x_2, y_2) și, în acest caz, dreapta d intersectează parabola P în două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_1, y_2)$.

Dacă a doua ecuație are două rădăcini reale egale, atunci sistemul (s) are soluție unică (x_0, y_0) și în acest caz spunem că dreapta d este tangentă la parabola P în punctul $M(x_0, y_0)$.

Dacă a doua ecuație nu are rădăcini reale, atunci $d \cap P = \varnothing$.

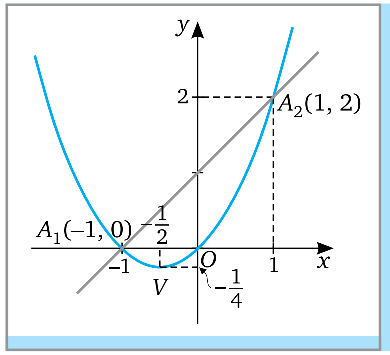






Exercițiu rezolvat

Rezolvați sistemul: (s) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y = x^2 + x \end{cases}$.



Rezolvare

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = x^2 + x \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

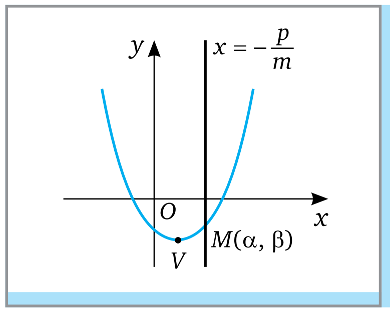
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \{(1, 2); (-1, 0)\}$.

Rezultă că dreapta d, de ecuație $y = x + 1$, intersectează parabola P, de ecuație $y = x^2 + x$, în punctele $A_1(-1, 0)$ și $A_2(1, 2)$.

■ Dacă $n = 0$ cum $m^2 + n^2 > 0$ rezultă $m \neq 0$ și sistemul (s) se scrie sub formă echivalentă:

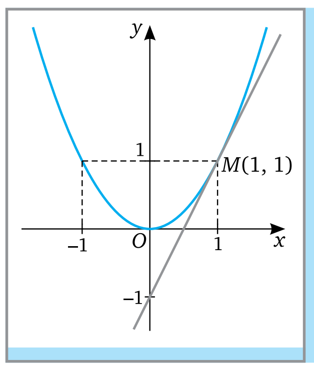
$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{p}{m} \\ y = x\left(-\dfrac{p}{m}\right)^2 + b\left(-\dfrac{p}{m}\right) + c \end{cases} \overset{\text{not}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}.$$



În acest caz, dreapta d, de ecuație $x = -\dfrac{p}{m}$, este verticală și intersectează parabola P, de ecuație $y = ax^2 + bx + c$, într-un singur punct $M(\alpha, \beta)$, unde (α, β) reprezintă unica soluție a sistemului (s).

Exerciții rezolvate

1. Rezolvați sistemul: (s) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$.



Rezolvare

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Interpretare geometrică: dreapta d, de ecuație $y = 2x - 1$, este tangentă la parabola P, de ecuație $y = x^2$, în punctul $M(1, 1)$.

2. Rezolvați sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$.

Rezolvare

Din ecuația $2x - y = 4$ obținem $y = 2x - 4$. Înlocuind pe y în a doua ecuație obținem $2x - 4 = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Această ecuație are rădăcinile $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$. Atunci avem $y_1 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ și $y_2 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

Sistemul dat are soluțiile: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$.

Interpretare geometrică: dreapta d, de ecuație $y = 2x - 4$, intersectează parabola P, de ecuație $y = x^2 - 3x + 2$, în punctele $A(2, 0)$ și $B(3, 2)$.

4.4. Sisteme reductibile la cele studiate

Am văzut că dacă un sistem are proprietatea că oricum am schimba necunoscutele între ele sistemul rămâne neschimbat, el este un *sistem simetric*.

Un exemplu de sistem simetric de două ecuații cu două necunoscute este sistemul:
$\begin{cases} mx + my + nxy = q \\ ax^2 + bxy + ay^2 + cx + cy = d \end{cases}$ (1), unde $m, n, q, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dacă notăm $x + y = s$ și $xy = p$, atunci sistemul (1) devine $\begin{cases} ms + np = q \\ a(s^2 - 2p) + bp + cs = d \end{cases}$.

Dacă $n \neq 0$ și $2a - b \neq 0$, sistemul anterior se scrie: $\begin{cases} p = -\dfrac{m}{n}s + \dfrac{q}{n} \\ p = \dfrac{a}{2a-b}s^2 + \dfrac{c}{2a-b}s - \dfrac{d}{2a-b} \end{cases}$ (2).

Sistemul (2) este de aceeași formă cu cel studiat anterior. Un astfel de sistem am văzut că admite, în general, două soluții (s_1, p_1) și (s_2, p_2).

Rezolvând sistemele simetrice (3) $\begin{cases} x + y = s_1 \\ xy = p_1 \end{cases}$ și (4) $\begin{cases} x + y = s_2 \\ xy = p_2 \end{cases}$ și reunind mulțimile de soluții din $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ale sistemelor (3) și (4) obținem mulțimea soluțiilor sistemului (1) din $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercițiu rezolvat

Rezolvați sistemul: $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ xy - 2(x^2 + y^2) = -20 \end{cases}$.

Rezolvare

Sistemul este simetric.

Facem substituțiile $x + y = s$ și $xy = p$ și obținem sistemul $\begin{cases} s + p = 11 \\ -2s^2 + 5p = -20 \end{cases}$.

Înlocuind pe $p = 11 - s$ în ecuația a doua, obținem ecuația $2s^2 + 5s - 75 = 0$, care are soluțiile: $s_1 = 5$, $s_2 = -\dfrac{15}{2}$. Atunci $p_1 = 11 - s_1 = 6$ și $p_2 = 11 - s_2 = \dfrac{37}{2}$.

Așadar, rezolvarea sistemului se reduce la rezolvarea sistemelor: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ și $\begin{cases} x + y = -\dfrac{15}{2} \\ xy = \dfrac{37}{2} \end{cases}$. Rezolvând sistemul $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$, obținem soluțiile (2, 3) și (3, 2).

Rezolvând sistemul $\begin{cases} x + y = -\dfrac{15}{2} \\ xy = \dfrac{37}{2} \end{cases}$, obținem ecuația corespunzătoare în t:
$4t^2 + 15t + 37 = 0$ care nu are rădăcini reale.

Deci, sistemul inițial are soluțiile (2, 3) și (3, 2) $\Rightarrow S = \{(2, 3); (3, 2)\}$.

5. Sisteme de forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$

5.1. Metoda de rezolvare

Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ se face egalând membrii stângi ai ecuațiilor și rezolvând ecuația $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Pentru valorile lui x obținute se determină valorile corespunzătoare ale lui y.

Exercițiu rezolvat

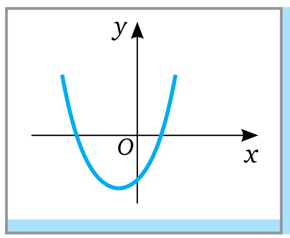
Rezolvați sistemul $\begin{cases} x^2 - 3x + 5 = y \\ 2x^2 + x - 7 = y \end{cases}$.

Rezolvare

Rezolvăm ecuația $x^2 - 3x + 5 = 2x^2 + x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -6$.
Pentru $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 \Rightarrow y_1 = 3$, iar pentru $x_2 = -6 \Rightarrow y_2 = 59$.
Soluția sistemului este $S = \{(2, 3); (-6, 59)\}$.

5.2. Interpretarea geometrică

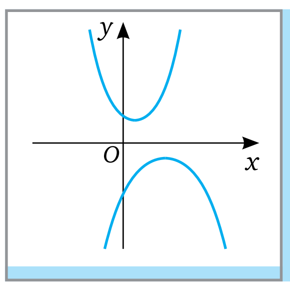
Soluția sistemului $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ este punctul sau punctele de intersecție dintre parabolele corespunzătoare funcțiilor de gradul al doilea asociate celor două ecuații.



Ecuației $a_1x^2 + b_1x + c_1 = y$ i se poate atașa funcția $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, iar ecuației $a_2x^2 + b_2x + c_2 = y$ funcția $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

Parabolele corespunzătoare celor două funcții, reprezentate în același plan, pot avea sau nu puncte comune, după cum ecuația $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2(a_1 - a_2) + x(b_1 - b_2) + (c_1 - c_2) = 0$ are sau nu soluții.

Au loc următoarele situații:



1. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ și atunci $x \in \mathbb{R}$, iar sistemul are o infinitate de soluții $S = \{(x, a_1x^2 + b_1x + c_1) \mid x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ *parabolele sunt confundate*.

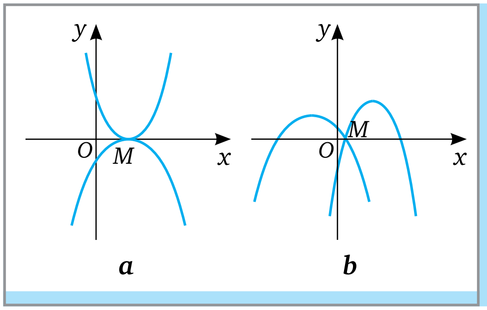
2. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 \neq c_2$ și obținem propoziția falsă $c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow$ *parabolele nu au puncte comune*, iar soluția sistemului este $S = \varnothing$.

3. $a_1 = a_2, b_1 \neq b_2 \Rightarrow x = \dfrac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *parabolele au un punct comun*

$$M\left(\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2},\ a_1\left(\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2}\right)^2 + b_1\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2} + c_1\right)$$

și ele pot avea poziția din figura ***a***, atunci când a_1 și a_2 au semne contrare (adică $a_1a_2 < 0$), sau poziția din figura ***b***, atunci când a_1 și a_2 au același semn.



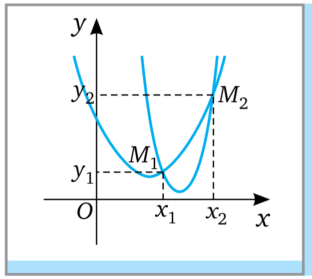
Soluția sistemului este: $S = \left\{\left(\dfrac{c_2-c_1}{b_1-b_2},\ a_1\left(\dfrac{c_2-c_1}{b_1-b_2}\right)^2 + b_1\dfrac{c_2-c_1}{b_1-b_2} + c_1\right)\right\}$

4. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow x^2(a_1 - a_2) + x(b_1 - b_2) + c_1 - c_2 = 0.$

i) dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluție, parabolele nu au puncte comune, iar sistemul nu are soluție, $S = \varnothing$;

ii) dacă $\Delta = 0$, ecuația are o singură soluție x_0, parabolele au un punct comun $M(x_0, y_0)$, iar sistemul are tot o singură soluție, $S = \{(x_0, y_0)\}$;

iii) dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții distincte x_1 și x_2, parabolele au două puncte distincte comune $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, iar sistemul are două soluții distincte, $S = \{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$(vezi figura alăturată).



Exerciții rezolvate

1. Rezolvați sistemul $\begin{cases} 5x^2 - 3x - 2 = y \\ 2x^2 - 7x + 37 = y \end{cases}$.

Rezolvare

Scriem ecuația $5x^2 - 3x - 2 = 2x^2 - 7x + 37 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 39 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -\dfrac{13}{3}$.

Din $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 34$, iar din $x_2 = -\dfrac{13}{3} \Rightarrow y_2 = \dfrac{944}{9}$.

Soluția sistemului este $S = \left\{(3,34); \left(-\dfrac{13}{3}, \dfrac{944}{9}\right)\right\}$.

2. Determinați valorile parametrului real m pentru care următorul sistem are o singură soluție $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 10 = y \\ x^2 - (m-2)x + 1 = y \end{cases}$.

Rezolvare

Scriem ecuația $2x^2 - 5x + 10 = x^2 - (m - 2)x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (7 - m)x + 9 = 0$.
Pentru ca această ecuație să aibă o singură soluție trebuie ca $\Delta = 0 \Leftrightarrow (7 - m)^2 - 36 = 0$; obținem $m_1 = 1$ și $m_2 = 13$.

Exerciții propuse

1. Determinați funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, dacă:
a) $f(-1) = 1, f(1) = 3, f(2) = 7$; b) $f(-1) = 4, f(0) = -3, f(1) = 0$;
c) $f(-2) = -11; f(1) = -2, f(3) = -16$.

2. Determinați funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcții să treacă prin punctele $A(1, -6)$, $B(-1, -8)$ și să taie axa Oy în punctul $C(0, -8)$.

3. Determinați funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcții să aibă vârful în punctul $V(1, 2)$ și să taie axa Oy în punctul $B(0, -1)$.

4. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - 2(m - 1)x + m - 2$, unde m este parametru real. Arătați că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

5. Determinați funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, știind că admite un minim egal cu 4 și graficul său trece prin punctele $A(-1, 13)$ și $B(2, 4)$.

6. Aduceți la forma canonică funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$; b) $f(x) = -3x^{2} - 4x + 5$.

7. Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic trece prin punctele $A(3, 1)$ și $B(4, 4)$ și are ca axă de simetrie dreapta $x = 2$.

8. Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic trece prin punctele $A(0, 1)$ și $B(2, 1)$ și este tangent dreptei $y = -1$.

9. Aflați valorile lui a și b pentru care parabolele de ecuații $y = x^2 - 2x + a$ și $y = 2x^2 - bx + 3$ au vârful comun.

10. Stabiliți maximul sau minimul următoarelor funcții:
a) $f(x) = x^2 - 4x + 6$; b) $f(x) = -x^2 + 6x - 18$; c) $f(x) = x^2 - 9$;
d) $f(x) = -8x^2 + 21x - 1$; e) $f(x) = -x^2 - 4x + 4$.

11. Stabiliți intervalele de monotonie pentru următoarele funcții de gradul al doilea:
a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$; c) $f(x) = -x^2 - 4$;
d) $f(x) = x^2 + 4$; e) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

12. Fie funcția $f(x) = (-1)^n(x^2 - ax + 2)$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $a \in \mathbb{R}$. Aflați valorile lui n și a în fiecare dintre cazurile de mai jos:
a) funcția este strict crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și strict descrescătoare pe $[-1, +\infty)$;
b) funcția este strict descrescătoare pe $(-\infty, 3]$ și strict crescătoare pe $[3, +\infty)$;
c) funcția are valoarea maximă -1;
d) funcția are valoarea minimă 1;
e) funcția își atinge valoarea maximă pentru $x = 3$;
f) funcția își atinge valoarea minimă pentru $x = 0$.

13. Considerăm familia de parabole $y = mx^2 - mx + 1$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
a) Pentru ce valori ale lui m parabolele corespunzătoare nu intersectează axa Ox?
b) Pentru ce valori ale lui m parabolele corespunzătoare sunt tangente axei Ox?
c) Demonstrați că parabolele din familie trec prin două puncte fixe.

14. Considerăm familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 - 2mx + m$.
a) Aflați valorile lui m pentru care graficul funcției f_m nu intersectează axa Ox.
b) Aflați valorile lui m pentru care graficul funcției f_m este tangent dreptei $y = -2$.
c) Demonstrați că graficele tuturor funcțiilor din familie trec printr-un punct fix.
d) Aflați locul geometric al vârfurilor parabolelor asociate.

15. Considerăm familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m(m-3)$.
a) Pentru ce valori ale lui m avem $f_m(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$?
b) Pentru ce valori ale lui m avem $f_m(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0)$?
c) Aflați locul geometric al vârfurilor parabolelor asociate.

16. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.
a) Care este valoarea maximă și valoarea minimă a funcției f?
b) Studiați monotonia funcției f.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Demonstrați că:
a) dacă $a > 0, f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$;
b) dacă $a < 0, f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$;

18. Fie $m \in \mathbb{R}^*$ și familia de funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx^2 - (3m - 2)x + 2m - 1$.
a) Arătați că graficele familiei de funcții trec prin două puncte fixe.
b) Determinați valorile lui m pentru care fiecare din graficele funcțiilor corespunzătoare taie axa Ox în două puncte având distanța dintre ele egală cu $\sqrt{6}$.

19. Demonstrați că există o singură funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, astfel încât a, Δ, P, S să fie numere întregi consecutive în această ordine.

20. Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = x^2 + 2(m-1)x + 8(m^2 - 1)$, $m \in \mathbb{R}$.
a) Demonstrați că dacă $|7m + 1| \leq 8$, atunci graficele funcțiilor f_m intersectează axa Ox în cel puțin un punct.
b) Pentru ce valori ale lui m vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se află sub dreapta de ecuație $y - 1 = 0$?
c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât suma pătratelor rădăcinilor ecuației $f_m(x) = 0$ să fie maximă.

21. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + a|x| + a^2 - 1$. Aflați valorile reale ale lui a pentru care $f(x) > 0, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

22. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + (a + 1)x + 1$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.
a) Aflați valorile lui a pentru care $f(x) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.
b) Aflați valorile lui a pentru care $f(x) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in (-\infty, -2]$.

23. Rezolvați inecuațiile:

a) $x^2 - 13x + 30 > 0$; b) $x^2 - 20x + 99 \leq 0$; c) $\dfrac{x^2 - 3x + 3}{4x - x^2} \leq 0$;

d) $\dfrac{x-1}{x+1} \leq \dfrac{x+1}{x-1}$; e) $\dfrac{x^2}{1-2x} \geq -1$; f) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$;

g) $x^2 + x + 1 \geq \dfrac{3x^2}{x^2 - x + 1}$; h) $x^2 + x + 1 \leq \dfrac{3x^2}{x^2 - x + 1}$.

24. Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 73 \\ 2x - 7y + 1 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + xy - y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x - y = \dfrac{1}{6} \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x^2 + 6xy - 9y^2 = x + 2y \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x^2 - xy + 3y^2 + x + y = 7 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$.

25. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 2xy \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2xy + 5(x + y) = 55 \\ 6xy + 3(x + y) = 81 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + xy + 2y = 2 \\ 3x - 2xy + 3y = 17 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + y + 2xy = -11 \\ 2x^2y + 2xy^2 = -12 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$; i) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$; j) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 56 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$; k) $\begin{cases} xy^2 + x^2y = 6 \\ x^2y^5 + x^5y^2 = 36 \end{cases}$.

26. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 1 = y \\ (x-2)^2 - 7 = y \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x^2 + 3x - 5 = y \\ 2x^2 - 6x + 1 = y \end{cases}$; c) $\begin{cases} (x-1)^2 = 3x^2 + y \\ 5x^2 - 3 = 2(3x + y) - y \end{cases}$.

27. Determinați parametrul real m pentru care următorul sistem are două soluții

$\begin{cases} x^2 - 3x + 5 = y \\ (m-2)x^2 + 5x - 10 = y \end{cases}$.

28. Știind că $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ este o soluție a sistemului $\begin{cases} x^2 - (m+5)x - 4 = y \\ (2x-5)^2 + 3x - 11 = y \end{cases}$, determinați parametrul real m și celelalte soluții ale sistemului, dacă acestea există.

Exerciții propuse

Test de evaluare

Se consideră funcțiile $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m - 2$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

0,5p **1.** a) Studiați monotonia funcției f_m. Discuție după $m \in \mathbb{R}^*$.
0,5p b) Studiați natura punctului de extrem al parabolelor asociate funcțiilor f_m.

1p **2.** Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m să fie situate deasupra axei Ox.

1p **3.** Determinați m astfel încât axa de simetrie a parabolei să coincidă cu axa Oy.

1p **4.** Precizați mulțimea valorilor funcției f_m; discuție după $m \in \mathbb{R}^*$.

1p **5.** Rezolvați inecuația $f_m(x) \leq 0$ în cazul $m > 0$.

1p **6.** Arătați că vârfurile parabolelor asociate funcțiilor f_m se găsesc pe o dreaptă.

1p **7.** Arătați că toate parabolele asociate funcțiilor f_m trec printr-un punct fix.

1p **8.** Discutați poziția relativă a dreptelor $d_m: y = -2(m-1)x$ față de parabolele asociate funcțiilor f_m.

1p **9.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} f_1(x) = y \\ f_{-1}(x) = y \end{cases}$ și interpretați geometric rezultatul obținut.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 7

Vectori în plan

Introducere

Noțiunea de vector se formează printr-un proces psihic natural legat de fenomene ale realității în care intervin așa-numitele „mărimi vectoriale“: ne deplasăm – în ce direcție? în ce sens? cât de departe?

Sau: o greutate este legată cu o frânghie; tragem de ea – în ce direcție? în ce sens? cât de tare? Chiar în opera lui Aristotel se vorbește de paralelogramul forțelor.

Noțiunea de vector este o noțiune clasică și, în același timp, modernă. Există probleme de geometrie la care metoda vectorială este mai directă sau mai elocventă și de preferat în raport cu metoda clasică sintetică. Dar nu trebuie abuzat nici de metoda vectorială, nici de metoda analitică sau sintetică.

1. Vectori

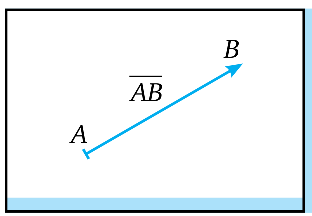
1.1. Segment orientat, relația de echipolență, vectori, vectori coliniari

Fie A și B două puncte din plan. Segmentul $[AB]$ este bine determinat de extremitățile sale A și B.

Definiții

- O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numește **segment orientat** sau **vector legat** în punctul A și se notează cu $\overline{AB}$.
- Punctul A se numește **originea** lui $\overline{AB}$, iar punctul B se numește **extremitatea** lui $\overline{AB}$.

Dacă $A \neq B$, atunci segmentul orientat $\overline{AB}$ se reprezintă grafic prin săgeata care unește pe A cu B (vezi figura alăturată).



Dacă $A = B$, atunci segmentul orientat **nul** $\overline{AA}$ se reprezintă grafic prin punctul A.

Segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ se numesc **egale** dacă A coincide cu C și B coincide cu D.

Segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ se numesc **opuse** dacă A coincide cu D și B coincide cu C.

Dreapta determinată de segmentul orientat $\overline{AB}$ se numește **dreapta suport** a lui $\overline{AB}$ și se notează cu (AB). Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$. Orice dreaptă care trece prin A este dreaptă suport pentru segmentul orientat nul $\overline{AA}$.

Două segmente orientate se numesc **coliniare** dacă dreptele lor suport coincid.

Două segmente orientate se numesc **paralele** dacă dreptele lor suport sunt paralele.

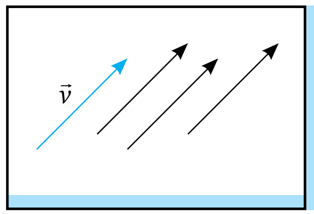
1.2. Direcție

Două drepte d_1 și d_2 din plan se numesc **paralele** sau **egale** dacă sunt disjuncte ($d_1 \cap d_2 = \emptyset$) sau coincid ($d_1 = d_2$).

Teoremă

Pe mulțimea dreptelor din plan relația „paralele sau egale“ este **reflexivă**, **simetrică** și **tranzitivă**, adică este o **relație de echivalență**.

Această relație determină o împărțire a dreptelor din plan în submulțimi disjuncte, oricare două diferite (clase de echivalență), numite **direcții**. Prin urmare, o **direcție** este o familie de drepte paralele, fiecare dreaptă din această familie este un **reprezentant** al direcției din care face parte.



Concluzionăm că „direcția unei drepte“ reprezintă „familia de drepte paralele cu o dreaptă dată“ sau „clasa de echivalență determinată de dreapta dată în raport cu relația „paralele sau egale“.

Definiție

Două segmente orientate au **aceeași direcție** dacă ambele sunt nenule și dreptele lor suport aparțin aceleiași direcții sau ambele sunt nule.

Teoremă

Relația **aceeași direcție** pentru segmente orientate este o **relație de echivalență** pe mulțimea segmentelor orientate, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Reținem:

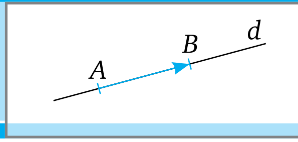
- Două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă și numai dacă sunt paralele sau coliniare.

1.3. Sens

Pe o dreaptă din plan se pot stabili exact două sensuri de parcurs.

Definiție

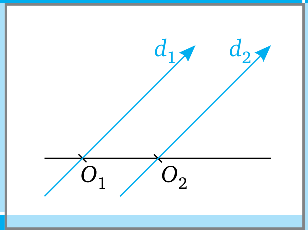
O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește **dreaptă orientată**.



Definiție

Două segmente orientate nenule coliniare au **același sens** dacă sensurile de parcurs determinate pe dreapta suport comună coincid.

Două segmente orientate, nenule și paralele au același sens dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care unește originile segmentelor.



Teoremă

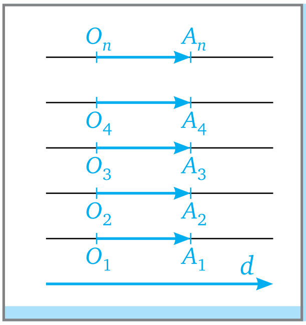
Relația **același sens** pentru segmente orientate nenule de aceeași direcție este o **relație de echivalență** pe mulțimea segmentelor orientate, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Clasele de echivalență relative de relația „același sens" se numesc **sensuri**. Există două astfel de clase: **sensul inițial** al segmentului orientat nenul dat și **sensul opus**.

Convenim că sensul unui segment orientat nul este **nedeterminat**.

Familia de drepte paralele cu o dreaptă dată este direcția dreptei.

O direcție pentru care s-a fixat același sens de parcurs pe toate dreptele familiei se numește **direcție orientată**.



1.4. Lungime

Definiții

Fie $\overline{AB}$ un segment orientat. Prin **lungimea** lui $\overline{AB}$ se înțelege distanța dintre punctele A și B.

Lungimea lui $\overline{AB}$ se mai numește **norma** sau **modulul** lui $\overline{AB}$. Se notează $d(A, B)$, $\|\overline{AB}\|$, $|\overline{AB}|$ sau AB.

Un segment orientat nul are lungimea zero. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc **segmente congruente**.

Definiție

Două segmente orientate au **aceeași lungime** dacă segmentele neorientate corespunzătoare sunt congruente.

Teoremă

Relația **aceeași lungime** pentru segmente orientate este o **relație de echivalență** pe mulțimea segmentelor orientate, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

1.5. Segmente echipolente. Vectori

Relațiile „aceeași direcție“, „același sens“ și „aceeași lungime“ pentru segmente orientate din plan realizează o nouă relație pentru segmente orientate, care stă la baza noțiunii de **vector liber**.

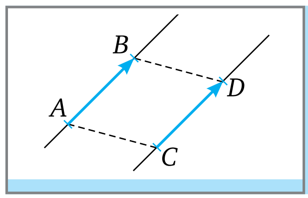
Definiție

Două segmente orientate nenule se numesc **echipolente** dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Prin convenție, toate segmentele orientate **nule** sunt echipolente între ele.

Dacă $\overline{AB}$ este echipolent cu $\overline{CD}$ se scrie $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

$\overline{AB} \sim \overline{CD}$ dacă și numai dacă segmentele $[AD]$ și $[BC]$ au același mijloc.



Teoremă

Relația de echipolență pentru segmente orientate nenule este o **relație de echivalență** pe mulțimea segmentelor orientate, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiție

Clasele de echivalență ale segmentelor orientate, relative la relația de echipolență, se numesc **vectori**.

Un vector este o submulțime a mulțimii tuturor segmentelor orientate, care conține toate segmentele echipolente cu un segment dat.

Fiecare segment orientat din clasa numită **vector** este un reprezentant al clasei.

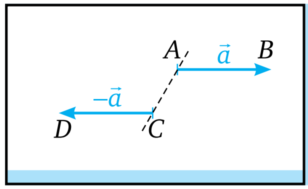
Notăm AB vectorul asociat segmentului orientat $\overline{AB}$.

Vectorii AB și CD sunt **egali** dacă segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ sunt *echipolente*.

Definiții

- Un vector de lungime egală cu unitatea se numește **versor** sau **vector unitate**.
- Vectorii care au aceeași direcție se numesc **vectori coliniari**.
- Vectorul zero (vectorul nul) este coliniar cu oricare alt vector.
- Doi vectori coliniari care au aceeași lungime și sensuri opuse se numesc **vectori opuși**.

Dacă unul dintre ei este notat cu $\vec{a}$, atunci opusul său este notat cu $-\vec{a}$.



Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt **egali** și se scrie $\vec{a} = \vec{b}$, dacă reprezentanții lor au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime, adică sunt *echipolenți*.

Notăm planul cu $\mathcal{P}$ și mulțimea vectorilor din plan cu $\mathcal{V}$. În planul $\mathcal{P}$ fixăm un punct O pe care îl vom numi **origine**. Oricărui alt punct $M \in \mathcal{P}$ îi corespunde exact un vector $\overline{OM} \in \mathcal{V}$ al cărui reprezentat este segmentul orientat $\overline{OM}$.

Vectorul $\overline{OM}$ se numește **vectorul de poziție** al punctului M față de punctul origine O.

Teoremă

Fie O punctul origine. Funcția care asociază fiecărui punct $M \in \mathcal{P}$ vectorul său de poziție $\overrightarrow{OM} \in \mathcal{V}$ este o corespondență biunivocă între planul $\mathcal{P}$ și mulțimea vectorilor $\mathcal{V}$ (adică oricărui punct M din plan îi corespunde vectorul său de poziție $\overrightarrow{OM}$ și reciproc oricărui vector $\overrightarrow{OM}$ din plan îi corespunde un punct M din plan care este extremitatea vectorului).

Probleme propuse

1. Fie O un punct în plan și $\overline{AB}$ un segment orientat nenul.

a) Reprezentați mulțimea L a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași lungime cu $\overline{AB}$.

b) Reprezentați mulțimea D a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași direcție cu $\overline{AB}$.

c) Reprezentați mulțimea S a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au același sens cu $\overline{AB}$.

2. Fie d o dreaptă și $\overline{AB}$ un segment orientat nenul.

a) Determinați mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe d care au aceeași lungime cu $\overline{AB}$.

b) Determinați mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe d care au aceeași direcție și lungime cu $\overline{AB}$.

c) Determinați mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe d care au aceeași lungime, direcție și sens cu $\overline{AB}$.

Probleme propuse

3. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază r, iar $\overline{AB}$ un segment orientat nenul.

a) Determinați mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe $\mathcal{C}$ care au aceeași lungime cu AB.

b) Determinați mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe $\mathcal{C}$ care au aceeași direcție și lungime cu $\overline{AB}$.

c) Determinați mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe $\mathcal{C}$ care au aceeași lungime, direcție și sens cu $\overline{AB}$.

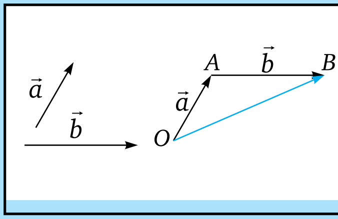
2. Operații cu vectori

2.1. Adunarea vectorilor

Definiție

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Fie $\overline{OA}$ un reprezentant al vectorului $\vec{a}$ și $\overline{AB}$ un reprezentant al vectorului $\vec{b}$.

Suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este vectorul $\vec{a}+\vec{b}$ reprezentat de segmentul orientat $\overline{OB}$ (care verifică relația $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$.



Această relație se numește **regula triunghiului** sau **relația lui Chasles**.

Teoremă

Adunarea vectorilor are următoarele proprietăți:

1. Asociativitate:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\ \forall\ \vec{a},\vec{b}\in\mathcal{V}$$

2. Existența elementului neutru (vectorul nul), $\exists\ \vec{0}\in\mathcal{V}$ astfel încât

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}\ \forall\ \vec{a}\in\mathcal{V}$$

3. Orice element din $\mathcal{V}$ admite simetric la adunare (vectorul opus)

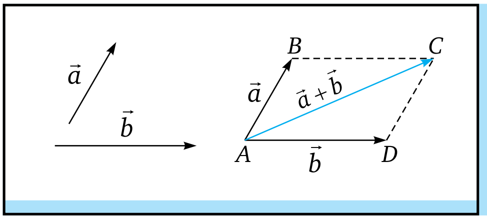
$$\exists\,(-\vec{a})\in\mathcal{V}\text{ a.î. }\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}\ \forall\ \vec{a}\in\mathcal{V}$$

4. Comutativitate:

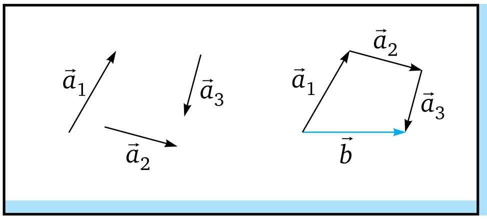
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ \forall\ \vec{a},\vec{b}\in\mathcal{V}$$

Proprietatea de comutativitate a adunării vectorilor, nenuli, necoliniari conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei, numită **regula paralelogramului**.

Se reprezintă $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{AD} \in \vec{b}$ și se determină punctul C având proprietatea că $ABCD$ este paralelogram. Segmentul orientat $\overline{AC}$ este reprezentatul vectorului sumă $\vec{a}+\vec{b}$.



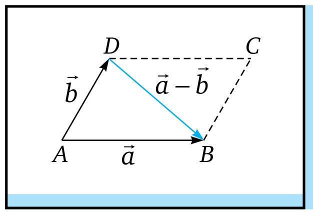
Adunarea a doi vectori poate fi extinsă. Fie vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$. Prin suma vectorilor $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ se înțelege vectorul obținut prin adunarea lui $\vec{a}_1$ cu $\vec{a}_2$, apoi rezultatul cu $\vec{a}_3$ ș.a.m.d.



Vectorul obținut se notează $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$. Regula de obținere a vectorului sumă este o extindere a regulii triunghiului și se numește **regula poligonului**.

Fie $\overline{OA_1} \in \vec{a}_1$, $\overline{A_1A_2} \in \vec{a}_2$, $\overline{A_2A_3} \in \vec{a}_3$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n} \in \vec{a}_n$. Avem $\overline{OA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{OA_n}$.

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori. Suma dintre vectorul $\vec{a}$ și opusul lui $\vec{b}$, adică $\vec{a} + (-\vec{b})$ se numește **diferența dintre vectorul** $\vec{a}$ și vectorul $\vec{b}$ și se notează $\vec{a} - \vec{b}$.



Dacă $\overline{AB}$ este reprezentantul lui $\vec{a}$, adică $\overline{AB} \in \vec{a}$ și $\overline{AD}$, este reprezentantul lui $\vec{b}$, adică $\overline{AD} \in \vec{b}$, atunci $\overline{DB}$ este reprezentantul lui $\vec{a} - \vec{b}$.

Probleme propuse

1. Fie A, B și C trei puncte din plan. Arătați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (Relația lui Chasles).

2. Fie segmentul $[AB]$ și M mijlocul său. Arătați că pentru orice punct P din plan avem: $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PB}$.

3. Fie paralelogramul $ABCD$ și P un punct din plan astfel încât $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP}$. Arătați că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$.

4. Fie triunghiul ABC și M, N mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$. Arătați că $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MN}$.

5. Fie $ABCD$ un paralelogram și $M \in AB$. Calculați:
a) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BP}$; b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CP}$; c) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AP}$.

6. Fie $ABCD$ un paralelogram de centru O. Calculați:
a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}$; d) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$;
e) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}$; f) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}$; g) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}$.

Probleme propuse

7. Fie ABC un triunghi și punctele $M, N \in [BC]$ astfel încât $BM = MN = NC$.
Arătați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

8. Fie triunghiul ABC și punctele $M, N \in [BC]$ astfel încât $BM = NC$.
Arătați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

2.2. Înmulțirea unui vector cu un număr real

Fie $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și $\mathcal{V}$ mulțimea vectorilor din plan.

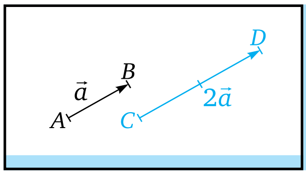
Definiție

Fie $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ și $\vec{a} \in \mathcal{V}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Prin **produsul** dintre numărul real nenul t și vectorul nenul $\vec{a}$, notat $t\vec{a}$, se înțelege vectorul care are aceeași direcție cu $\vec{a}$, același sens cu $\vec{a}$, dacă $t > 0$, și sens contrar lui $\vec{a}$, dacă $t < 0$, iar lungimea $|t| \cdot \|\vec{a}\|$.

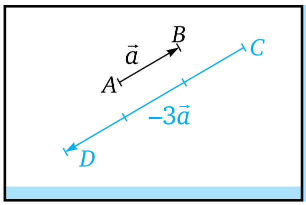
Observație: Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $t = 0$, atunci $t\vec{a} = \vec{0}$.

Exemple:

1. Fie $\overline{AB} \in \vec{a}$ și $t = 2$. Vectorul $2\vec{a}$ este vectorul care are direcția lui $\overline{AB}$, sensul lui $\overline{AB}$ și lungimea dublul lungimii lui $\overline{AB}$.
$\overline{CD} \in 2\vec{a}$.



2. Fie $\overline{AB} \in \vec{a}$ și $t = -3$. Vectorul $-3\vec{a}$ este vectorul care are direcția lui $\vec{a}$, sensul contrar lui $\vec{a}$ și lungimea $3\|\vec{a}\|$.
$\overline{CD} \in -3\vec{a}$.



Teoremă

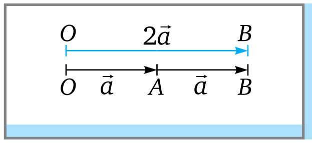
Înmulțirea vectorilor cu numere reale verifică următoarele **proprietăți**:

1. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$;

2. $(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a} \in \mathcal{V}$;

3. $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a} \in \mathcal{V}$;

4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in \mathcal{V}$.



Fie $a \in \mathcal{V}$, atunci $a + a = 2a$.

Demonstrație

Fie $\overline{OA}$ și $\overline{AB}$ doi reprezentanți ai vectorului a.

Avem $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB} \in 2a$.

Rezultatul se poate extinde.

Fie $a \in \mathcal{V}$ și $n \in \mathbb{N}^*$; atunci $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = na$.

Probleme propuse

Probleme propuse

1. Fie d o dreaptă pe care se fixează 4 puncte echidistante A, B, C, D și M mijlocul segmentului $[AD]$. Arătați că pentru orice punct P din plan, exterior dreptei d, avem: $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 4\overline{PM}$.

2. Fie triunghiul ABC și M, N mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$. Arătați că $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

3. Fie triunghiul ABC și M mijlocul laturii $[BC]$. Arătați că $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$.

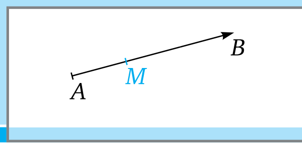
4. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$.

Arătați că $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$.

2.3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat

Definiție

Spunem că punctul M împarte segmentul orientat nenul $\overline{AB}$ în raportul k dacă $\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}$.

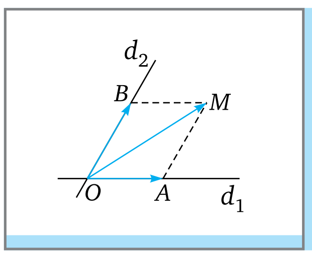


Dacă punctul M este interior segmentului $[AB]$ atunci $k < 0$, iar dacă M este exterior segmentului $[AB]$, atunci $k > 0$. Numărul real k se numește **raportul** în care punctul M împarte segmentul orientat nenul $\overline{AB}$.

2.4. Descompunerea unui vector după două direcții date

Considerăm d_1 și d_2 două drepte care se intersectează în O și v un vector nenul. Fie $\overline{OM}$ un reprezentant al lui v ($\overline{OM} \in v$). Dacă $M \notin d_1$, $M \notin d_2$ ducem prin M paralele la d_1 și d_2, obținând paralelogramul $OAMB$.

Avem $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$, adică $\overline{OM}$ se descompune după direcțiile d_1 și d_2. Dacă $M \in d_1$, atunci $\overline{OM} = \overline{OM} + 0$; analog dacă $M \in d_2$.



Teoremă

Fie $\vec{v} \in \mathcal{V}$ oarecare, iar $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori nenuli și necoliniari. Există și sunt unice numerele reale r și s astfel încât $\vec{v} = r\vec{a} + s\vec{b}$ (adică $\vec{v}$ se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$).

Definiție

Doi vectori nenuli se numesc **paraleli** dacă au ca direcții drepte paralele.

Teoremă

Fie vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ având direcții neparalele și $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{v} = z\vec{a} + t\vec{b}$ (adică vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ se scriu ca o combinație liniară a vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$). Atunci vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt paraleli dacă perechile de numere (x, y) și (z, t) sunt direct proporționale.

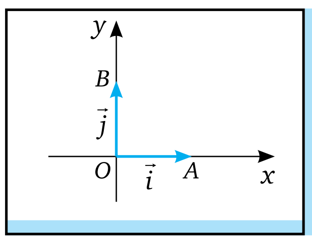
Remarcă. Dacă $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ se mai spune că vectorul $\vec{u}$ este de coordonate (x, y) în raport cu vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ nenuli și de direcții neparalele; se notează $\vec{u}\,(x, y)$ sau $\vec{u} = (x, y)$. Prin urmare

$$\boxed{\vec{u}\,(x, y) \parallel \vec{v}\,(z, t) \Leftrightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{t} \quad (z \neq 0,\ t \neq 0)}$$

Observație: Fie xOy un reper cartezian în plan și $\vec{v}$ un vector din acest plan. Atunci există un unic reprezentant $\overline{OM}$ al vectorului $\vec{v}$ cu originea în O.

Coordonatele punctului M în raport cu reperul xOy se numesc **coordonatele vectorului** $\vec{v}$.

Dacă M este de coordonate x și y, adică $M(x, y)$, atunci vectorul $\vec{v}$ este de coordonate x și y, adică $\vec{v}\,(x, y)$.



Pentru punctele $A(1, 0)$ și $B(0, 1)$ considerăm vectorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ de coordonate $(1, 0)$, respectiv $(0, 1)$.

Vectorii $\vec{i}\,(1, 0)$ și $\vec{j}\,(0, 1)$ se numesc **versorii** axelor de coordonate. Ei au direcțiile axelor și sensurile semiaxelor pozitive Ox, respectiv Oy.

Vectorul $\vec{v}\,(x, y)$ se scrie în mod unic sub forma $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Această scriere reprezintă **descompunerea vectorului** $\vec{v}$ după axele de coordonate Ox, Oy.

Orice vector $\vec{v}\,(x, y)$ se poate identifica cu perechea ordonată $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dacă $\vec{v} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ și $\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, atunci se definesc operațiile:

- suma $\vec{v} + \vec{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- diferența $\vec{v} - \vec{u} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;
- produsul cu un scalar $\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Probleme propuse

Probleme propuse

1. Fie O centrul triunghiului echilateral ABC. Arătați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AO}$.
2. Fie O centrul pătratului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO}$.
3. Fie O centrul hexagonului regulat $ABCDEF$.
   Arătați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{AO}$.
4. Fie triunghiul ABC având centrul de greutate G. Arătați că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
5. Fie triunghiul ABC și M un punct care împarte segmentul (BC) în raportul k, adică $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}$. Arătați că $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}-\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$.

Test de evaluare

1p **1.** În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, prin punctul O de intersecție a diagonalelor se duce o paralelă la baze care intersectează AD în M și BC în N.
Care dintre segmentele $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ au același sens?

1p **2.** Se dă paralelogramul $ABCD$ și P un punct arbitrar. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

3. În triunghiul ABC, fie M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Arătați că:

0,5p $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}$;

0,5p $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AC}$;

0,5p $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AP}$;

0,5p $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AP}$.

1p **4.** Vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ au modulele $AB=5$, $AC=12$ și $m(\sphericalangle BAC)=90°$.
Aflați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Arătați că:

0,5p a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$;

0,5p b) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})$.

2p **6.** Fie triunghiul ABC și D un punct pe latura $[BC]$ astfel încât $\dfrac{DB}{DC}=\lambda$.

Demonstrați că: $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}$.
Caz particular: D este piciorul bisectoarei unghiului A.

1p **7.** În hexagonul regulat $ABCDEF$ descompuneți vectorul $\overrightarrow{AD}$ după vectorii $\overrightarrow{ED}$ și $\overrightarrow{AF}$.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 8

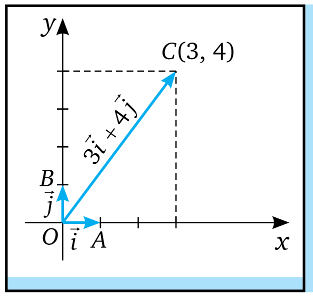
Coliniaritate, concurență, paralelism – calcul vectorial în geometria plană

1. Vectorul de poziție al unui punct

Fie planul $\mathcal{P}$ înzestrat cu reperul cartezian xOy și V mulțimea vectorilor din plan. Oricărui punct M din planul $\mathcal{P}$ îi corespunde un vector unic $\overrightarrow{OM}$ al cărui reprezentat este segmentul orientat $\overline{OM}$. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numește **vectorul de poziție** al punctului M în raport cu reperul cartezian xOy.

Exemplu:

Punctului $A(1, 0)$ îi corespunde vectorul său de poziție $\overrightarrow{OA}\,(1, 0)$ sau $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$ sau $\overrightarrow{OA} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = \vec{i}$.
Prin urmare, punctului $A(1, 0)$ îi corespunde versorul $\vec{i}$.
Analog, punctului $B(0, 1)$ îi corespunde versorul $\vec{j}$.
Punctului $C(3, 4)$ îi corespunde vectorul de poziție $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.



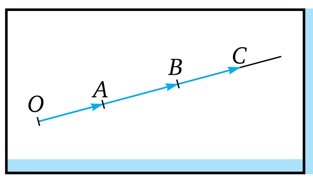
Notație. Vectorul de poziție al punctului A este $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$. Pentru a arăta că $\vec{r}_A$ este vectorul de poziție al punctului A se notează $A(\vec{r}_A)$.

Observații: **1.** $\vec{r}_0 = \vec{0}$.
2. $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, deoarece $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Probleme rezolvate

1. Demonstrați că dacă punctele A, B și C sunt coliniare există constantele reale α, β și γ de sumă nulă pentru care vectorii de poziție $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ verifică relația $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

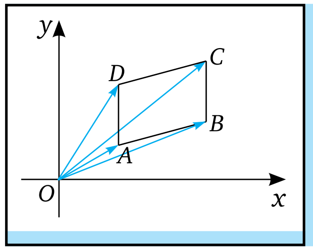
Rezolvare



Presupunem că punctele A, B, C sunt coliniare.
Avem $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$. În ΔOAC avem:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Luând $\begin{cases} \alpha = 1-k \\ \beta = k \\ \gamma = -1 \end{cases}$ rezultă $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, cu $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

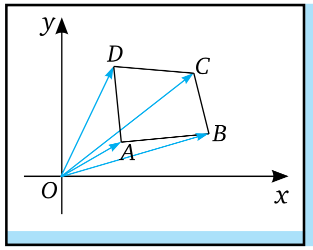
2. Demonstrați că vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$ ai vârfurilor A, B, C, D ale paralelogramului $ABCD$ verifică relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.



Rezolvare

În ΔOAB avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, iar în ΔODC, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. Cum vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$ sunt echivalenți obținem: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

3. Fie patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $k > 0$. Exprimați vectorul de poziție al vârfului D în funcție de vectorii de poziție ai vârfurilor A, B și C.

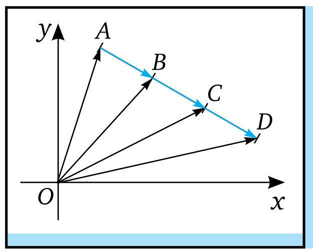


Rezolvare

Vectorii $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.
În ΔOAD: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{BC} =$
$= \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} - k\,\overrightarrow{OB} - k\,\overrightarrow{OC}$.

4. Pe segmentul de dreaptă $[AB]$ se consideră punctele C și D care împart acest segment în trei segmente congruente. Scrieți vectorii de poziție ai punctelor C și D în funcție de vectorii de poziție ai vârfurilor A și C.

Rezolvare



În ΔOAB: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

În ΔOAC: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

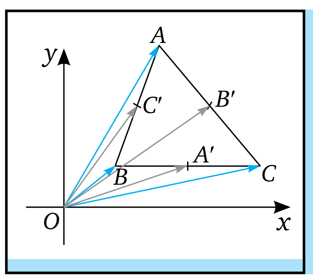
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \dfrac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$.

Analog $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$.

5. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC. Arătați că suma vectorilor de poziție ale mijloacelor A', B', C' este egală cu suma vectorilor de poziție ai vârfurilor A, B, C.

Rezolvare



În triunghiurile OAB, OBC, OCA, OC', OA', OB' sunt mediane și obținem:

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2},\ \overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2},\ \overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}.$$

Adunând cele trei egalități obținem:
$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

6. Interiorul unui paralelogram $ABCD$ determinați un punct E astfel încât $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$. Arătați că acest punct este unic.

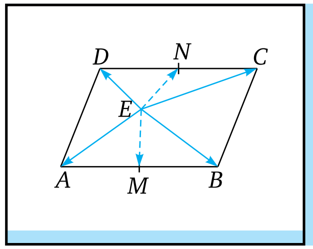
Soluție

Fie M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[CD]$.

În ΔEAB: $2\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}$, iar în ΔECD: $2\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}$.

Ținând seama de relația din enunț, obținem:

$2\overrightarrow{EM}+2\overrightarrow{EN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}=-\overrightarrow{EN}$, adică vectorii $\overrightarrow{EM}$ și $\overrightarrow{EN}$ sunt coliniari. Deducem că punctele E, M, N sunt coliniare și $EM = EN$, deci E este mijlocul segmentului $[MN]$. Reciproc, dacă E este mijlocul segmentului $[MN]$, el satisface relația din enunț.



Rezultă că E este unic cu această proprietate.

2. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat. Teorema lui Thales; condiții de paralelism

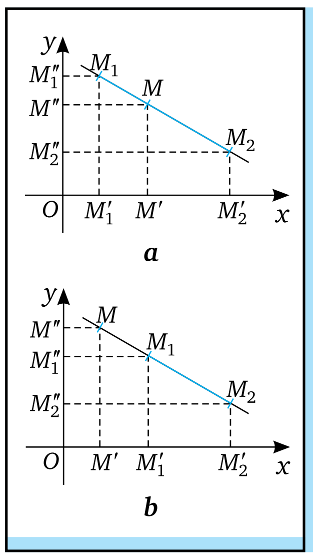
2.1. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat

Fie $[M_1M_2]$ un segment nenul în sistemul ortogonal xOy cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, și $M \in (M_1M_2)$ astfel încât $\overrightarrow{MM_1}=k\overrightarrow{MM_2}$, $M(x, y)$.

Numărul k reprezintă **raportul** în care punctul M împarte segmentul $[M_1M_2]$.

Dacă M se află în interiorul segmentului, ca în figura ***a***, atunci k este negativ.

Dacă M nu se află pe segment, ci în afara lui (ca în figura ***b***), atunci k este pozitiv. Deoarece $\overrightarrow{MM_1} \neq \overrightarrow{MM_2}$, avem $k \neq 1$. Formal raportul k se mai scrie $k=\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}$.



Detaliind egalitatea vectorială $\overrightarrow{MM_1}=k\overrightarrow{MM_2}$ obținem:

$(x_1-x)\vec{i}+(y_1-y)\vec{j}=k[(x_2-x)\vec{i}+(y_2-y)\vec{j}\,] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x=k(x_2-x) \\ y_1-y=k(y_2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x_1-kx_2}{1-k} \\ y=\dfrac{y_1-ky_2}{1-k} \end{cases}.$$

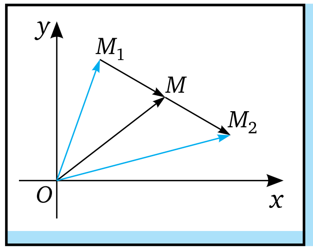
Egalitatea vectorială $\overrightarrow{MM_1}=k\overrightarrow{MM_2}$ se mai scrie:

$$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=k(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}-k\overrightarrow{OM_2}}{1-k},$$

adică vectorul de poziție al punctului M care împarte segmentul $[M_1M_2]$ în raportul k se scrie în funcție de vectorii de poziție $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ ai extremităților M_1 și M_2 ale segmentului $[M_1M_2]$ și raportul k.

Caz particular. Vectorul de poziție al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$

Fie M mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$.



Avem $\overrightarrow{MM_1} = -\overrightarrow{MM_2}$, deci $k = -1$. Obținem

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} - k\overrightarrow{OM_2}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}{1-(-1)} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}{2}.$$

Deducem că vectorul de poziție al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$ este media aritmetică a vectorilor de poziție ai capetelor segmentului.

Legat de vectorul de poziție care împarte un segment într-un raport dat reamintim câteva rezultate din geometria plană, cum ar fi *teorema lui Thales, reciproca teoremei lui Thales* și *Teorema paralelelor echidistante*.

2.2. Teorema lui Thales

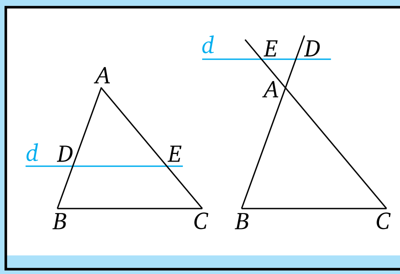
Teorema lui Thales

O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină, pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.

Reformulare

Fie ABC un triunghi, $d \parallel BC$, $d \cap AB = \{D\}$ și $d \cap AC = \{E\}$. Avem egalitatea:

$$\boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}}$$



Reciproca teoremei lui Thales

Fie triunghiul ABC și $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ sau $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ sau $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$. Atunci $DE \parallel BC$.

2.3. Condiții de paralelism

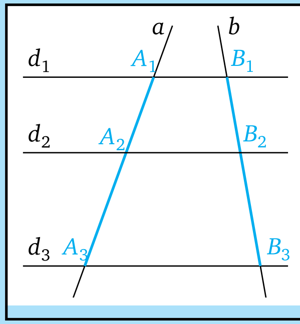
Teorema paralelelor neechidistante

Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale.

Reformulare

Fie dreptele a și b coplanare. Fie $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ trei drepte paralele situate în același plan cu a și b. Dacă $d_1 \cap a = \{A_k\}$ și $d_k = b = \{B_k\}$, $\forall\ k = \overline{1,3}$, atunci avem egalitățile:

$$\boxed{\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3},\ \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3},\ \frac{A_2A_3}{A_1A_3} = \frac{B_2B_3}{B_1B_3}}$$



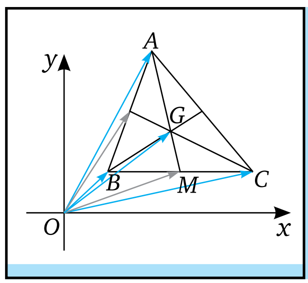
Generalizare. Se poate extinde la $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \ldots \parallel d_n$, $n \geq 4$.

3. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi. Concurența medianelor unui triunghi

3.1. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi

În sistemul ortogonal xOy, considerăm triunghiul ABC, unde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, și G centrul de greutate al triunghiului. Atunci vectorul de poziție al lui G este:

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}}$$



Demonstrație

Vectorul de poziție al mijlocului M al laturii $[BC]$ este $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$.

Vectorul de poziție al punctului G care împarte segmentul AM în raportul $k = \dfrac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GM}} = -2$ este:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OM}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}}{1-(-2)} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Coordonatele lui G vor fi:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ și } y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \text{ adică } G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

3.2. Concurența medianelor

Fie triunghiul ABC și A', B', C' picioarele medianelor din A, B, C. Atunci sunt adevărate afirmațiile:

a) Vectorii de poziție ai punctelor A', B', C' sunt dați de relațiile:

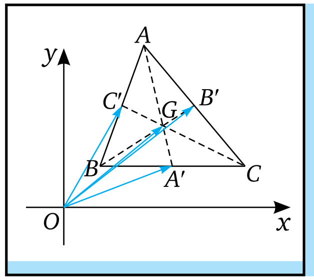
$$\boxed{\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},\ \overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2},\ \overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}}$$

b) Medianele sunt concurente în G.

c) Arătați că vectorul de poziție al centrului de greutate G este:

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}}$$

Demonstrație



a) În ΔOBC, OA' este mediană, deci $\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$;

analog $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$.

b) Fie G punctul de pe mediana AA' care împarte segmentul $[AA']$ în raportul $k = \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GA'}} = -2$; atunci vectorul de poziție al lui G este:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OA'}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA'}}{1-(-2)} = \frac{\overrightarrow{OA}+2\cdot\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} \quad (1)$$

Fie G' punctul de pe mediana BB' care împarte segmentul $[BB']$ în raportul $k = \frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{GB'}} = -2$. Atunci vectorul de poziție al lui G' este:

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OB'}}{1-(-2)} = \frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB'}}{3} = \frac{\overrightarrow{OB}+2\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} \quad (2).$$

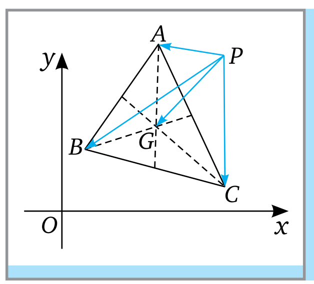
Din (1) și (2) deducem $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'}$, adică $G \equiv G'$.

c) vezi b).

Problemă rezolvată

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și P un punct oarecare.

Arătați că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$.



Rezolvare

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC} =$$
$$= 3\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{PO}+3\overrightarrow{OG} =$$
$$= 3(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OG}) = 3\overrightarrow{PG}$$

4. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi

4.1. Teorema bisectoarei

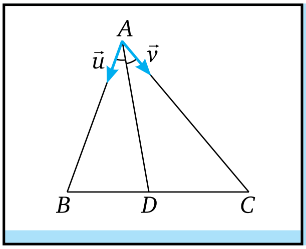
Fie triunghiul ABC și D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A, $D \in (BC)$. Afirmațiile următoare sunt adevărate.

a) Există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = \lambda(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC})$, unde $b = AC$, $c = AB$.

b) Fie k raportul în care punctul D împarte segmentul $[BC]$. Atunci

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1-k}.$$

Demonstrație



a) Fie $\vec{u}$, $\vec{v}$ versorii semidreptelor închise $[AB$ și $[AC$ și $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Deoarece $[AD$ este bisectoarea unghiului format de vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ rezultă că vectorii $\overrightarrow{AD}$ și $\vec{w}$ sunt coliniari, deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$.

Avem $\overrightarrow{AB} = c \cdot \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = b \cdot \vec{v}$.

Obținem: $\overrightarrow{AD} = \alpha\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right) = \frac{\alpha}{bc}(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}) = \lambda(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC})$,

unde $\lambda = \frac{\alpha}{bc}$.

b) Din $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = k$ obținem succesiv:

$$\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}).$$

Din $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$, obținem $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$.

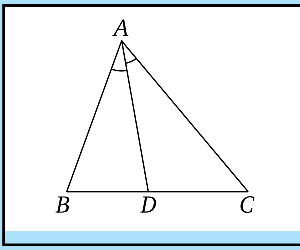
Teorema bisectoarei

Într-un triunghi, bisectoarea interioară a unui unghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile care formează unghiul respectiv.

Reformulare

Fie ABC un triunghi și D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A, $D \in (BC)$. Atunci are loc relația

$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}}$$



Demonstrație

Ținând seama de punctele a) și b) demonstrate anterior obținem:

$$\lambda(b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}\Leftrightarrow\left(\lambda b-\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{AB}=\left(-c\lambda-\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda b-\frac{1}{1-k}=0 \text{ și } -c\lambda-\frac{k}{1-k}=0\Leftrightarrow k=-\frac{b}{c} \text{ și } \lambda=\frac{1}{b+c}.$$

Din $k=-\frac{c}{b}$ deducem că $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC}$.

Din $\lambda=\frac{1}{b+c}$ și a) obținem $\overrightarrow{AD}=\frac{b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}}{b+c}$.

Probleme rezolvate

În triunghiul ABC fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A, B, C și $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

a) Arătați că vectorii de poziție ai punctelor A', B', C' sunt dați de relațiile:

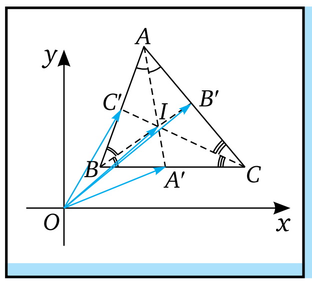
$$\overrightarrow{OA'}=\frac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c},\ \overrightarrow{OB'}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+c},\ \overrightarrow{OC'}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}}{a+b}.$$

b) Vectorul de poziție al centrului cercului înscris în triunghi este:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

c) Demonstrați că bisectoarele interioare ale triunghiului sunt concurente.

Rezolvare



a) Deoarece $(AA'$ este bisectoarea unghiului A,

$A'\in BC$, avem $\overrightarrow{AA'}=\frac{b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}}{b+c}$ și analog:

$$\overrightarrow{BB'}=\frac{a\cdot\overrightarrow{BA}+c\cdot\overrightarrow{BC}}{a+c},\ \overrightarrow{CC'}=\frac{a\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{CB}}{a+b}.$$

Dar $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB'}$,

$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC'}$, de unde obținem

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\frac{b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}}{b+c}=\frac{b\overrightarrow{OA}+c\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=$$

$$=\frac{b(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})}{b+c}=\frac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c}.$$

Analog, se calculează $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$.

b) Fie I intersecția bisectoarelor interioare $(AA'$ și $(BB'$.

Vectorul de poziție al lui A' este $\overrightarrow{OA'}=\frac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c}$.

În $\Delta BAA'$, $(BI$ este bisectoare și I împarte segmentul $[AA']$ în raportul

$$k=\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}=-\frac{AB}{BA'}-\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=-\frac{b+c}{a}.$$

Vectorul de poziție al lui I este: $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\,\overrightarrow{OA'}}{1-k} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - \left(-\frac{b+c}{a}\right)\overrightarrow{OA'}}{1-\left(-\frac{b+c}{a}\right)} =$

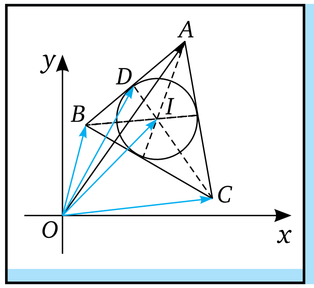
$$= \frac{a\cdot\overrightarrow{OA} + (b+c)\cdot\overrightarrow{OA'}}{a+b+c} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA} - (b+c)\dfrac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c}}{a+b+c} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \quad (1).$$

c) Notând I' punctul de intersecție al bisectoarelor $(BB'$ și $(CC'$ obținem, analog că vectorul de poziție al lui I' este: $\overrightarrow{OI'} = \dfrac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ (2).

Din (1) și (2) deducem $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI'} \Leftrightarrow I = I'$, deci bisectoarele sunt concurente.

4.2. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi

Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c, unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Dacă O este originea sistemului cartezian și I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci vectorul de poziție al lui I este:



$$\boxed{\overrightarrow{OI} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}}$$

Demonstrație

Deoarece $(AI$ și $(BI$ sunt bisectoarele unghiurilor A și B din teorema bisectoarei obținem:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b},\quad \frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Vectorul de poziție al lui D este $\overrightarrow{OD} = \dfrac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c}$, deoarece $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\dfrac{c}{b} = k$ și

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\cdot\overrightarrow{OC}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b}\overrightarrow{OC}}{1+\frac{c}{b}} = \frac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c}.$$

Avem $\dfrac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{ID}} = -\dfrac{b+c}{a} = k'$, de unde vectorul de poziție al lui I este:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} - k'\overrightarrow{OD}}{1-k'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \frac{b+c}{a}\overrightarrow{OD}}{a+\frac{b+c}{a}} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+(b+c)\cdot\overrightarrow{OD}}{a+b+c} =$$

$$= \frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+(b+c)\cdot\dfrac{b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{b+c}}{a+b+c} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

5. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester. Concurența înălțimilor

Fie triunghiul ABC și AA', BB', CC' înălțimi. Avem AA', BB', CC' concurente
Punctul de intersecție al înălțimilor unui triunghi este **ortocentrul** triunghiului.

5.1. Relația lui Sylvester și aplicații

Relația lui Sylvester

Fie H ortocentrul și O centrul circumscris triunghiului ABC. Atunci are loc egalitatea:

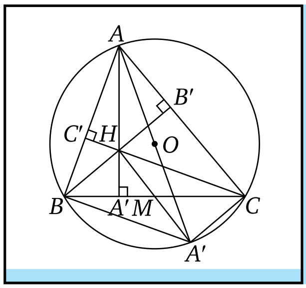
$$\boxed{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}}$$

Variantă

$$\boxed{\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}}$$

Demonstrație

Fie A' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC și M mijlocul lui $[BC]$. H este simetricul lui A' față de M. Avem $HBA'C$ paralelogram, de unde $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}$ (1).



În $\Delta HAA'$, HO este mediană, deci $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}=2\overrightarrow{HO}$ (2).

Din (1) și (2) obținem $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Probleme rezolvate

1. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este congruent cu patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$.
(Concurs „Cristian S. Calude“, Galați, A.V. Mihai)

Rezolvare

Folosind relația lui Sylvester $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC, obținem în triunghiurile BCD, CDA, DAB, ABC:
$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH_4}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Avem $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1} = (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{H_2H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{H_3H_4}=\overrightarrow{OH_4}-\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$

Din $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{H_1H_2}$, $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{H_2H_3}$ și $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{H_3H_4}$, rezultă că $ABCD \equiv H_1H_2H_3H_4$.

2. Se consideră în același plan triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ de ortocentre H și H_1, având O și respectiv O_1 centrele cercurilor circumscrise. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$;

b) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HH_1}+2\overrightarrow{OO_1}=\vec{0}$. *(OM 2003, Sibiu, Dinu Șerbănescu)*

Rezolvare

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Deducem:
$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{HG} + (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) =$
$= 2\overrightarrow{HO}+\vec{0} = 2\overrightarrow{HO}$. Am folosit faptul că punctele O, G, H sunt coliniare și $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

b) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{HH_1}-\overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{HB_1}-\overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HC_1}-\overrightarrow{HC}) = \vec{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HA_1}+\overrightarrow{HB_1}+\overrightarrow{HC_1}) - (\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA_1}+\overrightarrow{HB_1}+\overrightarrow{HC_1} \overset{(a)}{=} 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{H_1A_1}-\overrightarrow{H_1H}) + (\overrightarrow{H_1B_1}-\overrightarrow{H_1H}) + (\overrightarrow{H_1C_1}-\overrightarrow{H_1H}) = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{H_1A_1}+\overrightarrow{H_1B_1}+\overrightarrow{H_1C_1}) - 3\overrightarrow{H_1H} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{H_1O_1} - 3\overrightarrow{H_1H} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{H_1O_1} = 2\overrightarrow{HO} + 3\overrightarrow{H_1H} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{H_1O_1} = 2(\overrightarrow{O_1O}-\overrightarrow{O_1H}) + 3\overrightarrow{H_1H} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{H_1O_1} + 2\overrightarrow{O_1H} = 2\overrightarrow{O_1O} + 3\overrightarrow{H_1H} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{H_1H} = 2\overrightarrow{O_1O} + 3\overrightarrow{H_1H} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{HH_1} = 2\overrightarrow{O_1O} \Leftrightarrow \overrightarrow{HH_1}+2\overrightarrow{OO_1} = 0.$

3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O, având diagonalele AC și BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv ABC, demonstrați că $\overrightarrow{BH_2}=\overrightarrow{DH_1}$. *(OM 2003, Neamț, Marius Merișor)*

Rezolvare

Folosind relația lui Sylvester avem:

$$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Avem $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BH_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{DH_1}=\overrightarrow{OH_1}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BH_2}=\overrightarrow{DH_1}$.

4. Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ având H, respectiv H_1 ortocentre și O, respectiv O_1 centrele cercurilor circumscrise. Arătați că dacă $\overrightarrow{HH_1}+2\overrightarrow{OO_1}=\vec{0}$, atunci cele două triunghiuri au același centru de greutate. *(OM 2003, Olt)*

Rezolvare

$\overrightarrow{HH_1}+2\overrightarrow{OO_1}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1H} = 3\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1H}+\overrightarrow{HH_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1H_1}$ (1).

Folosind relația lui Sylvester în triunghiul $A_1B_1C_1$, $\overrightarrow{O_1H_1}=\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1B_1}+\overrightarrow{O_1C_1}$, relația (1) este echivalentă cu: $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1H_1}+\overrightarrow{O_1B_1}+\overrightarrow{O_1C_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OB_1})+(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OC_1}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$ (2).

Folosind apoi relația lui Sylvester în triunghiul ABC:

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG_1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow G = G_1$, unde G și G_1 sunt centrele de greutate ale triunghiului ABC și $A_1B_1C_1$.

Observație: Este adevărată și reciproca.

5. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $[BC]$, iar O, H, G sunt centrul cercului circumscris, ortocentrul și centrul de greutate. Arătați că:

a) vectorii $\overrightarrow{AH}$ și $\overrightarrow{OM}$ sunt coliniari;

b) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=6\overrightarrow{OG}$;

c) $|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}|<6R$, unde R este raza cercului circumscris. *(OM 2003, Suceava)*

Rezolvare

a) Din relația lui Sylvester avem $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ (1).

Dar $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\overset{(1)}{=}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$. Din $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$ rezultă că vectorii $\overrightarrow{AH}$ și $\overrightarrow{OM}$ sunt coliniari (sau: în triunghiul AHA', OM este linie mijlocie $\Rightarrow OM \parallel AH$, A' este simetricul lui A față de O în cercul circumscris).

Observație: În demonstrarea relației lui Sylvester se folosește faptul că $\overrightarrow{AH}$ și $\overrightarrow{OM}$ sunt vectori coliniari.

b) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\overset{(a)}{=}2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OP}$ (1), unde M¸N, P sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Dar $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$, $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, adică

$2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{OP}=2\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (3). Știm că

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (4). Din (3) și (4) rezultă că $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=6\overrightarrow{OG}$.

c) Folosind b), inegalitatea este echivalentă cu $6|\overrightarrow{OG}|<6R \Leftrightarrow OG<R \Leftrightarrow OG^2<R^2$.

Știm că $OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ (relația lui Leibnitz). deducem că $OG<R$.

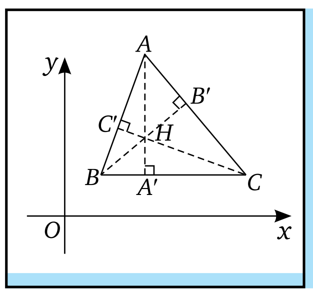
5.2. Concurența înălțimilor

În triunghiul ABC, fie H intersecția înălțimilor AA', BB'. Arătați că:

a) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}$; b) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}$; c) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$;

d) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$; e) înălțimile AA', BB', CC' sunt concurente.

Demonstrație



a) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}\cdot pr_{\overline{HA}}(\overrightarrow{HB})=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}$ (1)

b) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}\cdot pr_{\overline{HA}}(\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}$ (2)

c) Din (1) și (2) avem $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$ (3)

Analog $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$ (4)

d) Din (3) și (4) $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HC}(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

e) Din $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow HC\perp AB$, deci HC este tot înălțime.

6. Teorema lui Menelaos; teorema lui Ceva

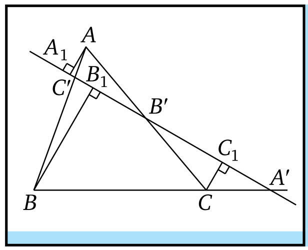
6.1. Teorema lui Menelaos și aplicații

Teorema lui Menelaos

Fie ABC un triunghi și A', B', C' trei puncte astfel încât $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci are loc egalitatea:

$$\boxed{\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1}$$

Demonstrație sintetică

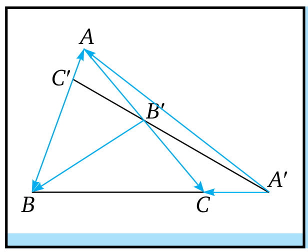


Fie A_1, B_1, C_1 proiecțiile vârfurilor A, B, C ale triunghiului pe dreapta determinată de cele 3 puncte coliniare A', B', C' Avem perechile de triunghiuri asemenea: $\Delta A'BB_1 \sim \Delta A'CC_1$, $\Delta B'CC_1 \sim \Delta B'AA_1$, $\Delta C'AA_1 \sim \Delta C'BB_1$, din care rezultă:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1}, \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1}, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}.$$

Înmulțind cele 3 egalități obținem: $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1.$

Demonstrație vectorială



$$\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = x, \quad \frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} = y, \quad \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{A'B}} = z;$$

$\overrightarrow{C'A} = x\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{B'A} = y\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{A'C} = z\overrightarrow{A'B}$.

Obținem succesiv:

$$\overrightarrow{C'A} = x\overrightarrow{C'B} = x\left(\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{C'A} = \frac{x}{1-x}\overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{B'A} = y\overrightarrow{B'C} = y\left(\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{B'A} = \frac{y}{1-y}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{A'C} = z\overrightarrow{A'B} = z\left(\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C} = \frac{z}{1-z}\overrightarrow{CB}.$$

Rezultă $\overrightarrow{A'C} = \dfrac{z}{1-z}\overrightarrow{CB} = \dfrac{z}{z-1}\overrightarrow{BC} = \dfrac{z}{z-1}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{z}{1-z}\overrightarrow{BA} + \dfrac{z}{z-1}\overrightarrow{AC}.$

Avem: $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'A} - \overrightarrow{B'A} = \dfrac{x}{1-x}\overrightarrow{AB} - \dfrac{y}{1-y}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CA'} = \frac{1}{y}\overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{A'C} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{1-y}\overrightarrow{AC} - \left(\frac{z}{z-1}\overrightarrow{BA} + \frac{z}{z-1}\overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= \frac{z}{1-z}\overrightarrow{BA} + \left(\frac{1}{1-y} + \frac{z}{1-z}\right)\overrightarrow{AC} = \frac{z}{1-z}\overrightarrow{BA} + \frac{1-yz}{(1-y)(1-z)}\overrightarrow{AC}.$$

Deoarece A', B' și C' sunt coliniare $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{x}{1-x}}{-\dfrac{z}{1-z}} = \frac{-\dfrac{y}{1-y}}{\dfrac{1-yz}{(1-y)(1-z)}} \Leftrightarrow \frac{x}{z(1-x)} = \frac{y}{1-yz} \Leftrightarrow x = yz \Leftrightarrow \frac{x}{yz} = 1.$$

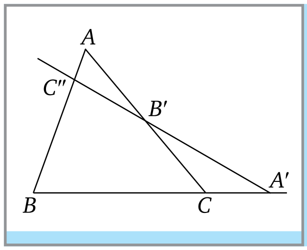
Reciproca teoremei lui Menelaos

Considerăm un triunghi ABC și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ astfel încât două dintre punctele A', B', C' sunt situate pe două laturi ale triunghiului, iar al treilea punct este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi sau că toate punctele A', B', C' sunt pe prelungirile laturilor triunghiului.

Dacă are loc egalitatea: $\dfrac{A'B}{A'C}\cdot\dfrac{B'C}{B'A}\cdot\dfrac{C'A}{C'B} = 1$, atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.

Demonstrație

Presupunem că A' este pe prelungirea laturii $[BC]$, $C \in (BA')$, iar B' și C' sunt pe laturile (AC), (AB). Fie C'' intersecția dreptei $A'B'$ cu latura $[AB]$. Aplicând teorema lui Menelaos pentru punctele coliniare A', B', C'' obținem: $\dfrac{A'B}{A'C}\cdot\dfrac{B'C}{B'A}\cdot\dfrac{C''A}{C''B} = 1$.



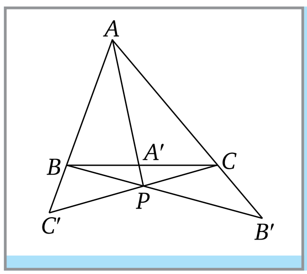
Ținând seama și de relația din ipoteză $\dfrac{A'B}{A'C}\cdot\dfrac{B'C}{B'A}\cdot\dfrac{C'A}{C'B} = 1$, obținem $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{C''A}{C''B}$. Deoarece există un **singur** punct interior unui segment care împarte segmentul într-un raport dat, rezultă că $C'' = C'$ și deci punctele A', B', C' sunt coliniare.

Relația lui Van Aubel*

Fie triunghiul ABC și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct P, atunci există relația: $\dfrac{B'A}{B'C} + \dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{PA}{PA'}$.

Demonstrație

Se aplică teorema lui Menelaos pentru triunghiul $AA'C$ și punctele coliniare B, P, B' și obținem: $\dfrac{B'A}{B'C}\cdot\dfrac{BC}{BA'}\cdot\dfrac{PA'}{PA} = 1$, de unde $\dfrac{B'A}{B'C} = \dfrac{BA'}{BC}\cdot\dfrac{PA}{PA'}$ (1). Aplicând apoi teorema lui Menelaos pentru $\Delta AA'B$ și punctele coliniare C, P, C' obținem: $\dfrac{C'A}{C'B}\cdot\dfrac{CB}{CA'}\cdot\dfrac{PA'}{PA} = 1$, de unde $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{CA'}{CB}\cdot\dfrac{PA}{PA'}$ (2).



Adunând (1) cu (2) avem: $\dfrac{B'A}{B'C} + \dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{PA'}{PA}\left(\dfrac{BA'}{BC} + \dfrac{CA'}{CB}\right) = \dfrac{PA'}{PA}$.

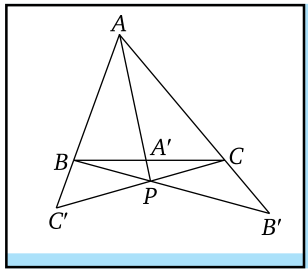
6.2. Teorema lui Ceva și aplicații

Teorema lui Ceva

Se consideră un triunghi ABC și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci are loc egalitatea

$$\boxed{\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1}$$

Demonstrație sintetică

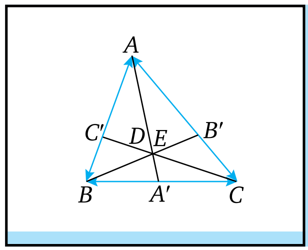


Fie $\{P\} = AA' \cap BB' \cap CC'$. Aplicăm teorema lui Menelaos pentru $\Delta AA'B$ și punctele coliniare C, P, C' și obținem $\frac{CB}{CA'} \cdot \frac{PA'}{PA} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 (1)$.

Aplicăm teorema lui Menelaos pentru $\Delta AA'C$ și punctele coliniare B, P, B' și obținem: $\frac{B'A}{B'C} = \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{PA}{PA'}$ (2)

Înmulțind relațiile (1) și (2) obținem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Demonstrație vectorială



Fie $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = x$, $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = y$, $\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = z$, aplicând teorema lui Menelaus pentru $\Delta ABA'$ și transversala $C'DC$, unde $\{D\} = CC' \cap AA'$ obținem:

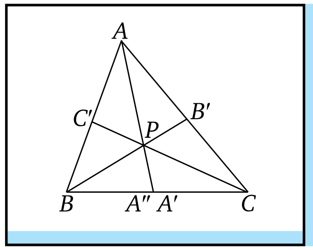
$$x(1-y)\frac{\overrightarrow{DA'}}{\overrightarrow{DA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DA'}}{\overrightarrow{DA}} = \frac{1}{x(1-y)} \text{ (1).}$$

Aplicând teorema lui Menelaus pentru $\Delta ACA'$ și transversala BEB', unde $\{E\} = BB' \cap AA'$ obținem $z\frac{y}{y-1}\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EA'}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{EA'}}{\overrightarrow{EA}} = \frac{yz}{y-1}$ (2).

Dreptele AA', BB', CC' sunt concurente dacă punctele D și E coincid. Prin urmare, din (1) și (2) obținem: $\frac{\overrightarrow{DA'}}{\overrightarrow{DA}} = \frac{\overrightarrow{EA'}}{\overrightarrow{EA}} \Leftrightarrow \frac{1}{x(1-y)} = \frac{yz}{y-1} \Leftrightarrow xyz = -1$.

Reciproca teoremei lui Ceva

Fie ABC un triunghi și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă are loc relația $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.



Demonstrație

Fie P intersecția dreptelor BB', CC' și A'' intersecția dreptei PA cu BC.

Aplicând teorema lui Ceva pentru ΔABC și dreptele concurente AA'', BB', CC' obținem $\dfrac{A''B}{A''C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$.

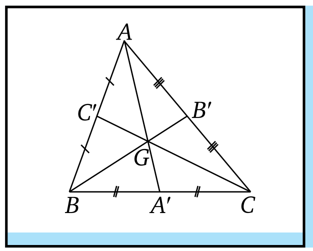
Ținând seama și de relația din enunț $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$ obținem $\dfrac{A''B}{A'C} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

Cum punctele A'' și A' sunt interioare segmentului (BC) și îl împart în același raport deducem că $A'' = A'$.

Observație. Reciproca teoremei lui Ceva este adevărată și în cazul în care un punct (de exemplu, $A' \in (BC)$, iar B', C' sunt în afara segmentelor $[AC]$, $[AB]$, dar BB' nu este paralelă cu CC'.

Aplicații ale teoremei lui Ceva

1. În orice triunghi medianele sunt concurente.



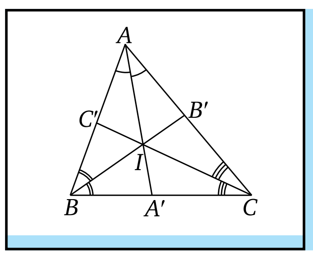
Demonstrație

Fie A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale ΔABC.

Avem $\dfrac{A'B}{A'C} = 1$, $\dfrac{B'C}{B'A} = 1$, $\dfrac{C'A}{C'B} = 1$.

Deoarece $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$ conform reciprocei teoremei lui Thales deducem că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Punctul lor de intersecție G, se numește **centrul de greutate al triunghiului** și este situat pe fiecare mediană la 1/3 de bază și 2/3 din vârf.

2. În orice triunghi bisectoarele interioare sunt concurente.



Demonstrație

Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B, C în ΔABC. Conform teoremei bisectoarei avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC},\ \frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA},\ \frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}.$$

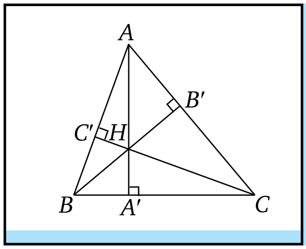
Obținem $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{BC}{BA} \cdot \dfrac{CA}{CB} = 1$.

Din $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}$ conform reciprocei teoremei lui Ceva dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Punctul de intersecție I a bisectoarelor interioare, fiind egal depărtat de laturile triunghiului este **centrul cercului înscris în triunghi**.

3. În orice triunghi înălțimile sunt concurente.

Demonstrație



Fie ΔABC ascuțitunghic și A', B', C' picioarele înălțimilor din A, B, C. Din $\Delta ABA' \sim \Delta CBC' \Rightarrow \frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$. (1)

Din $\Delta BB'C \sim \Delta AA'C \Rightarrow \frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA}$. (2)

Din $\Delta CC'A \sim \Delta BB'A \Rightarrow \frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}$. (3)

Din (1), (2), (3) obținem $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB} = 1$. Din $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = 1$ conform reciprocei teoremei lui Ceva dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Punctul lor de intersecție se numește **ortocentrul triunghiului**.

Probleme propuse

1. Fie patrulaterul $ABCD$. Arătați că: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

2. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$ și P un punct oarecare. Să se arate că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}$.

3. Fie M și N mijloacele diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$. Arătați că: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{MN}$.

4. Fie D, E, F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC și P un punct oarecare. Arătați că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}$.

5. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$. Arătați că: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AD}$.

6. Fie O, G și H centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ABC și A' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris. Arătați că:
a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}$; b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$; c) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}$;
d) deduceți că punctele H, G, O sunt coliniare; e) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

7. Fie $[AD$ bisectoarea interioară a unghiului A în triunghiul ABC, $D \in (BC)$. Dacă b și c sunt lungimile laturilor CA și AB, arătați că:

a) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{b+c}(b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC})$; b) $\overrightarrow{PD}=\frac{b\cdot\overrightarrow{PB}+c\cdot\overrightarrow{PC}}{b+c}$, P este un punct oarecare.

8. Fie D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC.

a) Arătați că $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}$.

b) Dacă $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, demonstrați că punctele A, D, L sunt coliniare.

c) Arătați că $\overrightarrow{AL}=2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)$.

9. Fie triunghiul ABC și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Arătați că $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

10. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB și CD, $AB = a$, $CD = b$, $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela dusă din O la baze intersectează laturile neparalele AD și BC în E, respectiv F.

a) Arătați că $\overrightarrow{EO}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}$ și $\overrightarrow{OF}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}$.

b) Deduceți că O este mijlocul segmentului $[EF]$.

11. Fie M și N mijloacele diagonalelor AC și BD ale patrulaterului convex $ABCD$. Arătați că o condiție necesară și suficientă ca $ABCD$ să fie paralelogram este ca $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{MN}$.

12. Fie M și N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD ale patrulaterului convex $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$.

13. Se consideră triunghiul ABC și punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Arătați că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$ și $[DE]$ sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{AD}{DB}=\frac{EC}{EA}$.

(OM 2002, Iași)

14. Se consideră punctele A, B, C, D coplanare, oricare trei necoliniare, și H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv ABD. Arătați că A, B, C, D sunt conciclice (se află pe același cerc) dacă și numai dacă $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$. *(OM 2003, București, Marian Andronache)*

15. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $m(\sphericalangle B) = 60°$. Demonstrați că bisectoarea din B, mediana din A și înălțimea din C sunt concurente dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

(OM 2004, Vaslui, Sergiu Romașcu)

16. Fie $ABCD$ paralelogram cu $AB = a$, $BD = b$, $DA = c$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD și I centrul cercului înscris în triunghiul BCD. Fie $M \in (BC)$ astfel ca $\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MC}$. Aflați valoarea $k \in \mathbb{R}$ pentru care punctele G, I și M sunt coliniare.

(Concurs „Dan Barbilian“, 2003)

Exerciții propuse

Test de evaluare

1p **1.** Fie vectorii $\vec{u} = \lambda\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{v} = (\lambda + 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. Determinați $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie coliniari.

2. Fie punctele $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$.

1p a) Determinați vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ și verificați relația lui Chasles.

0,5p b) Scrieți vectorii de poziție ai punctelor A, B, C.

0,5p c) Precizați vectorii de poziție ai mijloacelor segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

1p **3.** Se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(-7, -6)$.
Arătați că vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

1p **4.** Determinați vectorul de poziție al punctului M de pe segmentul $[AB]$ care împarte segmentul $[AB]$, cu $A(-3, -1)$, $B(5, 1)$ în raportul $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$.

1p **5.** Fie triunghiul ABC, unde $A(5, 1)$, $B(-2, -4)$, $C(0, -3)$.
Determinați vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului ABC.

6. Fie triunghiul ABC, unde $A(4, 0)$, $B(0, 3)$, $C(4, 3)$.

1p a) Scrieți vectorii de poziție ai picioarelor bisectoarelor interioare duse din A și B.

1p b) Scrieți vectorul de poziție al centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

1p **7.** Să se arate că dreptele care unesc vârfurile unui triunghi ABC cu punctele M, N și P de tangență ale laturilor triunghiului cu cercul înscris sunt trei drepte concurente.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

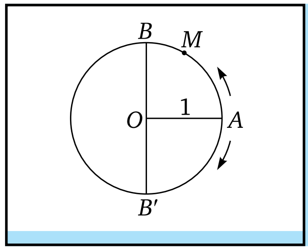
CAPITOLUL 9

Elemente de trigonometrie

1. Cercul trigonometric

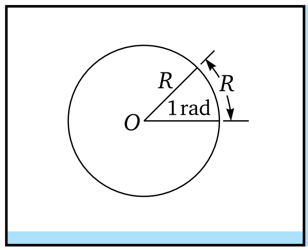
Considerăm în plan un cerc $\mathcal{C}$ de centru O și rază 1 pe care se fixează un punct A și se construiește diametrul BB' perpendicular pe raza OA.

Punctele O, A, B determină un reper cartezian în planul dat. Un punct variabil M de pe cerc care pornește din punctul A se poate deplasa spre B și atunci spunem că se deplasează în sens pozitiv (direct) sau se poate deplasa spre B' și atunci spunem că se deplasează în sens negativ (indirect).



Sensul negativ corespunde sensului de deplasare a acelor unui ceasornic. Prin convenție, numim **sens trigonometric sau pozitiv** sensul invers de mers al acelor de ceas.

Fie un cerc de centru O și rază R. Un unghi cu vârful în centrul cercului care subîntinde un arc de cerc de lungime egală cu raza cercului are măsura **1 radian**.



Unghiul cu vârful în centrul cercului de rază R, care subîntinde un arc de lungime l are măsura $\frac{l}{R}$ radiani.

Relația între măsura t în radiani și măsura α în grade a unghiului este $\frac{t}{\pi} = \frac{\alpha}{180^\circ}$.

Numim **plan orientat** un plan în care s-a stabilit un sens direct de parcurs pentru toate cercurile din acel plan (evident celălat sens este sensul indirect).

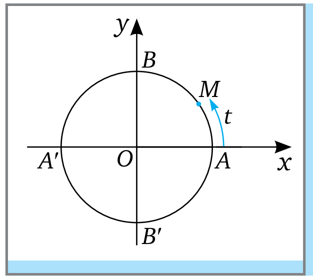
Reperul determinat de punctele O, A, B poate fi notoat și prin $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Definiție

Se numește **cerc trigonometric** într-un plan orientat, cercul de rază 1 împreună cu reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ fixat și cu sensurile direct și indirect stabilite.

Pe cercul trigonometric pornind din punctul A și efectuând o rotație completă în sens pozitiv (direct), adică trecând mai întâi prin B și apoi prin B', s-a parcurs o distanță egală cu 2π.

Se poate stabili o corespondență între numerele reale din intervalele $[0, 2\pi]$ și pozițiile punctului M pe cercul trigonometric: oricărui număr real $t \in [0, 2\pi]$ îi corespunde un punct M (și numai unul) pe cercul trigonometric astfel încât $t = m(\overset{\frown}{AM})$ și reciproc.



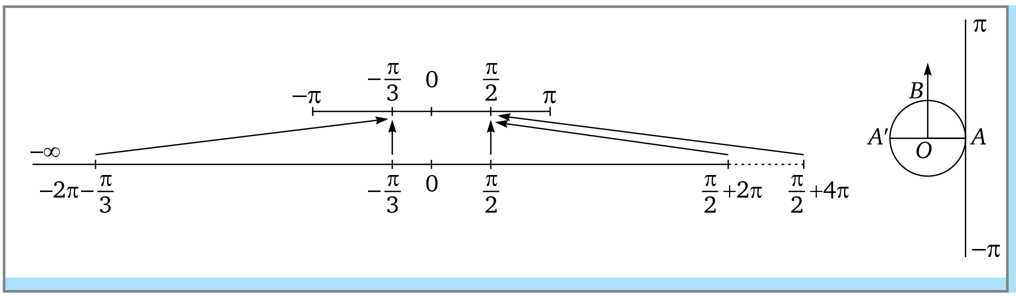
Cu alte cuvinte putem defini funcția:

$f: [0, 2\pi] \to \mathcal{C}(0, 1),\ f(t) = M.$

Numărul t se numește **coordonată metrică** a lui M.

Fie cercul trigonometric $\mathcal{C}$, punctele $A, B \in \mathcal{C}$ și $l \in \mathbb{R}$. **Arcul orientat** cu originea în A, extremitatea în B, de măsură l este „drumul“ pe $\mathcal{C}$ de lungime $|l|$ care se parcurge de la A la B în sens pozitiv dacă $l > 0$ sau în sens negativ dacă $l < 0$. Notăm arcul orientat prin (AB, l) sau, dacă măsura l este cunoscută, prin AB. Un număr $l \in [-\pi, \pi]$ se numește *măsură principală* a unui arc orientat de măsură x, dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = l + 2k\pi$.

Prin urmare oricărui număr real x îi putem asocia un arc orientat de măsură x căruia îi putem asocia apoi măsura principală l, $(-\pi < l \le \pi)$ pentru care $x = l + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Putem considera cercul confecționat dintr-o sârmă de oțel elastică cu punctul A fixat. Dacă tăiem în punctul A' sârma va lua forma segmentului de capete $-\pi$ și π cu mijlocul în punctul A și de lungime 2π.

Fie $\mathcal{C}$ cercul trigonometric de centru O.

Definiție

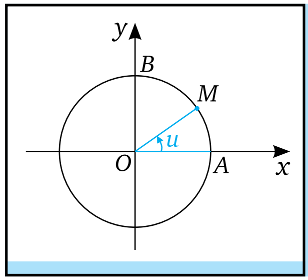
Numim **unghi orientat** o pereche ordonată de semidrepte cu originea în O împreună cu un sens de rotație precizat. Spunem că unghiul este orientat pozitiv dacă sensul de rotație este cel trigonometric și este orientat negativ în sens contrar.

Măsura unui unghi orientat este măsura principală a arcului orientat în același sens, delimitat pe cercul trigonometric de laturile unghiului.

Două unghiuri orientate care au aceeași măsură se numesc unghiuri orientate congruente. Întrucât măsura arcului AM este egală cu măsura unghiului la centru AOM[1] putem spune că poziția punctului pe cercul trigonometric este determinată de măsura unghiului la centru corespunzător.

Notând cu $u = \mathrm{m}(AOM)$ putem stabili o corespondență între măsurile unghiurilor din intervalul $(0, 2\pi)$ și poziția punctului M pe cercul trigonometric oricărui unghi orientat AOM cu măsura u de pe cercul trigonometric îi corespunde un unic punct M pe acesta și reciproc.

[1] Pentru similitudine cu notația arcului în acest capitol vom folosi notația AOM pentru unghiul AOM (de exemplu) în loc de $\sphericalangle AOM$, cum folosisem până acum.



Putem vorbi de o funcție f: $[0, 2\pi] \to \mathcal{C}(0, 1), f(\vec{u}) = M$. Numărul u se numește **coordonata unghiulară** a lui M.

Punctului M de pe cerc îi corespunde vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ ale cărui componente sunt x_M și y_M, deci $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$. Numerele x_M și y_M sunt **coordonatele carteziene** ale lui M.

Dacă notăm cu V mulțimea tuturor vectorilor cu originea în O și extremitatea în orice punct de pe $\mathcal{C}(0, 1)$, se poate vorbi despre o corespondență între elementele din V și pozițiile punctului M pe cercul trigonometric.

Ca și mai sus, se poate defini funcția $f: V \to \mathcal{C}(0, 1), f(\vec{v}) = M$, unde $\vec{v} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$ și $M(x_M, y_M)$.

În concluzie, poziția unui punct M de pe cercul trigonometric poate fi dată prin:

1. coordonate metrice (măsura arcului orientat $\overset{\frown}{AM}$, $t = m(\overset{\frown}{AM})$).
2. coordonate unghiulare (măsura unghiului orientat $\vec{u} = m(\widehat{AOM})$;
3. coordonate carteziene $M(x_M, y_M)$, unde $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$.

Exercițiu rezolvat

Să se determine măsura principală a arcelor orientate:

a) $x = 3573°$; b) $y = \dfrac{173\pi}{21}$; c) $x = -837°$; d) $z = -\dfrac{29\pi}{3}$.

Rezolvare

a) $\dfrac{3573}{180} = \dfrac{t}{\pi} \Rightarrow t = \dfrac{397\pi}{20} = 2 \cdot 10\pi - \dfrac{3}{20}\pi \Rightarrow l = -\dfrac{3\pi}{20}$;

b) $y = 8\dfrac{5}{21}\pi = 2 \cdot 4\pi + \dfrac{5\pi}{21} \Rightarrow l = \dfrac{5\pi}{21}$;

c) $\dfrac{-837}{180} = \dfrac{t}{\pi} \Rightarrow t = -4\pi - \dfrac{13}{20}\pi = -2 \cdot 2\pi - \dfrac{13}{20}\pi \Rightarrow l = -\dfrac{13}{20}\pi$;

d) $z = -\dfrac{21\pi}{3} = -10\pi + \dfrac{\pi}{3} = 2(-5)\pi + \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow l = \dfrac{\pi}{3}$.

În tabelul de mai jos, întocmit cu ajutorul relației $a = \dfrac{\alpha}{180} \cdot \pi$, vom da valorile în grade (sexagesimale) respectiv în radiani pentru măsura unor arce uzuale.

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Exerciții propuse

1. Exprimați în radiani măsurile unghiurilor de 10°, 25°, 75°, 105°, 120°, 150°, 225°, 315°, 48°30′.

2. Exprimați în grade sexagesimale măsurile unghiurilor:

$\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{17\pi}{30}$.

Exerciții propuse

3. Exprimați în radiani și în grade, măsura unghiului format de acele unui ceas la ora 3 și jumătate.

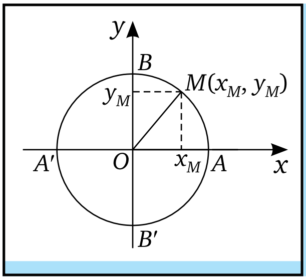
4. O roată dințată are 90 de dinți. Să se exprime în radiani măsura unghiului de rotație al roții, dacă ea se rotește cu:
a) 25 de dinți; b) 60 de dinți.

5. Pe o hartă la scara 1 : 50 000 curbele de nivel sunt trasate echidistant, la o diferență de altitudine de 20 m. Care este panta unui teren la care curbele de nivel sunt pe hartă depărtate cu 1 mm? Care va fi distanța între curbele de nivel de pe hartă la panta de $\alpha°$, știind că $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{15}$?

2. Funcții trigonometrice definite pe $[0, 2\pi]$, respectiv $[0, \pi]$

Am văzut că unui punct M situat pe cercul trigonometric i se pot asocia coordonate metrice, unghiulare și carteziene.

Cu alte cuvinte pentru un număr real $t \in [0, 2\pi]$ îi corespunde un arc $\overset{\frown}{AM}$, unde $M \in \mathcal{C}(0, 1)$ și $A(1, 0) \in \mathcal{C}$, astfel încât $t = m(\overset{\frown}{AM})$. Cum $m(\overset{\frown}{AM}) = m(\widehat{AOM})$ putem spune că aceluiași număr real $t \in [0, 2\pi]$ îi corespunde un unghi de măsura t.



Punctul M de pe cercul trigonometric pentru care $t = m(\overset{\frown}{AM})$ are coordonatele carteziene x_M și y_M, iar $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$.

Observăm că pentru orice poziție a lui M pe cerc avem $-1 \le x_M \le 1$ și $-1 \le y_M \le 1$.

Putem defini astfel funcțiile sinus (notată sin) și cosinus (notată cos).

Definiții

1. Funcția $f: [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ care asociază fiecărui număr real $t \in [0, 2\pi]$ abscisa x_M a punctului M de pe cercul trigonometric, pentru care $t = m(\overset{\frown}{AM})$, se numește **funcția trigonometrică cosinus**:

$$\boxed{\cos: [0, 2\pi] \to [-1, 1],\ \cos t = x_M}$$

2. Funcția $f: [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ care asociază fiecărui număr real $t \in [0, 2\pi]$ ordonata y_M a punctului M de pe cercul trigonometric, pentru care $t = m(\overset{\frown}{AM})$, se numește **funcția trigonometrică sinus**:

$$\boxed{\sin: [0, 2\pi] \to [-1, 1],\ \sin t = y_M}$$

Folosind coordonatele carteziene ale punctelor $A(1, 0)$; $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ și $B'(0, -1)$ de pe cercul trigonometric și măsurile unghiurilor corespunzătoare obținem:

- $A(1, 0) \Rightarrow \sin 0 = 0, \cos 0 = 1;$
- $B(0, 1) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0;$
- $A'(-1, 0) \Rightarrow \sin \pi = 0, \cos \pi = -1;$
- $B'(0, -1) \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$

Observații

1. Funcția **sin** ia valori pozitive în cadranele I, II și valori negative în cadranele III și IV.
2. Funcția **cos** ia valori pozitive în cadranele I, IV și valori negative în cadranele II și III.

Exercițiu rezolvat

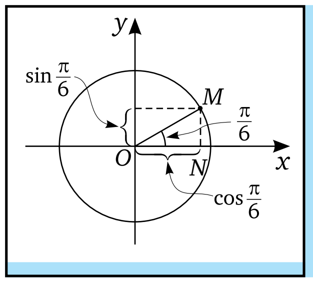
Calculați valorile funcțiilor sin și cos pentru $t = \frac{\pi}{6}$.

Rezolvare

Avem $m(\widehat{AOM}) = \frac{\pi}{6}$. Construim $MN \perp OA$, $N \in OA$, rezultă că triunghiul OMN, dreptunghic în N, având $m(\widehat{NOM}) = \frac{\pi}{6}$ are $MN = \frac{1}{2}OM$, adică $MN = \frac{1}{2}$ și cu teorema lui Pitagora obținem $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avem $x_M = ON = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și

$y_M = MN = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.



Proprietate

Pentru orice $t \in [0, 2\pi]$ are loc egalitatea

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}$$

numită **formula fundamentală a trigonometriei.**

Aceasta se obține scriind că distanța $OM = 1 \Rightarrow OM^2 = 1$, unde $O(0, 0)$ și $M(\cos t, \sin t)$.

Cu ajutorul funcțiilor sin și cos putem defini alte funcții trigonometrice. Am văzut că pentru $t \in [0, \pi]$ avem $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Definiție

Se numește **funcția trigonometrică tangentă**, notată tg, funcția:

$$\boxed{\text{tg}: [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R},\ \text{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}}$$

Exemple:

1. Pentru $t = \frac{\pi}{6}$ avem $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Pentru $t = \frac{\pi}{4}$ avem $\sin t = \cos t$ (triunghiul OMN este dreptunghic isoscel) și atunci $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$.

Ținând seama că $\sin t = 0$, pentru $t = 0$ și $t = \pi$ se poate defini funcția cotangentă.

Definiție

Se numește **funcția trigonometrică cotangentă**, notată ctg, funcția:

$$\boxed{\text{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R},\ \text{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}}$$

Observăm că avem relația $\text{ctg}t = \frac{1}{\text{tg}\, t}$ sau $\text{tg}\, t \cdot \text{ctg}\, t = 1$.

Exemplu:

Pentru $t = \frac{\pi}{3}$ avem $\text{ctg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \text{ctg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t;$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t;$
$\sin\left(\pi - t\right) = \sin t;$	$\sin\left(\pi + t\right) = -\sin t;$
$\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos t;$	$\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} + t\right) = -\cos t;$
$\sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - t\right) = -\sin t;$	$\sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} + t\right) = \sin t.$

3. Funcții trigonometrice definite pe $\mathbb{R}$

3.1. Funcțiile sinus și cosinus

Funcțiile trigonometrice sin și cos prezentate anterior au fost definite pe intervalul $[0, 2\pi]$ interval care corespunde efectuării de către punctul M a unei deplasări complete, a unei rotații, pe cercul trigonometric. Intervalul $[2\pi, 4\pi]$ corespunde unei a doua rotații, intervalul $[4\pi, 6\pi]$ unei a treia rotații ș.a.m.d

Dacă deplasarea punctului M (care pornește din A) se face în sens negativ (indirect) intervalul $[-2\pi, 0]$ corespunde primei rotații complete în sensul mersului acelor de la ceasornic, intervalul $[-4\pi, -2\pi]$ corespunde celei de-a doua rotații ș.a.m.d.

Deducem că oricărui număr real t îi corespunde un punct $M(x_M, y_M)$ de pe cercul trigonometric.

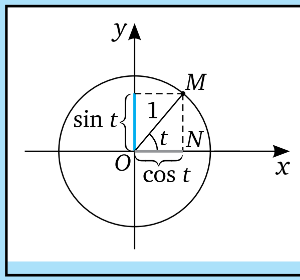
Prin urmare putem extinde domeniul de definiție al funcțiilor sin și cos de la intervalul $[0, 2\pi]$ la $\mathbb{R}$.

Definiții

1. Se numește **funcția sinus** funcția:

$$\boxed{\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \sin t = y_M}$$

unde y_M este ordonata punctului M de pe cercul trigonometric, punct care corespunde numărului t.



2. Se numește **funcția cosinus** funcția:

$$\boxed{\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \cos t = x_M}$$

unde x_M este abscisa punctului M de pe cercul trigonometric, punct care corespunde numărului t.

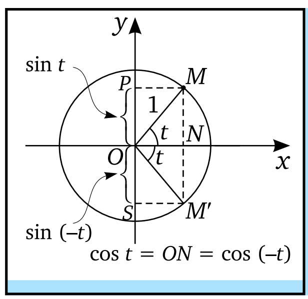
Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(0, 1), f(t) = M$ este o funcție periodică cu perioada principală $T = 2\pi$. Într-adevăr numerelor reale $t_1 = t$, $t_2 = 2\pi + t$, $t_3 = 4\pi + t$ le corespund pe cercul trigonometric trei puncte suprapuse sau altfel spus unui aceluiași punct M.

Avem $f(2\pi + t) = f(4\pi + t) = f(t) = M$. Aceasta arată că funcția f este periodică.

Deducem în acest mod că și funcțiile sin și cos sunt periodice și au ca perioadă principală pe $T_0 = 2\pi$.

3.1.1. Proprietăți

1. Funcția trigonometrică *sinus este impară*, adică avem $\sin(-t) = -\sin t$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.
2. Funcția trigonometrică *cosinus este pară*, adică avem $\cos(-t) = \cos t$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.



Demonstrația rezultă imediat prin construcția simetricului punctului $M(x_M, y_M)$ față de axa Ox. Simetricul va fi un punct M' situat pe același cerc trigonometric $\mathcal{C}(0, 1)$ ca și M.

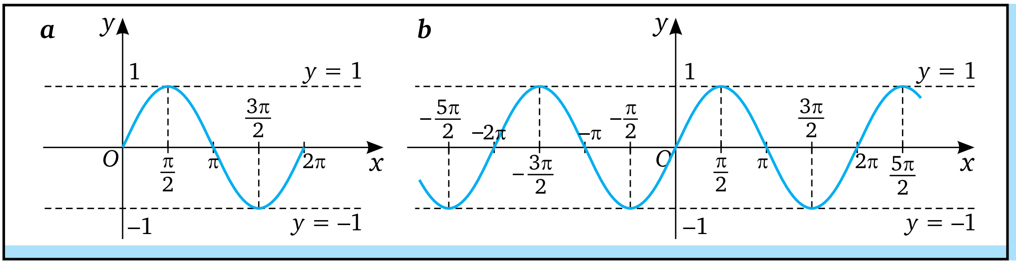
3.1.2. Graficul funcției sinus

Trasăm graficul funcției sin pentru $t \in [0, 2\pi]$, iar apoi printr-o mișcare de translație de $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ etc în ambele sensuri, de-a lungul axei absciselor se obține graficul pentru $t \in \mathbb{R}$.

Avem următorul tabel de valori:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Graficul funcției sinus este prezentat în figura ***a*** pentru $t \in [0, 2\pi]$ și în figura ***b*** pentru $t \in \mathbb{R}$.



Utilizând tabelul de valori și graficul putem desprinde câteva caracteristici ale funcției sinus:

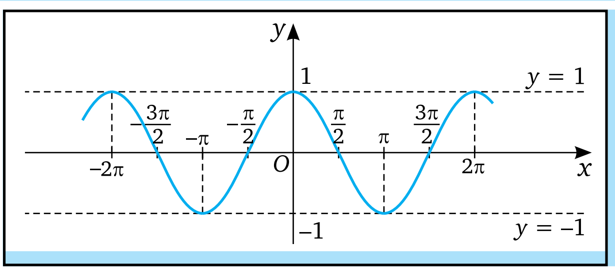
1. Funcția sin este crescătoare pe orice interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ și descrescătoare pe orice interval de forma $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Funcția sin este pozitivă pe orice interval de forma $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ și negativă pe orice interval de forma $[(2k + 1)\pi, 2(k + 1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Graficul funcției sin este simetric față de orice dreaptă de ecuație $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.1.3. Graficul funcției cosinus

Procedăm asemănător ca la funcția sinus. Avem următorul tabel de valori:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Graficul funcției cosinus este prezentat alăturat.



Utilizând tabelul de valori și graficul putem desprinde câteva **proprietăți** ale funcției cosinus:

- Funcția cos este crescătoare pe orice interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2(k + 1)\pi]$ și descrescătoare pe orice interval de forma $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funcția cos este pozitivă pe orice interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ și negativă pe orice interval de forma $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Graficul funcției cos este simetric față de orice dreaptă de forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.2. Funcția tangentă

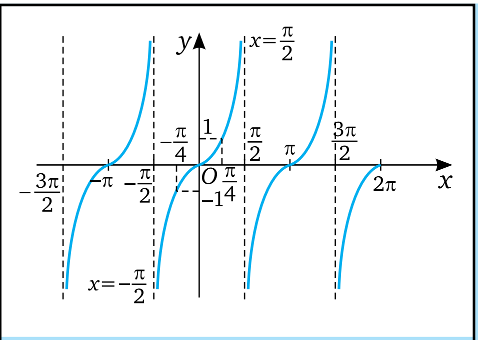
Pentru a extinde funcția tangentă trebuie să stabilim care este domeniul maxim de definiție.

Notăm cu D mulțimea valorilor t pentru care $\cos t = 0$ obținem; $D = \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Definiție

Se numește **tangentă** funcția:

$$\text{tg} : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}, \ \text{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}$$



Exercițiu rezolvat

Calculați valorile funcției tg pentru: $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{4}$; $\frac{49\pi}{6}$.

Rezolvare

$\text{tg}\,\frac{7\pi}{3} = \text{tg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$; $\text{tg}\,\frac{25\pi}{4} = \text{tg}\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$;

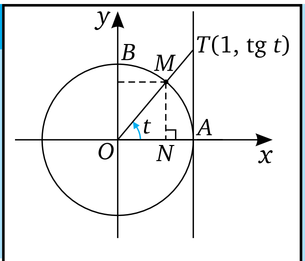
$\text{tg}\,\frac{49\pi}{6} = \text{tg}\left(8\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.2.1. Proprietățile funcției tangentă

Proprietatea 1

Fie M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător numărului $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Notăm cu T intersecția dreptei OM cu tangenta în punctul A la cercul trigonometric. Atunci punctul T are coordonatele $(1, \text{tg}\, t)$.



Demonstrație

Demonstrația se bazează pe asemănarea triunghiurilor OAT și ONM, unde N este piciorul perpendicularei duse din M pe Ox. Demonstrația este lăsată ca exercițiu.

Proprietatea 2

Funcția tangentă are perioada principală π.

Demonstrație

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $\operatorname{tg}(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, rezultă că perioada principală a funcției tg este π. Pentru a arăta că nu există o perioadă mai mică T, $T \neq 0$, procedăm astfel: presupunem că există o perioadă $T \in (0, \pi)$ pentru care are loc egalitatea $\operatorname{tg}(x+T) = \operatorname{tg} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; facem pe $x = 0$ și obținem $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow T = 0$ contrar ipotezei ($T \neq 0$).

Proprietatea 3

Funcția tangentă este funcție impară:

$$\boxed{\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Demonstrație

Avem $\operatorname{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.

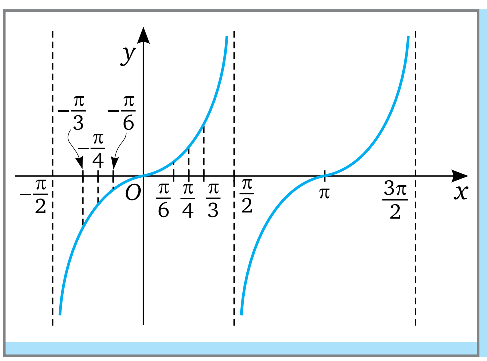
3.2.2. Graficul funcției tangentă

Întocmim graficul funcției tg pe intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\vert$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert$

Reprezentând punctele din tabel și unind consecutiv aceste puncte se obține graficul alăturat care caracterizează funcția tg astfel:

- este crescătoare pe orice interval de forma $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$;
- este pozitivă pe intervalele de forma $\left(0 + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ și negativă pe intervalele de forma $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$.
- graficul este simetric față de punctul $O(0, 0)$.



3.3. Funcția cotangentă

Notăm cu D mulțimea valorilor t pentru care $\sin t = 0$, adică $D = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Definiție

Se numește **cotangentă** funcția trigonometrică:

$$\boxed{\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R},\ \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}}$$

Exercițiu rezolvat

Determinați valorile funcției ctg pentru: $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{38\pi}{3}$.

Rezolvare

$\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 1$; $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg}\frac{38\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(12\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.3.1. Proprietățile funcției cotangentă

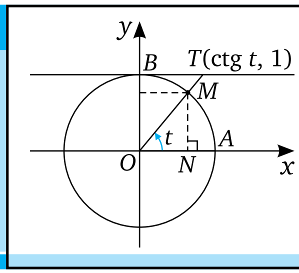
Proprietatea 1

Funcția ctg are perioada principală π.

Într-adevăr $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

Proprietatea 2

Fie M punctul de pe cercul trigonometric corespunzător numărului $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Notăm cu T intersecția dreptei OM cu tangenta în punctul $B(0, 1)$ la cercul trigonometric. Atunci coordonatele punctului T sunt $(\operatorname{ctg} t, 1)$.



Demonstrația rezultă imediat din asemănarea triunghiurilor ONM și OBT, unde N este piciorul perpendicularei duse din M pe Ox.

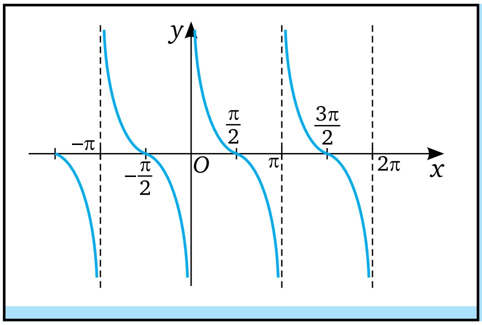
3.3.2. Graficul funcției cotangentă

Întocmim tabelul de valori ale funcției ctg pe intervalul $(0, \pi)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{ctg} x$	|	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	|

Din graficul funcției ctg prezentat în desenul alăturat deducem proprietățile:

- este descrescătoare pe orice interval de forma $(k\pi, (k+1)\pi)$;
- este pozitivă pe intervalele de forma $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ și negativă pe intervalele de forma $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Graficul funcției ctg este simetric față de orice punc $P\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exerciții propuse

1. Verificați dacă funcțiile: $f(x) = \sin x + \cos x$ și $g(x) = |\sin x|$ admit perioadă 2π.

2. Aflați perioada pentru următoarele funcții:

a) $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3}$; b) $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$; c) $f(x) = \sin\frac{3x}{4}$;

d) $f(x) = \cos\frac{2x}{5}$; e) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{4}$; f) $f(x) = |\sin|x||$.

3. Determinați perioada principală a următoarelor funcții:
a) $f(x) = a\sin(\cos x + \varphi)$, unde a și φ sunt constante nenule;
b) $f(x) = \sin 20x + \cos 30x$; c) $f(x) = \cos x - \sin x + 1$.

4. Arătați că funcția $f(x) = \sin\sqrt{x}$ nu este periodică.

5. Aflați perioada funcției $f(x) = m\sin(ax + b) - n\cos(2ax + c)$, $m, n, a, b, c \in \mathbb{R}$.

6. Studiați periodicitatea funcțiilor:
a) $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 5x$; b) $f(x) = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$.

7. Studiați paritatea funcțiilor:

a) $f(x) = 1 + \sin x$; b) $f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$; c) $f(x) = x^n \sin x$;

d) $f(x) = x^n \cos x$; e) $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+|x|\right) + 3\cos|x| + \cos\left|-\frac{x}{2}\right|$.

8. Arătați că dacă $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin a < a < \operatorname{tg} a$.

9. Determinați perioada următoarelor funcții:

a) $f(x) = a\operatorname{tg} 2x$ $(a \neq 0)$; b) $f(x) = \operatorname{ctg} 5x$; c) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

d) $f(x) = 3\operatorname{tg} 2x + 5\operatorname{ctg} 3x$; e) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$; f) $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

10. Cercetați paritatea și imparitatea următoarelor funcții:
a) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$; b) $f(x) = 4x + \operatorname{ctg} x$; c) $f(x) = x - \operatorname{ctg} x$;
d) $f(x) = x^2 + 5x^3 - 2\operatorname{tg} x$; e) $f(x) = 4\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^4 x - 3\operatorname{ctg}^2 x$; f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$.

Probleme propuse

11. Determinați minimul funcției $f(x) = \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

12. Determinați valorile extreme ale funcțiilor:
a) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$; b) $f(x) = 2\cos^2 x + \cos x + 1$;
c) $f(x) = \sin^2 x + m\sin x + n$, pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

13. Determinați minimul și maximul funcției $f(x) = 2\sin x + 3$.

14. Reprezentați grafic funcțiile:
a) $f(x) = 2\sin x$; b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x - 2$; c) $f(x) = 2\cos|x|$.

15. Determinați intervalele de monotonie și apoi reprezentați grafic funcția $f(x) = \cos 2x$.

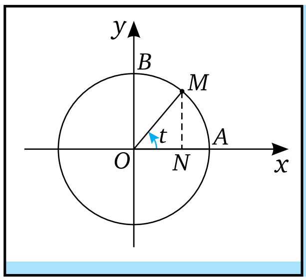
16. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
a) Calculați $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
b) Determinați funcția și reprezentați-o grafic.

4. Formule de reducere la primul cadran

Pentru orice număr real t putem găsi un număr întreg k astfel încât $t = 2k\pi + t_1$, cu $t_1 \in [0, 2\pi]$. Cu alte cuvinte, pe cercul trigonometric atât numărul t cât și numărul t_1 corespund aceluiași punct $M(\cos t_1, \sin t_1)$. Avem:

$$\sin t = \sin(t_1 + 2k\pi) = \sin t_1 \text{ și } \cos t = \cos(t_1 + 2k\pi) = \cos t_1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vrem să exprimăm o relație între sinusul și cosinusul a două unghiuri complementare.



Fie $0 < t < \frac{\pi}{2}$ și $M(t)$ punctul corespunzător pe cercul trigonometric. Avem:

$$\sin t = MN \text{ și } \cos t = ON, \text{ unde } MN \perp Ox,\ N \in Ox.$$

Fie $\frac{\pi}{2} - t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $M'\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ punctul corespunzător pe cercul trigonometric, cu $M'P \perp Ox$, $P \in Ox$. Avem:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = OP \text{ și } \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = ON' = PM', \text{ unde } M'N' \perp Ox,\ N' \in Ox.$$

Observăm că $\Delta MON \equiv \Delta OM'N'$ (I.U.). Rezultă că $MN = ON'$ și $ON = OP$, adică:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \text{ și } \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t} \qquad (1)$$

Deducem că $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \text{ctg}\, t$ și analog $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \text{tg}\, t$.

$$\boxed{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \text{ctg}\, t \text{ și } \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \text{tg}\, t} \qquad (2)$$

Formulele (1) și (2) deduse sunt valabile pentru orice $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercițiu rezolvat

Știind că $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, determinați:

a) $\cos\frac{2\pi}{5}$; b) $\text{tg}\,\frac{\pi}{10}$; c) $\text{ctg}\,\frac{2\pi}{5}\cdot\text{tg}\,\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$.

Rezolvare:

a) Avem $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}=\frac{4\pi}{10}=\frac{2\pi}{5}$. Rezultă: $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

b) Pentru a calcula $\text{tg}\,\frac{\pi}{10}$ trebuie determinată valoarea $\cos\frac{\pi}{10}$. Cum $\frac{\pi}{10} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{10} > 0$, iar din $\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\Rightarrow \text{tg}\,\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

c) $\text{ctg}\,\frac{2\pi}{5} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{10}$. Atunci $\text{ctg}\,\frac{2\pi}{5}\cdot\text{tg}\,\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10} =$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

■ Ne preocupăm în continuare de exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unui unghi din cadranul II, adică $t_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ cu ajutorul unui unghi din primul cadran.

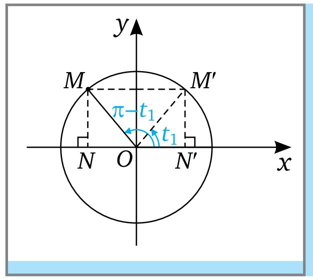
Folosind paritatea funcției cos și imparitatea celorlalte funcții trigonometrice putem scrie, pentru orice $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2}-(-t)\right] = \cos(-t) = \cos t \text{ și } \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(-t)\right] = \sin(-t) = -\sin t;$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\text{ctg}\, t. \text{ Analog } \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\text{tg}\, t.$$

În concluzie, avem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \cos t & \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\text{ctg}\, t \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\sin t; & \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\text{tg}\, t \end{array}}$$

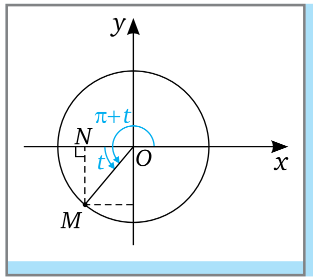


Unghiul din cadranul II se poate exprima și sub forma $t_2 = \pi - t_1$, unde $t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. În acest caz putem proceda astfel: $\sin(\pi - t_1) = \sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - t_1\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right) = \sin t_1$ sau analizând figura în care pe cercul trigonometric punctul M' este simetricul lui M față de axa Oy.

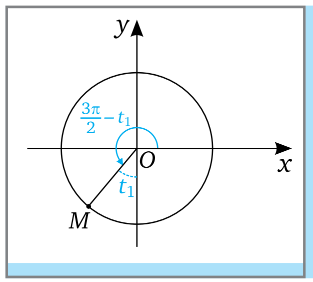
Rezultă că $y_M = y_{M'}$, adică $\sin(\pi - t_1) = \sin t_1$ și $ON = -ON'$, respectiv $\cos(\pi - t_1) = -\cos t_1$.

Se obțin și formulele

$\operatorname{tg}(\pi - t_1) = -\operatorname{tg} t_1$ și $\operatorname{ctg}(\pi - t_1) = -\operatorname{ctg} t_1$.



■ În cazul când punctul M este situat în cadranul III, $t_2 = \pi + t$, unde $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ putem folosi formulele anterioare și avem: $\sin(\pi + t) = \sin[\pi - (-t)] = \sin(-t) = -\sin t$ și analog obținem: $\cos(\pi + t) = -\cos t$, $\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t$.



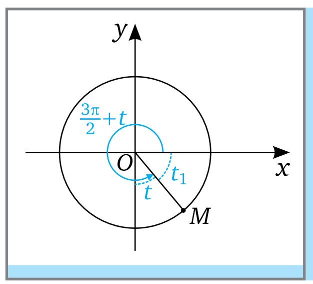
Dacă același unghi din cadranul III îl exprimăm sub forma $t_2 = \frac{3\pi}{2} - t_1$, unde $t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci avem:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t_1\right) = \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - t_1\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right) = -\cos t_1.$$

Analog, se obțin $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t_1\right) = -\sin t_1$;

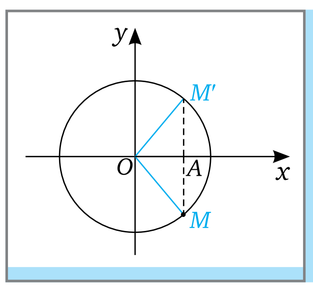
$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - t_1\right) = \operatorname{ctg} t_1$ și $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t_1\right) = \operatorname{tg} t_1$.



■ Considerăm punctul M situat în cadranul IV și avem $t_1 = \frac{3\pi}{2} + t$, cu $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Obținem:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin\left[\frac{3\pi}{2} - (-t)\right] = -\cos(-t) = -\cos t$ și analog

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$; $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{ctg} t$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{tg} t$.



Exprimând $t_2 = 2\pi - t_1$, cu $t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem formulele de reducere la primul cadran utilizând simetricul M' al punctului M față de axa Ox:

$\sin(2\pi - t_1) = -\sin t_1$ $\quad$ $\operatorname{tg}(2\pi - t_1) = -\operatorname{tg} t_1$

$\cos(2\pi - t_1) = \cos t_1$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(2\pi - t_1) = -\operatorname{ctg} t_1$

Exerciții rezolvate

1. Reduceți la primul cadran: a) sin 225°; b) tg $\frac{11\pi}{6}$; c) cos $\frac{5\pi}{6}$; d) ctg 150°.

Rezolvare

a) $\frac{225°}{360°} = \frac{a}{2\pi} \Rightarrow a = \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 225° = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\text{tg}\,\frac{11\pi}{6} = \text{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\frac{150°}{360°} = \frac{a}{2\pi} \Rightarrow a = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \text{ctg}\,\frac{5\pi}{6} = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2. Să se calculeze expresia $E = \dfrac{\sin 1470° + \text{tg}\,\frac{9\pi}{4} - \text{tg}\,377° \cdot \text{tg}\,83°}{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t - 2\cos t}$.

Rezolvare

Avem $\sin 1470° = \sin\left(4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\,\frac{9\pi}{4} = \text{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$;

$\text{tg}\,377° \cdot \text{tg}\,83° = \text{tg}\,(360° + 17°) \cdot \text{tg}\,83° = \text{tg}\,17° \cdot \text{tg}\,(90° - 17°) = \text{tg}\,17° \cdot \text{ctg}\,17° = 1$.

$(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t - 2\cos t = 1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t =$

$= 1 + \sin^2 t + \cos^2 t = 1 + 1 = 2$. Obținem $E = \dfrac{\frac{1}{2} + 1 - 1}{2} = \frac{1}{4}$.

1. Reduceți la cel mai mic argument pozitiv:

a) sin 600°; b) cos 1200°; c) tg 1125°; d) ctg $\frac{25\pi}{3}$.

2. Reduceți la cel mai mic argument pozitiv:

a) $\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$; b) cos(–675°); c) $\text{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; d) $\text{ctg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$.

3. Calculați expresiile:

a) $E = 2\sin^2\frac{17\pi}{4} + \text{tg}^2\,\frac{33\pi}{4} \cdot \text{ctg}\,\frac{3\pi}{4}$;

b) $E = \dfrac{\sin(-212°)\cdot\cos 302° + \cos^3(-148°)}{\sin(-58°)\cdot\cos(-32°) + \sin 392°\cdot\sin(-148°) - \sin 58°\cdot\sin 148°}$.

4. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: $E = \dfrac{\cos^3(-x) + \sin^3(-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

5. Arătați că au loc următoarele egalități:

a) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\cos(2\pi - \alpha)\cdot\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\sin(2\pi - \alpha)\cdot\cos(\pi + \alpha)\cdot\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = 1$;

Probleme propuse

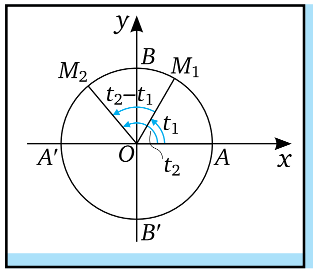
b) $$\dfrac{\dfrac{\cos(90^\circ-\alpha)+1}{\sin(90^\circ+\alpha)}-\dfrac{\sin(90^\circ+\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}}{\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)+1}{\cos(360^\circ-\alpha)}+\dfrac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)+1}}=\sin\alpha;$$

c) $\sin^2(\pi-\alpha)\,[1-\text{ctg}^2(\pi-\alpha)]+\cos^2(\pi-\alpha)[1-\text{tg}^2(\pi-\alpha)]=0;$

d) $$\frac{\text{tg}(180^\circ-\alpha)-\sec(360^\circ-\alpha)+1}{\text{tg}(360^\circ+\alpha)-\sec(360^\circ+\alpha)-1}+\frac{\text{ctg}(360^\circ+\alpha)-\text{cosec}(360^\circ+\alpha)+1}{\text{ctg}(180^\circ+\alpha)-\text{cosec}(360^\circ-\alpha)-1}=0;$$

e) $$\frac{\text{tg}(\pi+\alpha)+\sec(2\pi-\alpha)-1}{\text{tg}(2\pi+\alpha)-\sec(2\pi+\alpha)-1}\cdot\frac{\text{ctg}(2\pi+\alpha)+\text{cosec}(2\pi+\alpha)-1}{\text{ctg}(\pi+\alpha)-\text{cosec}(2\pi-\alpha)-1}=1.$$

5. Formule trigonometrice (pentru sume, diferențe)



Considerăm numerele $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, $t_1 < t_2$ cărora pe cercul trigonometric le corespund punctele $M_1(\cos t_1, \sin t_1)$, respectiv $M_2(\cos t_2, \sin t_2)$.

Fie numărul $t = t_2 - t_1 \in [0, 2\pi]$ care corespunde pe cercul trigonometric punctului $M(\cos t, \sin t)$.

Avem $\overset{\frown}{AM} \equiv \overset{\frown}{M_1M_2} \Rightarrow [AM] \equiv [M_1M_2] \Rightarrow AM^2 = M_1M_2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1-\cos t)^2 + (0-\sin t)^2 = (\cos t_1 - \cos t_2)^2 +$
$+ (\sin t_1 - \sin t_2)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t =$
$= \cos^2 t_1 - 2\cos t_1 \cos t_2 + \cos^2 t_2 + \sin^2 t_1 - 2\sin t_1 \sin t_2 + \sin^2 t_2.$

Folosind formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ obținem $2 - 2\cos t = 2 - 2\cos t_1 \cos t_2 - 2\sin t_1 \sin t_2$ $\Leftrightarrow \cos t = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2$.

Funcția cos fiind pară putem scrie $\cos(t_2 - t_1) = \cos(t_1 - t_2)$ ceea ce înseamnă că formula găsită este adevărată și pentru $t_1 > t_2$.

Am obținut formula $\cos(t_1 - t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2$.

Fie acum a și b două numere reale oarecare. Scriem aceste numere sub forma $a = 2k\pi + t_1$ și $b = 2n\pi + t_2$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $a + b = 2(k+n)\pi + (t_1 + t_2)$ și $\cos(a+b) = \cos[2(k+n)\pi + (t_1+t_2)] = \cos(t_1+t_2)$, $\sin a = \sin(2k\pi + t_1) = \sin t_1$ și analog $\sin b = \sin t_2$, $\cos a = \cos t_1$, $\cos b = \cos t_2$. Este verificată formula:

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b} \qquad (1)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Punând $a = b$ obținem formula fundamentală $\cos 0 = 1 = \cos^2 a + \sin^2 a$.

În formula (1) punând în locul lui b pe $-b$ și ținând seama de paritatea funcțiilor sin și cos obținem:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b} \qquad (2)$$

Se pot verifica unele dintre formulele de reducere la primul cardran.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x.$

În vederea determinării unei formule pentru $\sin(a+b)$ pornim de la formula
$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right] = \sin(a+b)$, dar $\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right] =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b,} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Schimbând în formulă pe b cu $-b$ obținem:

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b,} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Formula pentru $\operatorname{tg}(a+b)$ se deduce imediat cu condiția $\cos(a+b) \neq 0$.

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b}$ se simplifică prin $\cos a \cdot \cos b$ și obținem

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\frac{\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{1-\frac{\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}} \qquad (5)$$

Ținând seama de faptul că funcția tg este impară putem scrie:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}[a+(-b)] = \frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}(-b)}, \text{ adică } \boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}} \qquad (6)$$

Se deduc în mod asemănător formule pentru $\operatorname{ctg}(a+b)$ și $\operatorname{ctg}(a-b)$ în condițiile $\sin(a\pm b)\neq 0$.

$$\boxed{\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{\operatorname{ctg}a\cdot\operatorname{ctg}b-1}{\operatorname{ctg}a+\operatorname{ctg}b}} \quad (7) \qquad \boxed{\operatorname{ctg}(a-b) = \frac{\operatorname{ctg}a\cdot\operatorname{ctg}b+1}{\operatorname{ctg}b-\operatorname{ctg}a}} \quad (8)$$

Exerciții rezolvate

1. Calculați: a) $\sin 75°$; b) $\cos 105°$; c) $\operatorname{tg} 15°$.

Rezolvare

a) $\frac{75°}{360°} = \frac{t}{2\pi} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{12}$. Avem $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;

b) $\cos 105° = \cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;

c) $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45°-30°) = \frac{\operatorname{tg}45°-\operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2.$

2. Calculați cos $(a + b)$ și cos $(a - b)$, știind că

$\sin a = -\dfrac{8}{17}$ și $\cos b = \dfrac{24}{25}$, $a \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $b \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Rezolvare

Ținând seama că $a \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $b \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, deducem $\cos a = -\sqrt{1-\dfrac{8^2}{17^2}} = -\dfrac{15}{17}$,

$\sin b = -\sqrt{1-\dfrac{24^2}{25^2}} = -\dfrac{7}{25}$, deci: $\cos(a+b) = \left(-\dfrac{15}{17}\right)\dfrac{24}{25}\cdot - \left(-\dfrac{8}{17}\right)\left(-\dfrac{7}{25}\right)\cdot = -\dfrac{416}{425}$,

$\cos(a-b) = \left(-\dfrac{15}{17}\right)\dfrac{24}{25}\cdot + \left(-\dfrac{8}{17}\right)\left(-\dfrac{7}{25}\right)\cdot = -\dfrac{304}{425}$.

3. Dacă $\sin a = \dfrac{1}{4}$, $\cos b = \dfrac{1}{6}$, $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci calculați

$\sin(a \pm b)$ și $\operatorname{tg}(a \pm b)$.

Rezolvare

Avem $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\sqrt{1-\dfrac{1}{16}} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin b = -\sqrt{1-\cos^2 b} =$

$= -\sqrt{1-\dfrac{1}{36}} = -\dfrac{\sqrt{35}}{6}$. Deci $\sin(a \pm b) = \dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{6}\cdot \pm \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{35}}{6}\right)\cdot = \dfrac{1 \pm 5\sqrt{21}}{24}$.

$\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = -\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ și $\operatorname{tg} b = -\sqrt{35}$, deci

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \pm (-\sqrt{35})}{1 \mp \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\cdot(-\sqrt{35})} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \pm (-\sqrt{35})}{1 \mp \frac{5\sqrt{21}}{15}} = \frac{-(\sqrt{15} \pm 15\sqrt{35})}{5(3 \mp \sqrt{21})}.$$

4. Calculați: $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$ știind că $a = \dfrac{7\pi}{12}$.

Rezolvare

Avem $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

$\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{12} = \frac{\cos\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \frac{-1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2.$$

5. Calculați: sin a, cos a, tg a, ctg a știind că $a = \frac{\pi}{12}$.

Rezolvare

Avem:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3};\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

6. Știind că tg $a = \frac{1}{2}$, tg $b = \frac{1}{3}$, tg $c = 2-\sqrt{3}$, calculați tg $(a+b+c)$ și deduceți de aici valoarea sumei $a+b+c$.

Rezolvare

Avem: $$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg}(a+b)+\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}(a+b)\cdot\operatorname{tg}c} = \frac{\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}+\operatorname{tg}c}{1-\frac{(\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b)}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}\cdot\operatorname{tg}c} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b\cdot\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}b\cdot\operatorname{tg}c}.$$

Deci $$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+2-\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{6}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{2-\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Având în vedere că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ rezultă că $a+b+c = \frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

7. Arătați că $\operatorname{tg}^2 27° + 2\operatorname{tg}27°\cdot\operatorname{tg}36° = 1$.

Rezolvare

Avem tg 63° · tg 27° = 1 sau tg (27° + 36°) · tg 27° = 1 sau

$$\frac{(\operatorname{tg}27°+\operatorname{tg}36°)\cdot\operatorname{tg}27°}{1-\operatorname{tg}27°\cdot\operatorname{tg}36°} = 1,$$ de unde rezultă egalitatea din enunț.

8. Arătați că: $\frac{\operatorname{ctg}20°-\operatorname{ctg}30°}{\operatorname{ctg}30°-\operatorname{ctg}40°} = 2\cos 30°$.

Rezolvare

Ținând seama că $\operatorname{ctg}a-\operatorname{ctg}b = \frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a\cdot\sin b}$, membrul stâng al egalității se poate scrie succesiv:

$$\frac{\operatorname{ctg}20°-\operatorname{ctg}30°}{\operatorname{ctg}30°-\operatorname{ctg}40°} = \frac{\sin(30°-20°)}{\sin30°\cdot\sin20°}\cdot\frac{\sin40°\cdot\sin30°}{\sin(40°-30°)} = \frac{\sin40°}{\sin20°} =$$

$$= \frac{\sin(20°+20°)}{\sin20°} = \frac{2\sin20°\cdot\cos20°}{\sin20°} = 2\cos20°.$$

9. Arătați că:

a) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\mathrm{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x,\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

b) $\dfrac{\mathrm{tg}(a+b) - \mathrm{tg}\, b}{1 + \mathrm{tg}\cdot \mathrm{tg}(a+b)} + \dfrac{\mathrm{tg}\, b + \mathrm{tg}(a-b)}{1 - \mathrm{tg}\, b \cdot \mathrm{tg}(a-b)} = 2\mathrm{tg}\, a.$

c) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}} = 2\mathrm{tg}\, a,\ a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

Rezolvare

a) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\mathrm{tg}^2 x - 1} = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)} =$

$= \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x;$

b) $\dfrac{\mathrm{tg}(a+b) - \mathrm{tg}\, b}{1 + \mathrm{tg}\, b \cdot \mathrm{tg}(a+b)} + \dfrac{\mathrm{tg}\, b + \mathrm{tg}(a-b)}{1 - \mathrm{tg}\, b \cdot \mathrm{tg}(a-b)} = \dfrac{\dfrac{\sin a}{\cos(a+b)\cdot\cos b}}{1 + \mathrm{tg}\, b \cdot \mathrm{tg}(a+b)} + \dfrac{\dfrac{\sin a}{\cos b \cdot \cos(a-b)}}{1 - \mathrm{tg}\, b \cdot \mathrm{tg}(a-b)} =$

$= \dfrac{\sin a}{\cos b}\left[\dfrac{\dfrac{1}{\cos(a+b)}}{\dfrac{\cos b \cdot \cos(a+b) + \sin b \cdot \sin(a+b)}{\cos b \cdot \cos(a+b)}} + \dfrac{\dfrac{1}{\cos(a-b)}}{\dfrac{\cos b \cdot \cos(a-b) - \sin b \cdot \sin(a-b)}{\cos b \cdot \cos(a-b)}}\right] =$

$= \sin a\left(\dfrac{1}{\cos a} + \dfrac{1}{\cos a}\right) = 2\ \dfrac{\sin a}{\cos a}\cdot = 2\mathrm{tg}\, a.$

c) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)}} = \sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}} =$

$= \dfrac{1+\sin a - 1 + \sin a}{\cos a} = 2\mathrm{tg}\, a,\ \forall\, a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

Exerciții propuse

1. Se dau $\cos a = \dfrac{3}{5}$ și $\sin b = \dfrac{12}{13}$, $a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Calculați $\cos(a - b)$ și $\sin(a + b)$.

2. Se dau $\cos a = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ și $\cos b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $a - b = \dfrac{\pi}{6}$.

3. Dacă $\mathrm{tg}\, a = \dfrac{3}{4}$ și $\mathrm{tg}\, b = \dfrac{5}{12}$, calculați $\mathrm{tg}(a - b)$ și $\mathrm{ctg}(a + b)$.

4. Calculați suma $a + b$, știind că $\mathrm{tg}\, a = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ și $\mathrm{tg}\, b = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$.

5. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{3}+a\right) - \text{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$; b) $E = \frac{\sin(a+b)-2\sin b\cdot\cos a}{\cos(a+b)+2\sin a\cdot\sin b}$;

c) $E = \frac{\cos(a+b)+2\sin a\cdot\cos b}{\sin(a+b)-2\sin b\cdot\sin a}$; d) $E = \frac{\cos(30°+a)\cdot\cos(30°-a)}{\sin(30°+a)-\sin(30°-a)}$.

6. Arătați că oricare ar fi numerele reale x și y avem:

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \sin x$;

b) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cdot\cos y$.

7. Arătați că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{Z}$ avem:

a) $\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right] = (-1)^k\cdot\cos x$;

b) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right] = (-1)^{k+1}\cdot\sin x$.

8. Arătați că dacă $2\sin(b+c-a) = \sin(a+b-c) + \sin(a+c-b)$, atunci $2\,\text{tg}\,a = \text{tg}\,b + \text{tg}\,c$.

9. Dacă $2\,\text{tg}\,x = 3\,\text{tg}\,y$, verificați dacă $\text{tg}(x-y) = \frac{\text{tg}\,y}{2+3\,\text{tg}^2 y}$.

10. Fie $\text{tg}\,a$ și $\text{tg}\,b$ rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$.
Calculați în funcție de p și q valoarea expresiei:
$E = \sin^2(a+b) + p\cdot\sin(a+b)\cdot\cos(a+b) + q\cdot\cos^2(a+b)$.

11. Arătați că expresia: $E = \frac{\sin(a+b)\cdot\cos a-\sin a\cdot\cos(a+b)}{\cos(a+b)\cdot\cos a+\sin a\cdot\sin(a+b)}$ nu depinde de a.

12. Dacă $x + y + z = \pi$, verificați relația:
$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z = 1$.

13. Arătați că dacă $x + y + z = \frac{\pi}{3}$, atunci

$\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z = \sum\cos x\cdot\sin y\cdot\sin z$ este constant.

14. Arătați că expresia $E = \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\left(60°-\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(120°-\frac{x}{2}\right)$ este

independentă de x.

15. Arătați că $\text{tg}\,x + \text{tg}\,y = \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$.

Deduceți de aici valoarea pentru $\text{tg}\,9° + \text{tg}\,81°$; $\text{tg}\,27° + \text{tg}\,63°$, apoi calculați fără tabele expresia $E = \text{tg}\,9° - \text{tg}\,27° - \text{tg}\,63° + \text{tg}\,81°$.

Exerciții propuse

6. Formule trigonometrice pentru dublul unui număr

Dacă în formulele trigonometrice (2) și (3) punem condiția $a = b$ se obțin formule pentru dublul unui număr.

$\cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a \Leftrightarrow$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1} \quad (9)$$

$\sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a \Leftrightarrow$

$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cos a} \quad (10)$$

Analog obținem $\boxed{\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}}$ (11) și $\boxed{\operatorname{ctg} 2a = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2\operatorname{ctg} a}}$ (12)

Exercițiu rezolvat

Calculați $\cos 15°$.

Rezolvare

Se știe valoarea $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \cos^2 15° - 1 \Leftrightarrow \cos^2 15° = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ și cum $15° \in (0, 90°)$ adică în cadranul I, unde $\cos t > 0$, rezultă $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Din formula $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ se obține

$\boxed{\sin a = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2a}{2}}}$ (13) și $\boxed{\cos a = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}}}$ (14)

în fața radicalului se stabilește semnul în funcție de cadranul în care se află punctul M de pe cercul trigonometric $\mathcal{C}(0, 1)$ corespunzător numărului a.

Exercițiu rezolvat

Calculați $\sin 7°30'$.

Rezolvare

Avem $7°\,30' \in (0, 90°)$ rezultă $\sin 7°30' = \sqrt{\dfrac{1-\cos 15°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$.

Folosind formulele de mai sus se pot deduce formule pentru triplul unui număr.

Exemplu:

Exprimăm $\sin 3x$ în funcție de $\sin x$.

Scriem: $\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x\,(1 - 2\sin^2 x) +$
$+ 2\cos^2 x \sin x = \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

În concluzie, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

7. Formule pentru $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Avem șirul de egalități: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

Prin urmare s-a demonstrat formula:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}} \qquad (15)$$

Exercițiu rezolvat

Calculați $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Rezolvare

Utilizând formula (15) avem $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{12}}{1+\cos 2\cdot\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=2-\sqrt{3}$.

Pornind de la formula $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ rezultă $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\Leftrightarrow 1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1$, dar $2\cos^2\frac{x}{2}-1=\cos x$

și atunci

$$\boxed{\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} \qquad (16)$$

În mod asemănător pornind de la $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ în care folosind $\sin\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ (se obține $\sin x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$ și apoi înlocuim $\cos^2\frac{x}{2}$ cu $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

se obține

$$\boxed{\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} \qquad (17)$$

Exerciții rezolvate

1. Știind $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$, determinați sin x și cos x.

Rezolvare:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{5},\ \cos x = \frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{4}{5};$$

2. Știind că $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{6}$ determinați valoarea expresiei $E = 3\sin x + \cos^2 x - \sin 2x$.

Rezolvare:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 6 \Rightarrow \sin x = \frac{2\cdot 6}{1+36} = \frac{12}{37},\ \cos x = \frac{1-36}{1+36} = -\frac{35}{37}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{35^2}{37^2},\ \sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{12}{37}\cdot\left(-\frac{35}{37}\right) = -\frac{840}{37^2}$$

$$E = \frac{36}{37} + \frac{1225}{37^2} - \frac{840}{37^2} = \frac{1717}{1369}.$$

3. Calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului $2a$ știind că

$\sin a = \frac{7}{25},\ a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Rezolvare

Avem că $\cos a = -\sqrt{1-\frac{7^2}{25^2}} = -\frac{24}{25}$, deci $\operatorname{tg} a = -\frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} a = -\frac{24}{7}$.

Cu aceste valori, obținem $\sin 2a = 2\sin a\cos a = -\frac{336}{625}$, $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{527}{625}$,

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\frac{336}{527},\quad \operatorname{ctg} 2a = \frac{1}{\operatorname{tg} 2a} = -\frac{527}{336}.$$

4. Determinați funcțiile trigonometrice ale unghiului $4a$ știind că $\operatorname{tg} a = 2$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rezolvare

Din $\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \Rightarrow \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \operatorname{tg}^2 a \Rightarrow \frac{\sin^2 a+\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{1} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a}$ și

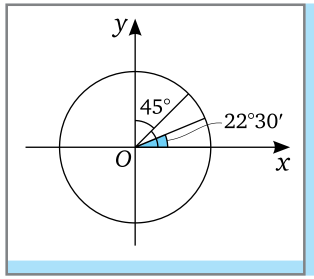
deducem $\cos a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Cum $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ și $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$,

deducem $\sin 2a = \frac{4}{5}$ și $\cos 2a = -\frac{3}{5}$. Înlocuind a cu $2a$ rezultă $\sin 4a = 2\sin 2a\cdot\cos 2a$

și $\cos 4a = \cos^2 2a - \sin^2 2a$, deci $\sin 4a = -\frac{24}{25}$, $\cos 4a = -\frac{7}{25}$.

5. Calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului de 22°30′.

Rezolvare



Avem $\sin 22°30' = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Analog găsim $\cos 22°30' = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

$\text{tg } 22°30' = \sqrt{2} - 1$, $\text{ctg } 22°\,30' = \sqrt{2} + 1$.

6. Pentru $\cos a = -\frac{527}{625}$ și $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului $\frac{a}{4}$.

Rezolvare

Ținând seama că $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, rezultă că $\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \frac{3\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{4} < \frac{a}{4} < \frac{3\pi}{8}$, deci unghiul $\frac{a}{2}$ aparține cadranului II, iar unghiul $\frac{a}{4}$ aparține cadranului I.

Avem: $\cos\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{527}{625}}{2}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = -\frac{7}{25}$.

De aici rezultă că: $\sin\frac{a}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{a}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

7. Calculați expresia $\frac{\text{tg } a - \sin a}{\text{tg } a + \sin a}$, știind că $\text{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$.

Rezolvare

Avem $\sin a = \frac{2\,\text{tg}\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, $\text{tg } a = \frac{2\,\text{tg}\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Deci $\frac{\text{tg } a - \sin a}{\text{tg } a + \sin a} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$.

8. Arătați că $\sin 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \frac{1}{8}$.

Rezolvare

Avem:

$$8\sin 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \frac{4\sin 20° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°}{\cos 10°} = \frac{2\sin 40° \cdot \cos 40°}{\cos 10°} =$$

$$= \frac{\sin 80°}{\cos 10°} = 1, \text{ deci } \sin 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \frac{1}{8}.$$

9. Demonstrați egalitatea: $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Rezolvare

$$\cos^4\frac{\pi}{8} = \left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{8},$$

$$\cos^4\frac{3\pi}{8} = \left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{8},$$

$$\cos^4\frac{5\pi}{8} = \left(\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{8},$$

$$\cos^4\frac{7\pi}{8} = \left(\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{8}.$$

Deci, $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = 2\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{8} + 2\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{2}$.

10. Calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, dacă $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Rezolvare

$(\sin a - \cos a)^2 = 2(\sin^2 a + \cos^2 a) - (\sin a + \cos a)^2 = 2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, deci

$|\sin a - \cos a| = \frac{1}{2}$. Dar $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ și deci $\cos a > \sin a$.

Rezultă $|\sin a - \cos a| = -(\sin a - \cos a) = \frac{1}{2}$.

Aven sistemul: $\cos a + \sin a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ și $\cos a - \sin a = \frac{1}{2}$ care rezolvat dă

$\cos a = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$ și $\sin a = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$.

Prin urmare, $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{1-\frac{\sqrt{7}+1}{4}}{\frac{\sqrt{7}-1}{4}} = \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$.

11. Arătați că dacă A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, atunci

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

Rezolvare

Cum A, B, C sunt măsurile unghiurilor unui triunghi, avem: $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow \frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$ sau

$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$, de unde $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$.

12. Arătați că $16 \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = 1$.

Rezolvare

Înmulțind relația din enunț cu $\sin 20°$, obținem:

$8\sin 40° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \sin 20° \Leftrightarrow 4\sin 80° \cdot \cos 80° \cdot \cos 60° =$

$= \sin 20° \Leftrightarrow 2\sin 160° \cdot \frac{1}{2} = \sin 20° \Leftrightarrow \sin 160° = \sin 20°$

$\Leftrightarrow \sin(180° - 160°) = \sin 20°$. Așadar, relația din enunț este adevărată.

Exerciții propuse

1. Știind că $\operatorname{tg} a = \frac{4}{5}$, calculați expresia $E = 4 \sin 2a + 5 \cos 2a$.

2. Știind că $\operatorname{tg} a = 3$, calculați $\cos 4a$.

3. Se dă $\cos a = \frac{4}{5}$. Calculați $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{ctg} 2a$.

4. Se dă $\sin a = \frac{3}{10}$. Calculați $\sin 3a$.

5. Se dă $\sin 2a = \frac{24}{25}$. Calculați $\sin a$.

6. Pentru $\operatorname{tg} a = 1 - \sqrt{2}$ dat, calculați $\sin 2a$, $\cos 2a$ și $\operatorname{tg} 2a$.

7. Verificați identitățile:

a) $\dfrac{\sin 3a + \sin^3 a}{\cos 3a - \cos^3 a} = -\operatorname{ctg} a$; b) $\dfrac{1+\sin 2a}{1+\cos 2a} = \dfrac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} a)^2$; c) $1 + \cos 2a = \dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2 a}$.

8. Arătați că dacă $A + B + C = \pi$ și $\dfrac{\sin A + \sin C}{2} = \sin B$, atunci $3\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = 1$.

9. Verificați identitatea: $\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} 2a - \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} 3a - \operatorname{ctg} 2a \cdot \operatorname{ctg} 3a = 1$.

10. Arătați că nu există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{\operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg} a} \leq 3$.

11. Verificați identitatea $\sin 3a \cdot \sin^3 a + \cos 3a \cdot \cos^3 a = \cos^3 2a$.

12. Eliminați α între următoarele relații:

a) $x = a \cos \alpha \cdot \cos 3\alpha$ și $y = b \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha$;

b) $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ și $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} \alpha = b$.

13. Arătați că $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = \sin 2a$, $x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

14. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $|x| > |y|$, iar $\operatorname{tg} u = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$, $\cos 2v = \sqrt{\dfrac{x+y}{2x}}$, stabiliți o relație între u și v.

15. Se dă $\operatorname{tg} x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Calculați expresia:

$E = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + \sin 2x + \cos 4x.$

16. Exprimați $E = \sqrt{\frac{5 + 3\sin a + 4\cos a}{2 - 2\cos a}}$ în funcție de $x = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

17. Determinați mulțimea valorilor funcției f definită pe $[-\pi, \pi]$, dată prin $f(x) = \cos 2x + (5 - a^2)\sin x + a^2$, unde a este un număr real.

18. Arătați că $\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

19. Știind că $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

20. Știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$, calculați expresia $E = m\sin \alpha + n\cos \alpha$.

21. Calculați funcțiile trigonometrice ale unghiului de măsură 15°, știind că

$\sin 30° = \frac{1}{2}$.

22. Exprimați $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right)$ în funcție de $\operatorname{tg} a$ și discutați formula obținută după cum unghiul a este situat în unul din cele patru cadrane.

23. Arătați fără tabele că $E = \frac{\sqrt{1 + \sin 20°} + \sqrt{1 - \sin 20°}}{\sqrt{1 + \sin 20°} - \sqrt{1 - \sin 20°}} = \operatorname{ctg} 10°$.

24. Arătați că expresia $E = \dfrac{\dfrac{\cos a}{1 - \sin a} - \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}}{1 + \dfrac{\cos a \cdot \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}}{1 - \sin a}}$ nu depinde de a.

25. Calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, știind că $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

26. Arătați că:

$$E = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}}\right) =$$

$$= \frac{1}{14}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{12}}\right) = 1.$$

27. Verificați identitatea: $\dfrac{\sin a}{1 + \cos a} \cdot \dfrac{\cos\frac{a}{2}}{1 + \cos\frac{a}{2}} \cdot \dfrac{\cos\frac{a}{4}}{1 + \cos\frac{a}{4}} \cdot \dfrac{\cos\frac{a}{8}}{1 + \cos\frac{a}{8}} = \operatorname{tg}\dfrac{a}{16}$.

Exerciții propuse

8. Formule pentru transformarea sumei în produs

În multe situații suntem nevoiți să transformăm o sumă sau diferență de două funcții trigonometrice în produs.

Pentru a găsi o astfel de formulă putem proceda astfel:

Scriem formulele (3) și (4):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

care prin adunare dau $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y$

Notăm $x + y = a$ și $x - y = b$, rezultă $x = \frac{a+b}{2}$ și $y = \frac{a-b}{2}$.

Am obținut astfel formula

$$\boxed{\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} \quad (18)$$

Prin scăderea formulelor (3) și (4) se obține:

$$\boxed{\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}} \quad (19)$$

Exercițiu rezolvat

Scrieți sub formă de produs: a) $\sin 75° + \sin 15°$; b) $\sin 105° + \sin 15°$.

Rezolvare

a) $\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45° \cos 30° = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

b) $\sin 105° - \sin 15° = 2\sin\frac{105°-15°}{2}\cos\frac{105°+15°}{2} = 2\sin 45° \cos 60° =$

$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Adunând membru cu membru egalitățile:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (*)$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (**)$$

obținem $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y \Leftrightarrow$

$$\boxed{\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} \quad (20)$$

Scăzând din (**) pe (*) avem:

$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y$ echivalent cu forma:

$$\boxed{\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}} \quad (21)$$

Exercițiu rezolvat

Transformați în produs: a) $\cos\frac{\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24}$; b) $\cos\frac{15\pi}{32} - \cos\frac{9\pi}{32}$.

Rezolvare

a) $\cos\frac{\pi}{24} + \cos\frac{7\pi}{24} = 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{24}+\frac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{\pi}{24}-\frac{7\pi}{24}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8}$;

b) $\cos\frac{15\pi}{32} - \cos\frac{9\pi}{32} = -2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{15\pi}{32}+\frac{9\pi}{32}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{15\pi}{32}-\frac{9\pi}{32}\right) = -2\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$.

Pentru funcțiile tg și ctg calculele sunt mai simple:

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$ și analog

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$;

$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y} =$ și $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}$.

Exercițiu rezolvat

Transformați în produs: a) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}$; b) $\operatorname{ctg}18 - \operatorname{ctg}24$.

Rezolvare

a) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{19\pi}{6} = \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{19\pi}{6}\right)}{\cos\frac{11\pi}{6}\cos\frac{19\pi}{6}} = \frac{\sin 5\pi}{\cos\frac{11\pi}{6}\cos\frac{19\pi}{6}} = \frac{\sin 5\pi}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{7\pi}{6}}$;

b) $\operatorname{ctg}18 - \operatorname{ctg}24 = \frac{\sin 6}{\sin 18\sin 24}$.

9. Formule pentru transformarea produselor de funcții trigonometrice în sume sau diferențe

Din scrierea $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ obținută anterior (la demonstrarea formulei 15) se obține formula de transformare a produsului $\sin x\cos y$ în semisuma sinusurilor de sumă și diferență:

$$\boxed{\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]} \qquad (22)$$

Analog avem:

$$\boxed{\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]} \qquad (23)$$

$$\boxed{\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]} \qquad (24)$$

Exerciții rezolvate

1. Calculați: a) $8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$; b) $\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}$.

Rezolvare

a) Notăm $n = 8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$ și înmulțim ambii membri cu $\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$.

Avem $n\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cdot 4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} \Leftrightarrow n\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}\cdot 4\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}$

$\Leftrightarrow n\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{3\pi}{7} \Leftrightarrow n\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{3\pi}{7}$.

Dar $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$ și atunci $n\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{6\pi}{7}$. Avem $\sin\frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{7}$.

$n\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}$ și cum $\frac{\pi}{7} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă – $\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$ și atunci $n = 1$.

b) se procedează analog: notăm $m = \sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}$ pe care o înmulțim cu $\cos\frac{\pi}{14}$

$\left(\cos\frac{\pi}{14} \neq 0\right)$;

$m\cos\frac{\pi}{14} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14} \Leftrightarrow$

$m\cos\frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14} \Leftrightarrow m\cos\frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}\sin\frac{4x}{14}\sin\frac{3\pi}{14} \Leftrightarrow$

$m\cos\frac{\pi}{14} = \frac{1}{8}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{14} - \frac{3\pi}{14}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{14} + \frac{3\pi}{14}\right)\right] \Leftrightarrow m\cos\frac{\pi}{14} = \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{14} \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}$.

2. Verificați identitățile următoare (pe domeniul lor de definiție):

a) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$; b) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ct} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}$; c) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y}$.

Rezolvare

a) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$ se înmulțește cu $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$ care este nenulă și avem:

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{ctg} y =$
$= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ (A)
Procedăm analog la b) și la c)

b) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y\ (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{tg} y =$
$= \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$ (A)

c) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y\ (\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{tg} y =$
$= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y$ (A)

3. Rezolvați sumele transformând în produse:

a) $\sin 45° + \sin 15°$; b) $\sin\frac{7\pi}{24} - \sin\frac{\pi}{24}$; c) $\cos 60° + \cos 30°$; d) $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}$;

e) $\operatorname{tg} 105° - \operatorname{tg} 75°$; f) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; g) $\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15}$; h) $\cos 20°\cdot\cos 40°$.

Rezolvare

a) $\sin 45° + \sin 15° = 2\sin\frac{60°}{2}\cdot\cos\frac{30°}{2} = 2\sin 30°\cdot\cos 15° = 2\frac{1}{2}\cdot\cos 15° = \cos 15°$.

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\cdot\sin 30° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Deci $\sin 45° + \sin 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) $\sin\frac{7\pi}{24} - \sin\frac{\pi}{24} = 2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

c) $\cos 60° + \cos 30° = 2\cos 45°\cdot\cos 15° = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$;

d) $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} = -2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{12} = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$. Dar $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;

e) $\operatorname{tg} 105° - \operatorname{tg} 75° = \frac{\sin(105°-75°)}{\cos 105°\cdot\cos 75°} = \frac{\sin 30°}{\cos 105°\cdot\cos 75°} = \frac{1}{2\cos 105°\cdot\cos 75°}$;

f) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} =$

$= \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{5}-\frac{3\pi}{10}\right)}{\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{10}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{5}}$;

g) $\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{\pi}{15} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{30}-\frac{\pi}{15}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{30}+\frac{\pi}{15}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{10}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{3\pi}{10}\right)$;

h) $\cos 20°\cdot\cos 40° = \frac{1}{2}[\cos(20° + 40°) + \cos(40° - 20°)] =$

$= \frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 20°) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos 20°\right)$.

4. Calculați: a) $\dfrac{\sin\frac{125\pi}{12}+\cos\frac{125\pi}{12}}{\sin\frac{125\pi}{12}-\cos\frac{125\pi}{12}}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}}{\cos\frac{25\pi}{12}-\sin\frac{25\pi}{12}}$.

Rezolvare

a) $\dfrac{\sin\frac{125\pi}{12}+\cos\frac{125\pi}{12}}{\sin\frac{125\pi}{12}-\cos\frac{125\pi}{12}} = \dfrac{\sin\left(10\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(10\pi+\frac{5\pi}{12}\right)}{\sin\left(10\pi+\frac{5\pi}{12}\right)-\cos\left(10\pi+\frac{5\pi}{12}\right)} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}} =$

$= \dfrac{\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}$.

b) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{13\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}}{\cos\frac{25\pi}{12}-\sin\frac{25\pi}{12}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}}}{2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\pi 6} = 4\sqrt{2}.$$

5. Scrieți sub formă de produse:

a) $E_1 = \sin x + 2\sin 3x + \sin 5x$; b) $E_2 = \sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x$;

c) $E_3 = \sin x + \sin y + \sin x - \sin(x + y + z)$;

d) $E_4 = \sin (x - y) + \sin(y - z) + \sin (z - x)$.

Rezolvare

a) $E_1 = (\sin x + \sin 5x) + 2 \sin 3x = 2 \sin 3x \cdot \cos 2x + 2 \sin 3x =$
$= 2 \sin 3x\ (1 + \cos 2x) = 2 \sin 3x \cdot 2 \cos^2 x = 4 \sin 4x \cdot \cos^2 x$;

b) $E_2 = (\sin x + \sin 7x) - (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cdot \cos 3x - 2 \sin 4x \cdot \cos x =$
$= 2 \sin 4x(\cos 3x - \cos 3x) = -2 \sin 4x\ \ 2 \sin 2x \cdot \sin x = -4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x$.

c) $E_3 = (\sin x + \sin y) + (\sin z - \sin (x + y + z)) =$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{-x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y+2z}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y+2z}{2}\right) = 4\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x+z}{2}\cdot\sin\frac{y+z}{2}.$$

d) $E_4 = [\sin (x - y) + \sin (y - z)] + \sin(z - x) = 2\sin\frac{x-z}{2}\cdot\cos\frac{x-2y+z}{2} -$

$$-2\sin\frac{x-z}{2}\cdot\cos\frac{x-z}{2} = 2\sin\frac{x-z}{2}\left[\cos\frac{x-2y+z}{2}-\cos\frac{x-z}{2}\right] =$$

$$= -4\sin\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{y-z}{2}\cdot\sin\frac{z-x}{2}.$$

6. Arătați că: $\dfrac{(\cos 2a+\cos a)^2+(\sin 2a+\sin a)^2}{(\cos 2a-\cos a)^2+(\sin 2a-\sin a)^2} = \operatorname{ctg}^2\dfrac{a}{2}$.

Rezolvare

Avem: $$\frac{(\cos 2a+\cos a)^2+(\sin 2a+\sin a)^2}{(\cos 2a-\cos a)^2+(\sin 2a-\sin a)^2} = \frac{\left(2\cos\frac{3a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{3a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\right)^2}{\left(-2\sin\frac{3a}{2}\cdot\sin\frac{a}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{3a}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\cos^2\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{3a}{2}+\sin^2\frac{3a}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{3a}{2}+\sin^2\frac{3a}{2}\right)^2} = \operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}.$$

7. Calculați: $S = \sin 9° + \sin 49° + \sin 89° + ... + \sin 329°$.

Rezolvare

$2\sin 20° \cdot S = 2 \sin 20° \cdot \sin 9° + 2 \sin 20° \cdot \sin 49° + ... + 2\sin 20°\cdot \sin 329$

sau $2 \sin 20° \cdot S = (\cos 11° - \cos 29°) + (\cos 29° - \cos 69°) + ... + (\cos 309° - \cos 349°)$

Reducând termenii asemenea, obținem: $2\sin 20° \cdot S = 2 \sin 180° \cdot \sin 169°$ sau $2 \sin 20° \cdot S = 0$, deci $S = 0$.

Exerciții propuse

1. Calculați:

a) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$; b) $\sin 45° - \sin 15°$; c) $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}$;

d) $\cos 45° + \cos 15\pi$; e) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$; f) $\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 15°$.

2. Transformați în produs următoarele expresii:
a) $\sin x + \operatorname{tg} x$; b) $\sin x \ \cos x + \sin y \cdot \cos y$; c) $\sin x \cdot \cos x - \sin y \cdot \cos y$.

3. Calculați trigonometric $1 + \sqrt{3}$.

4. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:
a) $E = (\cos 2x + \cos 2y)^2 + (\sin 2x + \sin 2y)^2$;

b) $E = \sin^2(2x + y) - \sin^2(2x - y)$; c) $E = \dfrac{\sin^2 5x - \sin^2 2x}{\cos^2 3x - \cos^2 4x}$.

5. Arătați că expresia $E = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{1 - \cos(\alpha+\beta)} + \dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

este independentă de α și β.

6. Transformați în produs următoarele expresii:
a) $E = m - n\operatorname{tg}\alpha$; b) $E = m - n\sin\alpha$; c) $E = 1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$;
d) $E = \cos(\alpha + 2\beta + 3\gamma) + \cos(\alpha + 2\beta - 3\gamma) + \cos(\alpha - 2\beta + 3\gamma) + \cos(-\alpha + 2\beta + 3\gamma)$.

7. Verificați următoarele identități:

a) $\dfrac{\sin 2a + \sin 2b}{\cos 2a - \cos 2b} = \operatorname{ctg}(b - a)$; b) $\dfrac{\sin 2a + \sin 2b}{\cos 2(a+b)} = \dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$;

c) $\dfrac{\cos^2 5x - \cos^2 4x}{\sin^2 7x - \sin^2 2x} = -\dfrac{\sin x}{\sin 5x}$; d) $\sin 5a - \sin 4a + \sin 2a - \sin a = \dfrac{\sin 6a}{1 + 2\cos a}$.

8. Demonstrați că pentru valorile admisibile ale lui a avem:
a) $\dfrac{\sin a - 2\sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2\cos 2a + \cos 3a} = \operatorname{tg} 2a$; b) $\dfrac{\cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a} = \operatorname{tg} a$.

9. Se dă $\cos x + \cos y = p$, $\sin x + \sin y = q$ și $p \neq 0$, $p^2 + q^2 \neq 0$.
Calculați $\cos(x + y)$.

10. Fie relațiile $\dfrac{\sin a + \sin b}{\sin(a+b)} = p$ și $\dfrac{\cos a - \cos b}{\sin(a-b)} = q$, unde p și q sunt două numere date. Calculați, în funcție de p și q, următoarele expresii:

a) $\sin\frac{a+b}{2}$; b) $\cos\frac{a+b}{2}$; c) $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$; d) $\sin\frac{a-b}{2}$; e) $\cos\frac{a-b}{2}$; f) $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$.

11. Se dă $\cos a + \sin a = m$. Calculați $\sin a - \cos a$.

12. Arătați că: $\dfrac{\operatorname{ctg} 20° - \operatorname{ctg} 30°}{\operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 40°} = 2\cos 20°$.

13. Arătați că: $\dfrac{\cos 7° + \sin 7°}{\cos 7° - \sin 7°} = \dfrac{3\cos 8° - \sqrt{3}\sin 8°}{\sqrt{3}\cos 8° + 3\sin 8°}$.

Exerciții propuse

14. Arătați că: $\sin\frac{\pi}{36}\cdot\cos\frac{7\pi}{36}\cdot\sin\frac{13\pi}{36}=\frac{1}{16}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

15. Demonstrați că: $\prod_{k=1}^{89}\sin k^\circ=\cos 45^\circ\prod_{k=1}^{44}\left(\cos^2 k^\circ-\cos^2 45^\circ\right)$.

16. Demonstrați identitatea:

$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=4\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{b+c}{2}\cdot\sin\frac{c+a}{2}$.

17. Arătați că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ avem:

$\cos\frac{\pi}{4n+3}+\cos\frac{3\pi}{4n+3}+\cos\frac{5\pi}{4n+3}+\ldots+\cos\frac{(4n+1)\pi}{4n+3}=\frac{1}{2}$.

18. Considerați expresia:
$E(x)=\cos x+2\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+2\cos 5x+\cos 6x$.
Să se deducă egalitatea: $\cos 20^\circ+2\cos 40^\circ-\sin 10^\circ=4\sqrt{3}\cos 10^\circ\cdot\sin 20^\circ$.

19. Dacă $\operatorname{tg} 4a=\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$, calculați valoarea expresiei:

$E=\frac{\sin 6a+\sin 7a+\sin 8a+\sin 9a+\sin 10a}{\cos 6a+\cos 7a+\cos 8a+\cos 9a+\cos 10a}$.

20. Demonstrați că pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, avem:

$\frac{\sin 9x}{\sin x}-2\cos 2x-2\cos 4x-2\cos 6x-2\cos 8x=1$. Generalizare.

Test de evaluare

1p **1.** Știind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, calculați $\cos\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$.

1p **2.** Fie $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin\alpha=\frac{1}{7}$ și $\sin\beta=\frac{13}{14}$. Calculați $\alpha-\beta$.

1p **3.** Verificați identitatea $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$ știind că $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

1p **4.** Simplificați fracția $F=\frac{\sin^2 14x-\sin^2 8x}{\cos^2 10x-\cos^2 12x}$.

2p **5.** Arătați că expresiile $E=\cos^2 x-2\cos x\cos a\cos(a+x)+\cos^2(a+x)$ și

$F=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$ nu depind de x.

1p **6.** Calculați: $E=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$.

1p **7.** Arătați că expresia $E=\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)-\cos 2a\cos 2a$ este constantă.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 10

Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană

1. Produsul scalar a doi vectori

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori liberi, nenuli și notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ măsura unghiului dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

1.1. Definiție, proprietăți

Definiție

Se numește **produsul scalar** al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ numărul real $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dat prin:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi}$$

Dacă unul dintre vectorii $\vec{a}$ sau $\vec{b}$ este nul, atunci produsul lor scalar este zero. Produsul scalar a doi vectori nenuli este strict pozitiv dacă unghiul dintre ei este ascuțit, adică $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și este strict negativ dacă unghiul dintre ei este obtuz, adică $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este nul dacă și numai dacă cei doi vectori sunt perpendiculari, adică $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Condiția de perpendicularitate a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este ca produsul lor scalar să fie zero.

Dacă vectorii sunt dați sub forma $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ și $\vec{b} = m\vec{i} + n\vec{j}$, atunci $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow xm + yn = 0$.

Probleme rezolvate

1. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \sqrt{5}\,\vec{j}$ și $\vec{b} = m\vec{i} - 8\vec{j}$ să fie perpendiculari.

Rezolvare

Știm că $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 2 \cdot m + \sqrt{5} \cdot (-8) = 0 \Leftrightarrow m = 4\sqrt{5}$.

2. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ știind că $m + n = -11$ și că vectorii $\vec{a} = 5m\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{5}\vec{i} + n\vec{j}$ sunt perpendiculari.

Rezolvare

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 5m \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} - 3n = 0.$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} m+n=11 \\ m\sqrt{2}-3n=0 \end{cases}$ se obține: $\begin{cases} m = \frac{-33(3-\sqrt{2})}{7} \\ n = \frac{-33\sqrt{2}+22}{7} \end{cases}.$

Fie $\mathcal{V}$ mulțimea vectorilor liberi din plan

Teoremă

Produsul scalar are următoarele proprietăți:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ (*comutativitate*);

2. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$, $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}$;

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\forall\ \vec{a} \in \mathcal{V}$;

5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$, $\forall\ \vec{a} \in \mathcal{V}$.

Demonstrațiile rezultă imediat din definiția produsului scalar.

Proprietăți

Au loc următoarele inegalități:

Inegalitatea Cauchy

$$\boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \forall\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}}$$

Demonstrație

Înmulțind cu $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ inegalitatea $|\cos\varphi| \leq 1$ obținem $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\ |\cos\varphi| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ adică $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Avem egalitate dacă și numai dacă $|\cos\varphi| = 1$, adică pentru $\varphi \in \{0, \pi\}$, situație în care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

Inegalitatea Minkowski

$$\boxed{|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|, \forall\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}}$$

Demonstrație

Folosind inegalitatea lui Cauchy deducem $2\vec{a}\,\vec{b} \leq 2|\vec{a}\,\vec{b}| \leq 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + |\vec{b}|^2$.

Avem $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} \leq$

$\leq \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| + |\vec{b}|^2} = \sqrt{(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2} = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$

Problemă rezolvată

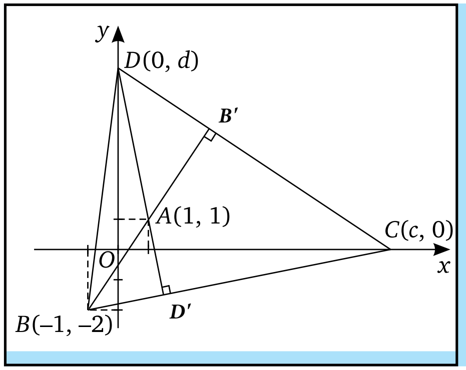
Într-un reper cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -2)$, $C(c, 0)$, $D(0, d)$, unde $c > 0$, $d > 0$.

a) Scrieți coordonatele vectorilor: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$.

b) Calculați produsele scalare: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c) Determinați c și d astfel încât punctul A să fie ortocentrul triunghiului BCD.

Rezolvare



a) Dacă $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, atunci

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

sau $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1), (y_2 - y_1)$.

Obținem: $\overrightarrow{AB}\,(-2, -3)$, $\overrightarrow{AC}\,(c - 1, -1)$,

$\overrightarrow{BC}\,(c + 1, 2)$, $\overrightarrow{BD}\,(1, -2 - d)$,

$\overrightarrow{CD}\,(-c, d)$, $\overrightarrow{AD}\,(-1, d - 1)$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2\vec{i} - 3\vec{j})(-c\vec{i} + d\vec{j}) =$

$= 1 \cdot \cos 0 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, iar

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Analog se obține:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 1 - c + 2 + d = 3 - c + d$ și

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -(c + 1) + 2(d - 1) = -3 - c + 2d$.

c) Punem condițiile: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ și avem:

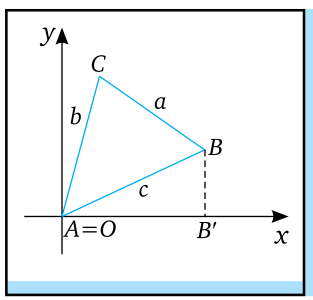
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 2c - 3d = 0$ (1)

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow 1 - c + 2 + d = 0$ (2)

$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -(c + 1) + 2(d - 1) = 0$ (3)

Rezolvând sistemul format din egalitățile (1), (2) și (3) se obțin $c = 9$ și $d = 6$.

1.2. Teorema cosinusului



Ne propunem să găsim o relație între valoarea cosinusului unui unghi al unui triunghi oarecare și lungimile laturilor triunghiului.

Fie un triunghi ABC cu notațiile consacrate ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$) și $m(\sphericalangle A) < 90°$.

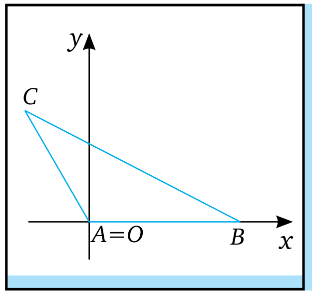
Fixăm un reper cartezian cu originea în vârful A al triunghiului și vârful C pe axa Ox.

Notăm cu B' piciorul perpendicularei duse din B pe Ox și din triunghiul ABB' dreptunghic în B' găsim $AB' = c \cos A$ și $BB' = c \sin A$.

Rezultă că avem $B(c\cos A, c\sin A)$. Calculând distanța BC^2 obținem:

$$a^2 = (c\cos A - b)^2 + (c\sin A - 0)^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2\cos^2 A - 2bc\cos A + b^2 + c^2\sin^2 A$$
$$\Leftrightarrow a^2 = c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + b^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Dacă triunghiul ABC are $m(\sphericalangle A) > 90°$, atunci B' este situat în afara segmentului $[AC]$ și $B'A = -c\cos(\pi - A) = c\cos A$, adică avem $B(c\cos A, c\sin A)$.



Analog calculând distanța BC^2 vom obține:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$, triunghiul ABC devine dreptunghic în A avem $\cos A = 0$ și obținem

$$a^2 = b^2 + c^2$$

care este relația dată de teorema lui Pitagora.

În mod asemănător se pot demonstra relațiile prin care se exprimă b^2 și c^2.

S-a demonstrat astfel sintetic:

Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC (cu notațiile $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$) au loc relațiile:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

Reformulare

În triunghiul ABC, în care se notează cu a, b, c lungimile laturilor opuse unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, au loc relațiile:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

Demonstrație vectorială

Relația $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ se ridică la pătrat:

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\hat{A}.$$

În mod asemănător se pot demonstra relațiile celelalte.

Din formulele date de teorema cosinusului putem exprima valorile cosinusului pentru măsurile unghiurilor triunghiului.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Problemă rezolvată

În triunghiul ABC se cunosc: $b = 5$, $c = 8$ și $m(\sphericalangle A) = 60°$.
Determinați a, $\cos B$ și valoarea expresiei $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$.

Rezolvare

Aplicând teorema cosinusului avem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 7;$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos B = \frac{11}{14};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{7}.$$

Atunci avem $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{4} + \frac{121}{196} + \frac{1}{49} = \frac{174}{196}$.

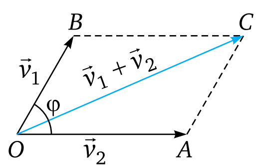
Folosind teorema cosinusului putem arăta cum se calculează modulul sumei a doi vectori în funcție de modulele vectorilor care se adună și a cosinusului unghiului format de ei.

Teoremă

Fie $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ doi vectori nenuli care formează un unghi de măsură φ și $\vec{v}$ suma lor: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Atunci are loc:

$$\boxed{v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\varphi}$$

Demonstrație



Fie O un punct și construim vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}_2$, $m(\sphericalangle AOB) = \varphi$ și $\overrightarrow{OC} = \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Rezultă că $OACB$ paralelogram și atunci $m(\sphericalangle OAC) = \pi - \varphi$

$\Rightarrow \cos(\sphericalangle OAC) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$.

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul OAC avem:

$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\pi - \varphi)$, adică

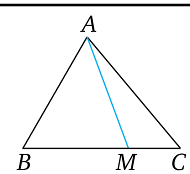
$v = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\varphi$.

*1.3. Teorema lui Stewart

Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC.
Atunci este adevărată **relația lui Stewart**:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM$$

Demonstrație



Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ABM și ABC pentru laturile AM respectiv AC și avem:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2\,AB \cdot BM\cos B \qquad (1)$$

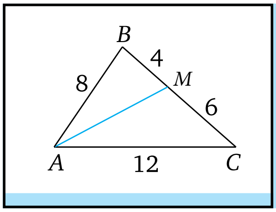
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC\cos B \qquad (2)$$

Înmulțim relația (1) cu BC, relația (2) cu $-BM$ și adunăm egalitățile obținute. Rezultă:

$$AM^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot (BC - BM) + BM(BM - BC) \cdot BC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AM^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC - BC \cdot BM \cdot MC.$$

Problemă rezolvată

În triunghiul ABC cu $AB = 8, AC = 12, BC = 10$, punctul $M \in (BC)$ astfel încât $BM = 4$. Determinați lungimea lui AM.



Rezolvare

$$AM^2 = \frac{1}{BC}(AC^2 \cdot BM + AB \cdot MC) - BM \cdot MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{1}{10}(144 \cdot 4 + 8 \cdot 6) - 4 \cdot 6 \Rightarrow AM \approx 6{,}2.$$

1.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic

A **rezolva un triunghi dreptunghic** oarecare înseamnă a determina toate lungimile laturilor și măsurile tuturor unghiurilor sau valorile unor funcții trigonometrice ale acestor unghiuri când cunoaștem o parte dintre ele, dintre care cel puțin o latură.

În cazul triunghiului dreptunghic trebuie să se cunoască două elemente, dintre care cel puțin lungimea unei laturi.

Avem situațiile:

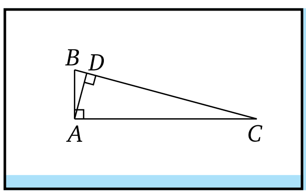
Se cunosc	Se determină
■ lungimile a două laturi	■ a treia latură cu teorema lui Pitagora ■ valorile unor funcții trigonometrice pentru unghiurile ascuțite
■ lungimea unei laturi ■ măsura unui unghi ascuțit sau valoarea unei funcții trigonometrice a unui unghi ascuțit	■ lungimea unei laturi a triunghiului (folosind funcțiile trigonometrice) ■ lungimea celei de-a treia laturi ■ celălalt unghi ascuțit (sau valoarea unei funcții trigonometrice a lui)

Exercițiu rezolvat

Rezolvațîi triunghiul dreptunghic ABC, dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle C) = 15°$ și $AB = \sqrt{50 - 25\sqrt{3}}$. Calculați și lungimea înălțimii AD, $D \in [BC]$.

Rezolvare

Avem $m(\sphericalangle B) = 90° - 15° = 75°$.



$\sin C = \frac{AB}{BC}$, dar $\sin 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

Avem $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{5\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 \cdot BC} \Rightarrow BC = 5$.

Cu teorema lui Pitagora, obținem $AC = \sqrt{25-(50-25\sqrt{3})} = \sqrt{25\sqrt{3}-25} = 5\sqrt{\sqrt{3}-1}$.

În ΔACD, dreptunghic în D, avem $\sin C = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{AD}{5\sqrt{\sqrt{3}-1}} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2}$.

Probleme propuse

1. Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori și φ măsura unghiului format de aceștia. Calculați produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ pentru:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

b) $|\vec{a}| = 15$; $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ și $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

c) $\vec{a} = 9\vec{i} - 40\vec{j}$; $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{7}\,\vec{j}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$;

d) $\vec{a} = \sqrt{33}\,\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{b} = \sqrt{21}\,\vec{i} - 2\vec{j}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ știind $2m - \sqrt{3}\,n = 20$ și că vectorii $\vec{a} = 2m\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + n\vec{j}$ sunt perpendiculari.

3. În triunghiul ABC se cunosc $a = 11$, $b = 8$, $c = 6$. Stabiliți dacă triunghiul este obtuzunghic.

4. În triunghiul ABC se cunosc $a = 7$, $b = 8$, $c = 10$. Calculați valoarea expresiei $\cos A + \cos B + \cos C$.

5. Arătați că în orice triunghi ABC au loc inegalitățile:

a) $1 < \cos A = \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4} \le \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1$.

6. În triunghiul dreptunghic ABC cu $A = \frac{\pi}{2}$ se cunosc $\sin C = \frac{7}{11}$ și $c = 28$. Determinați $\sin B$, a, b.

7. Arătați că dacă între elementele unui triunghi avem relația $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

8. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ în care se cunosc:

a) $a = 10$ și $b - c = 2$; b) $b = 12$ și $C = \frac{5\pi}{12}$.

Probleme propuse

2. Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie

2.1. Teorema sinusurilor

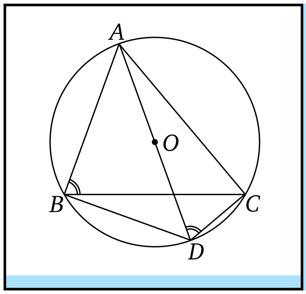
Teoremă

În orice triunghi ABC (cu notațiile $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și R raza cercului circumscris triunghiului) are loc relația:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

Demonstrație

Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu D intersecția $AO \cap \mathcal{C}(O, R)$, $A \neq D$.



AD fiind diametru rezultă că $\mathrm{m}(\sphericalangle ABD) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ABD})}{2} = 90°$

și $\mathrm{m}(\sphericalangle C) = \mathrm{m}(\sphericalangle D) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$.

Din triunghiul dreptunghic ABD obținem: $\sin D = \dfrac{AB}{AD}$

$\Rightarrow \sin C = \sin D = \dfrac{c}{2R}$, de unde rezultă $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Analog se arată că $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ și $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$.

2.2. Rezolvarea triunghiului oarecare

Într-un triunghi oarecare ABC vom folosi notațiile obișnuite (standard): A, B, C pentru măsurile unghiurilor în radiani, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ pentru lungimile laturilor.

Ca și în cazul triunghiului dreptunghic, prin a rezolva un triunghi oarecare se înțelege determinarea tuturor elementelor sale (lungimile laturilor și măsurile unghiurilor) când se cunosc o parte dintre ele (dintre care cel puțin o latură).

Între cazurile de congruență ale triunghiurilor și cazurile de rezolvare a triunghiurilor există o anumită similitudine.

Cazul I

Se cunosc: a, b, c – lungimile laturilor triunghiului.

Se determină: A din formula $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; din formulele analoage se calculează B și atunci $C = \pi - (A + B)$.

Cazul II

Se cunosc: B, a, C – o latură și două unghiuri.

Se determină: $A = \pi - (B + C)$;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a\sin B}{\sin A}; \text{ din } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Cazul III

a) Se cunosc: a, b, C – două laturi și unghiul cuprins între ele.

Se determină $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A}$, $B = \pi - (A + C)$;

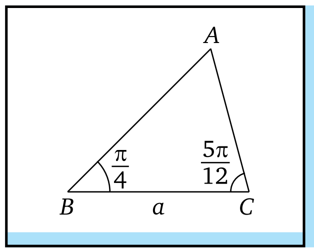
b) Se cunosc: a, b, B – două laturi și un unghi necuprins între ele.

Se determină: $\sin A = \frac{a\sin B}{b}$, $C = \pi - (A + B)$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Probleme rezolvate

1. Rezolvați triunghiul ABC în care se cunosc:

$a = 12$, $B = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{5\pi}{12}$.



Rezolvare

$$A = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3};\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{12 \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}} \Rightarrow b = 4\sqrt{6} \text{ și } c = \frac{a\sin C}{\sin A},$$

dar $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} \Rightarrow c = 2\sqrt{6}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

2. Rezolvați triunghiul ABC cu perimetrul de 24 în care au loc relațiile:

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{3}{4} \text{ și } \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2.$$

Rezolvare

$b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c - a) \Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c)$ și cum $b + c > 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$ pe care o comparăm cu $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ și obținem $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 60° \Rightarrow m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 120°$.

Transformăm produsul $\sin B \cdot \sin C$ în sumă și obținem:

$\frac{1}{2}[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = \frac{3}{4}$, $\cos(B + C) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos(B - C) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60° \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = b = c = 8$.

Probleme propuse

1. Să se arate că în orice triunghi au loc relațiile:

a) $\sin A + \sin B + \sin c = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

b) $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$; c) $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$.

2. Să se arate că un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$.

3. Să se rezolve triunghiul ABC în care se cunosc:

a) $a = 4\sqrt{3} - 4$, $b = 4\sqrt{6}$, $C = \frac{\pi}{4}$; b) $B = \frac{\pi}{3}$, $c = 6$, $A = \frac{\pi}{4}$;

c) $a = 14\sqrt{2}$, $b = 7\sqrt{2}$, $c = 7\sqrt{6}$; d) $A = \frac{\pi}{12}$, $C = \frac{5\pi}{12}$, $a = 16$;

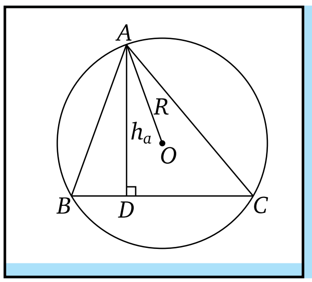
e) $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{5\pi}{12}$, $a = 12\sqrt{2}$; f) $A = C = \frac{\pi}{6}$, $b = 10$.

4. Să se arate că un triunghi este dreptunghic dacă are loc relația:
$\cos^2 B + \sin^2 C = 2\cos B \sin C$.

Probleme propuse

2.3. Calculul razei cercului înscris și a cercului circumscris triunghiului

Fie un triunghi ABC cu notațiile obișnuite $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și R raza cercului circumscris triunghiului.



Din teorema sinusului $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ putem exprima **lungimea razei cercului circumscris**:

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}}$$

Construim înălțimea AD, $D \in BC$, notăm $AD = h_a$.

Din triunghiul ABD dreptunghic în D obținem $\sin B = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c\sin B$,

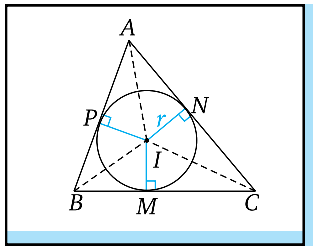
iar din triunghiul ADC, dreptunghic în D se obține $h_a = b\sin C$.

În mod analog, se pot exprima înălțimile h_b și h_c.

Se știe că **aria triunghiului oarecare ABC** se notează cu S și se calculează cu formula

$$\boxed{S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}}$$

Ne propunem să exprimăm **lungimea razei cercului înscris** în triunghiul ABC.



Fie triunghiul ABC și cercul de centru I și rază r înscris în acest triunghi. Notăm cu M, N și P punctele în care cercul este tangent la laturile BC, AC respectiv AB.

Rezultă că $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IP \perp AB$.

Atunci avem:

$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{CDA} =$$
$$= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} = rp,$$

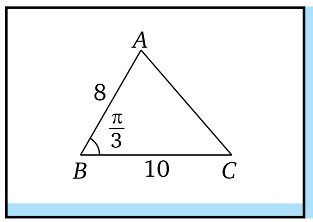
unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (se numește *semiperimetrul triunghiului ABC*). Am obținut formula:

$$\boxed{r = \frac{S}{P}}$$

Problemă rezolvată

În triunghiul ABC se cunosc $m(\sphericalangle A) = 60°$, $b = 8$, $c = 10$. Determinați:

a) raza cercului circumscris;
b) înălțimea triunghiului corespunzătoare laturii b;
c) aria triunghiului;
d) raza cercului înscris.



Rezolvare

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a = 2\sqrt{21}$;

$$R = \frac{a}{2\sin A} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{21}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R = 2\sqrt{7};$$

b) $h_b = c \sin A \Rightarrow h_b = 5\sqrt{3}$; c) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow S = 20\sqrt{3}$;

d) $r = \dfrac{S}{p} \Rightarrow r = \dfrac{20\sqrt{3}}{9+\sqrt{21}} \Rightarrow r = 3\sqrt{3} - \sqrt{7}$.

2.4. Calculul lungimilor unor segmente importante din triunghi

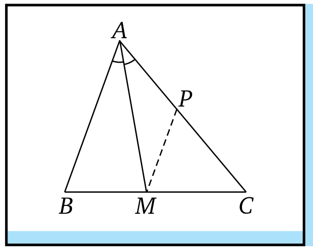
2.4.1. Teorema bisectoarei

Teorema bisectoarei

Fie triunghiul ABC și $[AM$ bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$, unde $M \in (BC)$. Atunci are loc relația:

$$\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}}$$

Demonstrație



Construim $MP \parallel AB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{PM}{PC}$. Având $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MAP$ și $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle AMP \Rightarrow \sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle PMA \Rightarrow PM = AP$, deci $\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{PC}$ dar din $PM \parallel AB$ mai rezultă $\frac{AP}{PC} = \frac{BM}{MC}$.

Prin tranzitivitate obținem $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$.

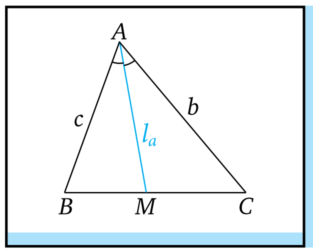
Lungimea bisectoarei interioare a unui triunghi, în funcție de lungimile laturilor triunghiului, este dată de următoarea teoremă.

Teoremă

Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $AC = b$, $Bc = a$, $[AM$ bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$, unde $M \in [BC]$. Atunci lungimea bisectoarei $[AM$ verifică relația:

$$\boxed{MA^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2]}$$

Demonstrație



Din teorema bisectoarei avem

$$\frac{b}{c} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{b+c}{c} = \frac{CM+MB}{MB} \Rightarrow MB = \frac{ac}{b+c}$$

și analog $CM = \frac{ab}{b+c}$. Scriem teorema lui Stewart pentru triunghiul ABC și punctul M și apoi înlocuim MB și CM cu expresiile găsite.

$$MA^2 \cdot a = c^2 \cdot MC + b^2 \cdot MB - a \cdot MB \cdot MC \Leftrightarrow$$

$$MA^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - a \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} \Rightarrow MA^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2].$$

Observație: Pentru lungimea bisectoarei din A se mai folosește notația l_a.
Analog se pot duce l_b și l_c.

Problemă rezolvată

Calculați lungimea bisectoarei $[AM$, $M \in [BC]$ în triunghiul ABC care are $BC = 7$, $AB = 4$, $AC = 6$.

Rezolvare

Avem $MA^2 = \frac{6 \cdot 4}{(6+4)^2}[(6+4)^2 - 7^2] \Rightarrow MA = 12{,}24$.

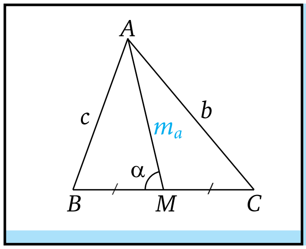
*2.4.2. Teorema medianei

Teorema medianei

Fie triunghiul ABC în care $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Dacă notăm cu m_a, m_b, m_c lungimile corespunzătoare laturilor de lungimi a, b, respectiv c, atunci au loc egalitățile:

$$\boxed{m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

Demonstrație



Fie M mijlocul laturii (BC) și notăm $\alpha = m(\sphericalangle AMB) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\sphericalangle AMC) = \pi - \alpha$.

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul ABM pentru latura AB și în triunghiul AMC pentru latura AC:

$$c^2 = m_a^2 + BM^2 - 2m_a BM \cos\alpha$$

și $$b^2 = m_a^2 + MC^2 - 2m_a MC \cos(\pi - \alpha).$$

Avem $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $BM = MC = \frac{a}{2}$. Adunând cele două relații obținem:

$$c^2 + b^2 = 2\cdot m_a^2 + 2\cdot\frac{a^2}{4} - 2m_a\frac{a}{2}\cos\alpha + 2m_a\frac{a}{2}\cos\alpha \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Analog se demonstrează și celelalte relații.

Probleme rezolvate

1. În triunghiul ABC se cunosc $m(\sphericalangle A) = 60°$, $AB = 7$ și $AC = 5$. Calculați:
a) BC; b) m_a; c) $\cos B$.

Rezolvare

a) $BC = a$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{39}$;

b) $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{109}}{2}$; $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow \cos B = \frac{3\sqrt{39}}{26}$.

2. Demonstrați că, dacă într-un triunghi ABC, medianele corespunzătoare vârfurilor B și C sunt perpendiculare, atunci există relația $5a^2 = b^2 + c^2$.

Rezolvare

Vectorii mediană $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ se exprimă: $\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}$, $\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$ (1).

Cum vectorii $\overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{CC'}$ sunt perpendiculari produsul lor scalar este $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CC'} = 0$ (2).

Din (1) și (2) obținem: $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}^2 = 0 \ (3)$$

Dar $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$, de unde

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ (4)

$b^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2 + a^2 - 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, deci

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (5)

$c^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = b^2 + a^2 + 2\,\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$, deci

$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ (6)

Înlocuind (4), (5) și (6) în (3) obținem $5a^2 = b^2 + c^2$.

Probleme propuse

1. Demonstrați că suma pătratelor lungimilor laturilor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

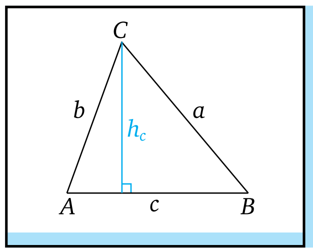
2. Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic fiecare catetă este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției ei pe ipotenuză (*teorema catetei*).

3. Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic înălțimea corespunzătoare unghiului drept este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză (*teorema înălțimii*).

Probleme propuse

2.5. Calcul de arii

Ne propunem să găsim mai multe formule pentru calculul ariei unui triunghi.



1. Aria triunghiului este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare ei.

$$\boxed{S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}} \quad (1)$$

2. Am găsit mai întâi formula

$$\boxed{S = p \cdot r} \quad (2)$$

unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul;

r este lungimea razei cercului înscris în triunghi.

3. Construim $CD \perp AB$, $D \in AB$, $CD = h_c$ și din triunghiul ADC dreptunghic în D rezultă $h_c = b \sin A$. Analog se obțin $h_a = c \sin B$ și $h_b = a \sin C$ care înlocuite în (1) dau fomulele:

$$\boxed{S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}} \quad (3)$$

4. Din teorema sinusului
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A},\ b = \frac{c\sin B}{\sin C},\ a = \frac{b\sin A}{\sin B}$$
care înlocuite în (3) conduc la:
$$\boxed{S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} = \frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B} = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}} \tag{4}$$

5. Avem $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{2bc\sin A} = \frac{abc}{4\left(\frac{bc\sin A}{2}\right)} = \frac{abc}{4S}$. Rezultă:
$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}} \tag{5}$$
unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

6. În formula $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (dată de teorema cosinusului) adunăm 1 în ambii membri și obținem:
$$1 + \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} = p\cdot\frac{(b+c-a)}{2bc} \text{ dar } \frac{b+c-a}{2} =$$
$$= \frac{b+c+a-2a}{2} = \frac{2p-2a}{2} = p-a.$$
Rezultă $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ și $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;

ținând seamă că $\frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem:
$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}} \tag{6}$$
Avem $S = \frac{bc\sin A}{2} = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = bc\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)(p-a)}{b^2c^2}}$, adică
$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \tag{7}$$
numită **formula lui Heron**.

7. Calculăm produsul $p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ și avem:
$$p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = p(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S.$$
Am obținut formula
$$\boxed{S = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \tag{8}$$
Analog se obțin și celelalte formule care depind de b și $\sphericalangle B$, respectiv c și $\sphericalangle C$.

8. În formula $S = \dfrac{bc\sin A}{2}$ înlocuind $b = 2R\sin B$ și $c = 2R\sin C$ se obține

$$\boxed{S = 2R^2\sin A\sin B\sin C} \qquad (9)$$

9. Să calculăm produsul $p\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Avem: $p\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = p\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$

$= \dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \dfrac{S^2}{abc} = \dfrac{S\cdot 4S}{4\cdot abc} = \dfrac{S}{4R}$. Rezultă

$$\boxed{S = 4R\cdot p\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \qquad (10)$$

Probleme rezolvate

1. Calculați aria triunghiului ABC când se cunosc:

a) $a = 16$, $A = \dfrac{\pi}{4}$, $B = \dfrac{5\pi}{12}$; b) $a = 12$, $b = 10$, $c = 6$;

c) $p = 5 + \sqrt{3}$, $a = 1 + \sqrt{3}$, $A = \dfrac{\pi}{3}$.

Rezolvare

a) $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} = \dfrac{256\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = 32\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$;

b) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \dfrac{12+10+6}{2} \Rightarrow p = 14 \Rightarrow S = \sqrt{14\cdot 2\cdot 4\cdot 8} = 8\sqrt{14}$;

c) $S = p(p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \Rightarrow S = (5+\sqrt{3})\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = \dfrac{4(5\sqrt{3}+3)}{3}$.

2. În triunghiul ABC calculați $\operatorname{tg} A$ cunoscând $S = 21$ și $b^2 + c^2 - a^2 = 28$.

Rezolvare

Avem $\operatorname{tg} A = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}{1-\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = 2\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-a)}}\cdot\dfrac{p(p-a)}{p(p-a)-(p-b)(p-c)} =$

$= \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\dfrac{(a+b+c)}{2}\cdot\dfrac{b+c-a}{2}-\dfrac{a+c-b}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}} = \dfrac{8S}{2b^2+2c^2-2a^2} = \dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2} = \dfrac{4\cdot 21}{28} = 3.$

3. Fie triunghiul ABC în care $S = R^2$. Arătați că are loc egalitatea $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2$ și triunghiul nu este obtuzunghic.

Rezolvare

Avem $S = \dfrac{abc}{4R}$ și $S = R^2 \Rightarrow abc = 4R^3$, dar $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ rezultă $2\sin A\sin B\sin C = 1$.

Cum $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ și $\sin C = \sin[\pi - (A+B)] = \sin(A+B)$, iar $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$ putem scrie:
$[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\sin C = 1 \Leftrightarrow \cos(A-B)\sin C + \cos C\sin C = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(A-B)\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin 2C = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) + \frac{1}{2}\sin 2C = 1$, adică

$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B = \sin 2C = 2$

Presupunem că $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow 2A \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \sin 2A < 0$.

Întrucât $\sin 2b \le 1$ și $\sin 2C \le 1$, atunci $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C < 2$, ceea ce contrazice egalitatea demonstrată, prin urmare $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Același raționament se poate face pentru B și C. În concluzie triunghiul ABC nu este obtuzunghic.

4. În triunghiul ABC se cunosc $a = 2(3+\sqrt{3})$; $b - c = 2$ și $B - C = \frac{\pi}{6}$. Rezolvați triunghiul.

Rezolvare

Din $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{b-c}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$,

dar $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$, rezultă $\cos\frac{A}{2} = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{b-c} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$.

Relațiile $B + C = \frac{\pi}{2}$ și $B - C = \frac{\pi}{6}$ conduc la $B = \frac{\pi}{3}$ și $A = \frac{\pi}{6}$,

iar din $b = a\sin B\sin A \Rightarrow b = 3+\sqrt{3}$. Analog $c = a\sin C\sin A \Rightarrow c = 1+\sqrt{3}$.

5. Rezolvați triunghiul ABC în care se cunosc $\frac{b}{c} = 2+\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$ și $a = 4\sqrt{6-3\sqrt{3}}$.

Rezolvare

Scriind $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ în care $b = c(2+\sqrt{3})$ și $\cos A = \frac{1}{2}$ se obține

$c = 4(2-\sqrt{3})$ și apoi $b = 4$. Utilizând formulele $b = 2R\sin B$ și $c = 2R\sin C \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{b-c}{b+c} = \frac{2R(\sin B - \sin C)}{2R(\sin B + \sin C)} = \operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$, adică

$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{4}$. Sistemul $\begin{cases} B - C = \frac{\pi}{2} \\ B + C = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ conduc la $B = \frac{7\pi}{12}$ și $C = \frac{\pi}{12}$.

6. Rezolvați triunghiul ABC cu perimetrul de 18 și în care este verificată relația:

$1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 0$.

Rezolvare

$4\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1$, dar

$\sin\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A+B}{2}$.

Rezultă $4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \cos^2\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{A-B}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A-B}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{A-B}{2} = 0$ și $\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}$, adică $A = B$ și atunci $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$. Rezultă $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ și $a = b = c = 6$.

Probleme propuse

1. Arătați că în orice triunghi ABC este adevărată relația: $\dfrac{a^2}{\text{ctg}\,B - \text{ctg}\,C} = 25$.

2. În triunghiul ABC se cunosc: $R = \sqrt{2}$, $a = 2$, $b = \sqrt{6}$. Calculați c și S.

3. Aria triunghiului ABC este $15\sqrt{3}$, iar $c = 6$ și $b = 10$. Determinați a.

4. Arătați că în orice triunghi au loc identitățile:

a) $\text{tg}\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{B}{2}\,\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{S}{p^2}$; b) $a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\text{ctg}\,A + \text{ctg}\,B + \text{ctg}\,C)$;

c) $\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{a} + \dfrac{\cos^2\frac{B}{2}}{a} + \dfrac{\cos^2\frac{C}{2}}{c} = \dfrac{P^2}{4RS}$; d) $a^2\,\text{ctg}\,A + b^2\,\text{ctg}\,B + c^2\,\text{ctg}\,C = 4S$.

5. Arătați că dacă aria triunghiului ABC verifică relația $4S = a^2\sin 2B$, atunci triunghiul este dreptunghic.

6. Arătați că în orice triunghi au loc egalitățile:

a) $\dfrac{(a^2 - b^2)\sin A \sin B}{2\sin(A-B)} = S$; b) $(b^2 + c^2 - a^2)\,\text{tg}\,A = 4S$;

c) $a^2\,\text{ctg}\,A + b^2\,\text{ctg}\,B + c^2\,\text{ctg}\,C = 4S$.

7. În triunghiul ABC se cunosc $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.
Determinați S, R, r, $\cos A$ și $\sin B$.

8. În triunghiul ABC, unghiurile A, B, C, luate în această ordine, sunt în progresie aritmetică și verifică relația $\cos^2 B = \sin A \sin C$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.

9. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului care are laturile proporționale cu numerele 2, $1 + \sqrt{3}$ și $\sqrt{6}$.

10. Arătați că dacă între lungimile laturilor triunghiului ABC și cosinusul a două unghiuri există relația $\dfrac{2b-c}{2c-b} = \dfrac{\cos C}{\cos B}$, atunci $A = \frac{\pi}{3}$ sau $B = C$.

11. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem:

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$.

Probleme propuse

12. Se notează l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor triunghiului ABC corespunzătoare unghiului A, B, respectiv C. Demonstrați că $\dfrac{1}{l_a \sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{l_b \sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{l_c \sin\frac{C}{2}} = \dfrac{2P}{S}$.

13. Arătați că în orice triunghi ABC are loc egalitatea:
$(a + b)\cos C + (b + c)\cos A + (c + a)\cos B = a + b + c$.

14. Arătați că în orice triugnhi ABC au loc egalitățile:

a) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C} = 0$;

b) $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C} + \dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A} + \dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B} = 0$.

15. Fie ABC un triunghi oarecare. Arătați că valoarea expresiei

$E = \sin B\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) + \sin C\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$ este un număr natural.

Test de evaluare

1. Fie vectorii nenuli $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, unde x_1, x_2, y_1, y_2 sunt numere reale.

1p a) Arătați că vectorii $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ sunt perpendiculari dacă și numai dacă $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

1p b) Dacă $\vec{v}_1 = (\lambda+1)\vec{i} - \lambda\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = (\lambda+2)\vec{i} + (\lambda+5)\vec{j}$, determinați $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ să fie perpendiculari.

2. Triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ i $m(\sphericalangle B) = 30°$, se înscrie într-un cerc cu raza $R = 10$ cm. Calculați:

0,5p a) celălalt unghi și laturile triunghiului;

0,5p b) lungimea medianei din A;

0,5p c) lungimea bisectoarei din A;

0,5p d) aria triunghiului.

1p **3.** Arătați că dacă triunghiul ABC este dreptunghic neisoscel atunci $\operatorname{tg} 2B = \dfrac{2bc}{c^2 - b^2}$.

1p **4.** Arătați că dacă între elementele unui triunghi există relația $\cos A + \cos B = \sin C$, atunci triunghiul este dreptunghic.

1p **5.** Arătați că triunghiul în care $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a} = a^2$ și $\sin B \cdot \sin C = \dfrac{3}{4}$ este echilateral.

1p **6.** Arătați că un triunghi în care $a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b)\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}$ este isoscel.

1p **7.** Arătați că în orice triunghi are loc relația $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$.

Timp de lucru 120 minute; se acordă 1 punct din oficiu.

CAPITOLUL 11

Exerciții și probleme recapitulative

1. Algebră

1. Cercetați dacă există numere naturale care împărțite la $2n + 2$ să dea restul $2n$ și împărțite la $2n$ să dea restul $2n - 1$, unde n este număr natural nenul.

2. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ este pătrat perfect.
b) Arătați că un produs de 2 numere naturale consecutive nu este pătrat perfect.
c) Arătați că un produs de 3 numere naturale consecutive nu este cub perfect.

3. a) Arătați că există 7 numere naturale consecutive neprime.
b) Arătați că există n numere naturale consecutive neprime, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Arătați că următoarele numere sunt prime între ele:
a) $3n + 2$ și $4n + 3$, $n \in \mathbb{N}$; b) $k \cdot n + k - 1$ și $(k + 1)n + k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

5. a) Arătați că fracția $\dfrac{n+2}{2n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
b) Arătați că fracția $\dfrac{n+k}{2n+2k-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ este ireductibilă.

6. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{n^2+2003} \in \mathbb{Q}$.

7. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2250}$.

8. a) Fie $k \in \mathbb{Q}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - kb^2 = 1\}$. Determinați o valoare strict pozitivă a lui k astfel încât pentru orice $x, y \in H$ să avem $xy \in H$.
b) Fie $k \in \mathbb{Q}$ și mulțimea $H = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - kb^2 = 1\}$. Determinați o valoare strict pozitivă a lui k astfel încât pentru orice $x, y \in H$ să avem $xy \in H$.

9. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c \in \mathbb{Q}$ și $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $ab + bc + ca \in \mathbb{Q}$.
b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$, $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $abc \in \mathbb{Q}$.

10. Arătați că $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ nu sunt numere raționale.

11. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^3 + b^3 + c^3$ și $a + b + c$ se divid cu 7. Demonstrați că abc se divide cu 7.

12. Fie $x, y \in \mathbb{Q}^*$ și $z = \dfrac{xy}{x+y}$, $x + y \neq 0$. Arătați că $x^2 + y^2 + z^2$ este pătratul unui număr rațional.

(RMT 2/185)

13. Demonstrați că oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$ numărul $2[a^4 + b^4 + (a + b)^4]$ este pătrat perfect.

14. Arătați că nu există $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x-1} - \sqrt{y} + \sqrt{z+1} = \frac{1}{2}(x + y + z + 3)$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$.

16. Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive sistemul $\begin{cases} x^5 - y^5 = 31 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$.

(GM 11/1988)

17. a) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 1$, demonstrați că:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \geq \frac{9}{5}.$$

b) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = p$, demonstrați că:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \geq \frac{9}{3+2p}.$$

18. Demonstrați inegalitățile:

a) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$, $\forall\ a, b, c > 0$.

b) $\dfrac{a^2+1}{b+c} + \dfrac{b^2+1}{c+a} + \dfrac{c^2+1}{a+b} \geq 3$, $\forall\ a, b, c > 0$.

c) $\dfrac{a^2+p^2}{b+c} + \dfrac{b^2+p^2}{c+a} + \dfrac{c^2+p^2}{a+b} \geq 3p$, $\forall\ a, b, c > 0$.

19. Fie $0 < a \leq b \leq c$. Arătați că: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}$.

20. a) Dacă $a, b, c \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ astfel încât $a + b + c = 1$, atunci

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

b) Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$, atunci

$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + ... + \sqrt{4a_n+1} \leq \sqrt{n(n+4)}.$$

21. Demonstrați că dacă $a, b, c \in (0,+\infty)$ și $\sqrt{2005+a} + \sqrt{2005+b} = 2\sqrt{2005+c}$, atunci $a + b \geq 2c$.

22. a) Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z = 2$ și $xy + yz + zx = 1$ arătați că

$x, y, z \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $a > 0$ astfel încât $x + y + z = a$ și $xy + yz + zx = \dfrac{a^2}{4}$,

arătați că $x, y, z \in \left[0, \frac{2a}{3}\right]$.

23. Demonstrați inegalitățile:

a) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$, $\forall\ a, b, c > 0$;

b) $\frac{ab}{ab+1}+\frac{bc}{bc+1}+\frac{ca}{ca+1}\le\frac{a+b+c}{2}$, $\forall\ a, b, c > 0$;

c) $\frac{ab}{ab+p}+\frac{bc}{bc+p}+\frac{ca}{ca+p}\le\frac{a+b+c}{2p}$, $\forall\ a, b, c, p > 0$;

d) $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\ge\frac{4}{9}(2a+2b+2c-3)$, $\forall\ a, b, c > 0$;

e) $\frac{a^2}{a+p}+\frac{b^2}{b+p}+\frac{c^2}{c+p}\ge\frac{4}{9}(2a+2b+2c-3p)$, $\forall\ a, b, c, p > 0$;

f) $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$;

g) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$.

h) $\frac{ab}{1+ab}\le\frac{a+b}{4}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$;

i) $\frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ca}{1+ca}\le\frac{a+b+c}{2}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$;

j) $\frac{ab}{m^2+ab}\le\frac{a+b}{4m}$, $\forall\ a, b, m \in (0, +\infty)$;

k) $\frac{ab}{m^2+ab}+\frac{bc}{m^2+bc}+\frac{ca}{m^2+ca}\le\frac{a+b+c}{2m}$, $\forall\ a, b, m > 0$;

l) $\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\frac{a+b}{2}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$;

m) $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge a+b+c$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$;

n) $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\ge a_1+a_2+\ldots+a_n$, $\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

24. Folosind inegalitatea mediilor arătați că:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$; b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{8}{(a+b)^2}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$;

c) $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\ge\frac{2^{n+1}}{(a+b)^n}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}$; d) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge\frac{4}{a+b}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$;

e) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{a^3}\ge\frac{8}{(a+b)^2}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty)$;

f) $\frac{a}{b^{n+1}}+\frac{b}{a^{n+1}}\ge\frac{2^{n+1}}{(a+b)^n}$, $\forall\ a, b \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}$;

g) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$;

h) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$;

i) $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n} \geq \frac{3^{n+1}}{(a+b+c)^n}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}$;

j) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \geq \frac{9}{a+b+c}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$;

k) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty)$;

l) $\frac{a}{b^{n+1}}+\frac{b}{c^{n+1}}+\frac{c}{a^{n+1}} \geq \frac{3^{n+1}}{(a+b+c)^n}$, $\forall\ a, b, c \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}$.

25. a) Demonstrați că $\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y} \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y}$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\ x, y \in (0, +\infty)$, cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$. *(Titu Andreescu)*

b) Demonstrați că pentru orice $a > 1, b > 1$ este adevărată inegalitatea:

$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geq 8$. *(OM, Rusia, 1992)*

c) Demonstrați că pentru orice $a > \frac{1}{2}, b > \frac{1}{2}$ este adevărată inegalitatea:

$\frac{a^2}{2b-1}+\frac{b^2}{2b-1} \geq 2$.

d) Demonstrați că: $\frac{a^2}{nb-1}+\frac{b^2}{na-1} \geq \frac{8}{n^2}$, $\forall\ a, b > \frac{1}{n}, n > 1$.

26. a) Demonstrați că pentru orice numere reale α, β, γ și pentru orice numere reale strict pozitive x, y, z are loc inegalitatea: $\frac{\alpha^2}{x}+\frac{\beta^2}{y}+\frac{\gamma^2}{z} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z}$, cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}$. *(Inegalitatea Cauchy-Schwarz)*

b) Demonstrați că: $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$, $\forall\ a, b, c > 0$.

c) Demonstrați că: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$, $\forall\ a, b, c > 0$.

d) Demonstrați că: $\frac{a^2}{2a+b}+\frac{b^2}{2b+c}+\frac{c^2}{2c+a} \geq \frac{a+b+c}{3}$, $\forall\ a, b, c > 0$.

e) Demonstrați că: $\frac{a^2}{na+b}+\frac{b^2}{nb+c}+\frac{c^2}{nc+a} \geq \frac{a+b+c}{n+1}$, $\forall\ a, b, c > 0$.

f) Demonstrați că: $\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \geq \frac{a+b+c}{5}$, $\forall\ a, b, c > 0$.

g) Demonstrați că: $\frac{a^2}{na+mb}+\frac{b^2}{nb+mc}+\frac{c^2}{nc+ma} \geq \frac{a+b+c}{n+m}$, $\forall\ a, b, c, n, m > 0$.

27. Fie mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și submulțimile sale $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determinați submulțimea X a lui E astfel încât $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = E$.

28. Notând partea fracționară a numărului real x cu $[x]$ arătați că:

a) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{99}] = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 15 + 8 \cdot 17 + 9 \cdot 19 = 615$;

b) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\left[\sqrt{n^2+n+1}\right] = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; d) $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right] = 4n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

e) $\left[\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)^2\right] = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

f) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, și calculați partea întreagă a numărului $a = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2005}}$.

29. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $|x-2| + m(x-1) = 2$ să admită o singură soluție.

30. Fie $f(x) = |x-2| - |x-4| - |2x-6|$, unde $2 \le x \le 8$.
Calculați suma dintre cea mai mare și cea mai mică valoare a lui $f(x)$.

31. Determinați numărul perechilor întregi cu componente pozitive care verifică ecuația $x^2 + y^3 = x^3$.

32. a) Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 1$.
Arătați că $1 \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{3}$. Când are loc egalitatea?

b) Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.
Arătați că $1 \le \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} \le \sqrt{n}$. Când are loc egalitatea?

33. Arătați că dacă $x \ge 1$ și $y \ge 1$, atunci $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \le xy$.

34. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b = 2c$. Arătați că $a^4 + b^4 \ge 2c^4$.

35. a) Arătați că dacă x și $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| \le 1$ și $|y| \le 1$, atunci

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \le \sqrt{4-(x+y)^2}.$$

b) Arătați că dacă x și $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| \le a$ și $|y| \le a$, $a > 0$, atunci

$$\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{a^2-y^2} \le \sqrt{4a^2-(x+y)^2}.$$

c) Arătați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| \le a$ și $|y| \le b$, $a, b \in (0, +\infty)$,

atunci $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{b^2-y^2} \le \sqrt{(a+b)^2-(x+y)^2}$.

36. a) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x-1| \le 2$ și $|y-3| \le 4$, atunci $-2 \le x + y \le 10$.

b) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x-a| \le 2$ și $|y-b| \le 4$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a + b - 6 \le x + y \le a + b + 6$.

c) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x-a| \le c$ și $|y-b| \le d$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $c, d \in (0, +\infty)$, atunci $a + b - c - d \le x + y \le a + b + c + d$.

37. Arătați că pentru $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

a) $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{2}$; b) $\left|\frac{x}{x^2+a^2}\right| \le \frac{1}{2a}$, $\forall\, a > 0$.

38. a) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, atunci $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| \le 1$.

b) Dacă $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| \le a$, $|y| \le a$, $a > 0$, atunci $\left|\frac{x+y}{a^2+xy}\right| \le \frac{1}{a}$.

c) Dacă $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| < 1$, $|y| < 1$, atunci $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$.

d) Dacă $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| < a, |y| < a$, $a > 0$, atunci $\left|\frac{x+y}{a^2-xy}\right| < \frac{1}{a}$.

e) Dacă $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|a| < 1$, atunci $\left|\frac{x+y+a(1+xy)}{1+xy+a(x+y)}\right| < 1$.

39. Rezolvați inecuațiile:

a) $|x-1| \le 2$; b) $|x-1| \le a$, $a > 0$; c) $|x-a| \le 2$, $a \in \mathbb{R}$;
d) $|x-a| \le b$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$; e) $|x-1| \ge 2$; f) $|x-1| \ge a$, $a > 0$;
g) $|x-a| \ge 2$, $a \in \mathbb{R}$; h) $|x-a| \ge b$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$; i) $|x-1| < |x-2|$;
j) $|x-a| < |x-2|$, $a < 2$; k) $|x-a| < |x-b|$, $a < b$; l) $|x-1| + |x-2| > 3$;
m) $|x-a| + |x-2| > a + 2$, $0 < a < 2$; n) $|x-a| + |x-b| \le a + b$, $0 < a < b$;
o) $|x-1| + |x-2| + |x-3| > 6$;
p) $|x-a| + |x-b| + |x-c| > a + b + c$, $0 < a < b < c < 2a + 2b$.

40. Rezolvați ecuațiile:

a) $|x-2|\cdot|x+3| = |x+1|\cdot|x+6|$; b) $|x-1| - 3|x+1| = 6$;
c) $|x-2| - 3|x+2| = 12$; d) $|x-a| - 3|x+a| = 6a$, $a > 0$;
e) $|x| + |x-1| = 1$; f) $|x| + |x-a| = a$, $a > 0$; g) $|x-1| + |x+1| = 2$;
h) $|x-a| + |x+a| = 2a$, $a > 0$; i) $|x| + |x-1| + |x-2| = 3$;
j) $|x| + |x-1| + |x-2| = 3$; j) $|x| + |x-a| + |x-2a| = 3a$, $a > 0$;
k) $|x| + |x-a| + |x-b| = a + b$, $0 < a < b \le 2a$.

41. Rezolvați ecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $\frac{x^2}{3} + \frac{12}{x^2} = 2\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right) + 5$; b) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$;
c) $(4x + 3)^2(2x + 1)(x + 1) = 75$; d) $(3x - 1)(4x - 1)(6x - 1)(12x - 1) = 5$;
e) $(x + 2)(x + 3)(x - 4)(x - 5) = 44$; f) $(x + 2)^4 + (x + 6)^4 = 194$;
g) $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) = (x + 2)^2 + (x + 4)^2 + (x + 6)^2 + (x + 8)^2 + 5$;
(GM 8/1977)
h) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x - 6) = 12$; i) $(x - 1)(x - 2)(x + 4)(x + 5) = -8$;
j) $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 = 0$; k) $(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 12$;
l) $(x + a)^4 + (x + a + 2)^4 = 12$, $a \in \mathbb{R}$; m) $\frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{1}{2x^2-8x+7} = 1$;

n) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^4+\left(x+\frac{5}{3}\right)^4=16$; o) $\left(x-\frac{a}{3}\right)^4+\left(x+\frac{5a}{3}\right)^4=16a^4$, $a\in\mathbb{R}^*$;

p) $x^2+x=\frac{2}{x^2+x+1}$; r) $x^2+x=\frac{a^2+a}{x^2+x+1}$, $a\in\mathbb{R}$; s) $(x-1)^2+\frac{1}{x^2-2x}=3$;

t) $(x-a)^2+\frac{a}{x^2-2ax}=a^2+a+1$, $a\in\mathbb{R}$; u) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=2$;

v) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=a(a-1)$, $a\in\mathbb{R}$.

42. Rezolvați ecuațiile iraționale:

a) $\sqrt{6-x}+\sqrt{14+x}=6$; b) $\sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+23-10\sqrt{x-2}}=3$;

c) $\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}+\frac{a+b}{2}=x$, $a<b$; d) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

e) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$; f) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2x^2-4x}$; g) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}=2$;

h) $\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}=\sqrt{b-a}$, $a\le b$; i) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=6$;

j) $\sqrt{50-x}+\sqrt{x+15}=9$; k) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a+1}=|a|+|a+1|$, $a\in\mathbb{R}$;

l) $\sqrt{a+bx}+\sqrt{c+dx}=\sqrt{a+c+bx+dx}$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$;

m) $\sqrt{5x^2+2x+9}=4x^2+3x-3$; n) $\sqrt{x+2}+\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x^2+4}-2$;

o) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$ *(Bac 1998)*; p) $x=\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ *(GM 9/ 1995)*.

43. a) Rezolvați ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{97-x}=5$.

b) Rezolvați inecuația $\sqrt{x}+\sqrt{97-x}\ge 5$.

44. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$; b) $x^2+a^2x+12a\sqrt{x+a^2}=36$, $a\in\mathbb{R}$;

c) $x^2+a^2x+2ab\sqrt{x+a^2}=b^2$, $a, b\in\mathbb{R}$; d) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=6$;

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}+\ldots+\sqrt{x+n^2}=\frac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

45. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=3$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{y-b}+\sqrt{z-c}=\frac{x+y+z}{2}.$$

46. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{\frac{x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\frac{5}{2}$; b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$.

47. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}=\sqrt{2(b-a)}+(2x-a-b)^2$, unde $a\le b$.

(GM 8/1989)

48. Rezolvați ecuațiile:

a) $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$; b) $\left[\frac{x+3}{4}\right]=\frac{x+1}{3}$; c) $\left[\frac{x+5}{2}\right]=\frac{x+8}{3}$; d) $\left[\frac{x+9}{4}\right]=\frac{x+14}{5}$;

e) $\left[\frac{x+1}{2}\right]=\frac{x-1}{3}$; f) $\left[\frac{x+2}{3}\right]=\frac{x-2}{4}$; g) $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{3x-1}{2}$; h) $\left[\frac{3x+1}{4}\right]=\frac{4x-1}{3}$;

i) $\left[\frac{x+2n+1}{n+3}\right]=\frac{x+2n-1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ fixat; j) $\left[\frac{x+4n+1}{2n}\right]=\frac{x+6n+2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ fixat;

k) $\left[\frac{x+n}{n+1}\right]=\frac{x-n}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ fixat; l) $\left[\frac{nx+1}{n+1}\right]=\frac{(n+1)x-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

49. Determinați cardinalul mulțimii $M = \left\{\frac{n^2+2}{n^2+2n} \,\middle|\, n=\overline{1,100}\right\}$.

50. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 + mx - 22 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (m+4)x + 14 = 0\}$ și $M = \{m \in \mathbb{R} \mid A \cap B = \varnothing\}$. Determinați $S = \sum_{m \in M} m$.

51. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

(Admitere Facultatea de Matematică, 1984)

52. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuațiile $x^2 + x + m = 0$ și $x^2 + x - m = 0$ au același număr de rădăcini reale.

53. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 - (3a-4)x - 6(a-1) = 0\}$ și
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid bx^2 - bx + 6(b-1) = 0\}$.
Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $A \cap B$ să aibă exact 2 elemente.

54. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că ecuația $\frac{b+c}{x-a}+\frac{c+a}{x-b}+\frac{a+b}{x-c}=3$ are toate rădăcinile reale.

55. Fie $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3x^3-x^2+2}{5x^2-3x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$. Determinați $S = \sum_{x \in A} x$.

56. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{3x^2-12x+19}{x^2-4x+5} \in \mathbb{Z}\right\}$. *(RMT 2/1984)*

57. Arătați că ecuația $2x^2 - (m-2)x + 3m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ nu poate avea ambele rădăcini întregi.

58. Determinați numărul elementelor mulțimii

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} \,\middle|\, x_n = \frac{n^2-n+4}{n^2+1},\ n=\overline{1,100}\right\}.$$

59. Determinați parametrul real m astfel încât $-3 < \frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1} < 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

60. Folosind metoda inducției matematice demonstrați egalitățile:

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

d) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

e) $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

f) $2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$;

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

h) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $1! \cdot 1 + 2!\ 2 + 3! \cdot 3 + ... + n! \cdot n = (n + 1)! - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

j) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

k) $\frac{(n+1)(n+2)...(n+n)}{2^n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

61. Folosind metoda inducției matematice demonstrați inegalitățile:

a) $2^n \geq n + 1, n \in \mathbb{N}$; b) $2^n > 2n + 1, n \geq 3$; c) $2^n > 3n + 1, n \geq 4$;
d) $2^n > 4n + 1, n \geq 5$; e) $2^n > n^2, n \geq 5$; f) $2^n \geq n^2 - 1, n \in \mathbb{N}$; g) $2^n \geq n^2 + 7, n \geq 5$;
h) $2^n > n^3, n \geq 10$; i) $2^n \geq n^3 + 24, n \geq 10$; j) $3^{n+1} > 3n^2 + 2n + 1, n \in \mathbb{N}$;

k) $3^n \geq \frac{n^2(n-1)^2}{2} + 9, n \geq 3$; l) $2^{n+2} > 8n - 1, n \geq 1$;

m) $(1 + a)^n \geq 1 + na, a \geq 1, n \in \mathbb{N}$ (*inegalitatea Bernoulli*);

n) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, n \geq 1$; o) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot ... \cdot \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}, n \geq 1$;

p) $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n}, n \geq 1$;

r) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2}, n \in \mathbb{N}^*$.

62. Folosind metoda inducției matematice demonstrați relațiile de divizibilitate:

a) $(3^{n+1} + 2n - 1) \vdots 4,\ n \in \mathbb{N}$; b) $(4^n + 6n - 1) \vdots 9, n \in \mathbb{N}$;

c) $[(p + 1)^n + p(p - 1)n - 1] \vdots p^2,\ n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$; d) $(10^n - 9n - 1) \vdots 81,\ n \in \mathbb{N}$;

e) $(11^n - 10n - 1) \vdots 100,\ n \in \mathbb{N}$; f) $[(p + 1)^n - pn - 1] \vdots p^2, p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$;

g) $(n^3 + 11n) \vdots 6,\ n \in \mathbb{N}$; h) $(16^n - 9n - 7) \vdots 84,\ n \in \mathbb{N}^*$;

i) $(4^{n+2} + 5^{2n+1}) \vdots 21,\ n \in \mathbb{N}$; j) $(3^{2n+3} + 40n - 27) \vdots 64,\ n \in \mathbb{N}$;

k) $[n + 1)(n + 2) ... (n + n)] \vdots 2^n,\ n \in \mathbb{N}^*$; l) $(3^{2n+1} + 3 \cdot 5^{2n+1}) \vdots 17,\ n \in \mathbb{N}$;

m) $(2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^{n-1} - 1) \vdots 8,\ n \in \mathbb{N}^*$; n) $(13^{n+1} + 6 \cdot 3^n + 5) \vdots 24,\ n \in \mathbb{N}$.

63. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 + 2(m + n)x + m + 2n$, unde $m \in \mathbb{R}^*$ este variabil și $n \in \mathbb{R}$ este fixat.

a) Arătați că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o dreaptă.

b) Fie A, B punctele de intersecție ale unei parabole oarecare cu axa $x'x$ și F proiecția vârfului V al parabolei pe $x'x$. Arătați că oricare ar fi m, $2VF = |n|AB$.

c) Arătați că toate parabolele familiei trec printr-un punct fix.

64. Fie familia de funcții de gradul al doilea:
$f_m(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^2$, unde $m \in \mathbb{R}$.
Arătați că toate parabolele familiei trec printr-un punct fix.

65. Fie familia de funcții de gradul al doilea:
$f_{m,n}(x) = (m^2 + n^2 + 1)x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^2 - n^2 + 1$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.
Arătați că toate parabolele familiei trec printr-un punct fix.

66. Determinați funcțiile de gradul al doilea astfel încât punctele $A(-1, 3)$, $B(3, 3)$ aparțin graficului și are un minim în punctul $x = 1$.

67. Fie familia de funcții de gradul al doilea: $f_m(x) = mx^2 - (2m - 1)x + m - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$. Determinați m astfel încât vârfurile parabolelor asociate acestor funcții să se găsească pe prima bisectoare.

68. Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă $\dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - 3x + 6} \geq -1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

69. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^4 + (1 - m)x^3 - x^2 - (m + 1)x - m = 0$ să aibă toate rădăcinile reale.

70. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m^2$, unde $m \in \mathbb{R}$ este fixat.

a) Demonstrați că $f(x) \geq \dfrac{3m^2}{4}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația $(f \circ f)(x) = 3mf(x)$ și determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația să aibă rădăcinile reale.

c) Determinați o valoare $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $f(a) \in \mathbb{N}$, unde $m \in \mathbb{Z}$.

71. Determinați valorile parametrului real m astfel încât ambele rădăcini ale ecuației $x^2 - 2mx - 1 = 0$ să fie reale și cuprinse în intervalul $[-2, 2]$.

72. Se consideră ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Arătați că dacă ecuațiile au rădăcini reale, atunci a, b, c au același semn.

73. Se consideră ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Demonstrați că dacă ecuațiile au o rădăcină comună, atunci $ab + bc + ca < 0$.

74. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile ecuației
$(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + m = 0$ să aparțină intervalului $(0, 2)$.

75. Fie ecuația $x^2 - (m^4 - 2)x + 1 = 0$, $m \geq \sqrt{2}$ având rădăcinile x_1, x_2.
Calculați $x_1^3 + x_2^3$.

76. a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că: $f(x) \geq f\left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că: $f(x) \geq f\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *(OM 1994)*

77. a) Determinați $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x - 3) + 1 \leq x \leq f(x) - 2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x - a - 1) + 1 \leq x \leq f(x) - a$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

c) Determinați $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(ax + b) \leq ax \leq f(ax) + b$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

78. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(x-1)^3 + (x-2)^3 = 9$.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(x-a)^3 + (x-b)^3 = a^3 + b^3$, $a, b \in \mathbb{R}$.

79. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + ax + a^2}$, $a > 0$. Arătați că $f(\mathbb{R}) = \left[-\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{3a}\right]$.

80. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - ax + a^2}$, $a > 0$.

Arătați că imaginea funcției f este $\mathrm{Im}\, f = \left[-\dfrac{1}{3a}, \dfrac{1}{a}\right]$.

81. Arătați că nu există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:
a) $f(x) + f(-x) = 2x + 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
b) $f(x) + f(-x) = ax + b$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ sunt fixate;
c) $f(x) + f(1-x) = 2x + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
d) $f(x) + f(1-x) = ax + b$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$ și $b \in \mathbb{R}$ sunt fixate;
e) $f(-x) + f(x-1) = 3x + 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
f) $f(-x) + f(x-1) = ax + b$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$ și $b \in \mathbb{R}$ sunt fixate.

82. Determinați funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ care admite pentru $x = m$ un maxim egal cu $m(7 + m)$ și trece prin punctul $A(1, 9m - 1)$.

83. Arătați că dacă ecuațiile $x^2 - mx + n = 0$ și $x^2 - (m + n)x + mn = 0$ au o singură rădăcină comună, atunci $m = n + 1$ și rădăcina comună este $x_0 = n$.

84. Dacă $2(b_1 + b_2) = a_1a_2$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, atunci cel puțin una dintre ecuațiile $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ și $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ are rădăcini reale.

85. a) Fie $x, y, z, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + 2y + 3z = a$. Să se afle a știind că minimul sumei $x^2 + y^2 + z^2$ este 14.
b) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = a$. Să se afle a astfel încât minimul sumei $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ să fie $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

86. Găsiți o relație independentă de m între rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $(m + 6)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

87. Fie ecuațiile $x^2 + (a + b - c)x - 2ab = 0$, $x^2 + (b + c - a) - 2bc = 0$, $x^2 + (a + c - b)x - 2ac = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Arătați că cel puțin una dintre ecuații are rădăcinile reale.

88. Fie ecuațiile: $x^2 + (a - b + c)x - 2ab = 0$, $x^2 + (b - c + a) - 2bc = 0$, $x^2 + (c - a + b)x - 2ac = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Arătați că cel puțin una dintre ecuații are rădăcinile reale.

89. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuațiile $(m - n)x^2 + (m + n - 1)x + 4 = 0$ și $(m + n)x^2 + (2m + 3n - 3)x + 8 = 0$ să aibă aceleași rădăcini.

90. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - 2(m - 1)x - 2m + 1 = 0$, să verifice relația: $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2} \geq \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

91. Determinați minimul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a| + |x - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

92. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2(m + 2)x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x + m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficele celor două funcții să aibă 2 puncte comune distincte.

93. Fie ecuațiile $(m + 3)x^2 + (m + 2)x + m - 2 = 0$ și $mx^2 + (m + 1)x + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care cele două ecuații au o rădăcină comună.

94. Arătați că numărul elementelor mulțimii $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2(x^2 + y^2) + 5xy = 14\}$ este egal cu 8.

95. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $\sqrt{2|x| - 2x} = 5m - x$ are trei rădăcini distincte.

96. Fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{2xy}{x + y}\right)$, $\forall x, y \in (0, +\infty)$.

Demonstrați că $f(x) + f(y) + f(z) = 3f\left(\frac{3xyz}{xy + yz + zx}\right)$, $\forall x, y, z \in (0, +\infty)$. *(OM, 1994)*

97. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ cu proprietatea $f(x + 1) = \frac{1}{1 - f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, este periodică.

98. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea $f(a + x) - f(a - x) = 4ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$ este fixat.

99. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to [5, 10]$ cu proprietatea că

$f(x + 2) = 5 + \sqrt{10f(x) - f^2(x)}$. Arătați că f este periodică.

100. Fie $a > 0$, $b > 0$ și funcția $f : \mathbb{R} \to [a, 2a]$ care verifică relația

$f(x + b) = a + \sqrt{2a\,f(x) - f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătați că f este periodică.

101. Rezolvați inecuația $\left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \leq 1$. *(Bacalaureat 1998)*

102. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c, x are loc inegalitatea: $(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a) \geq (a + b + c)^2x^2$.

103. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 - x + 1}$ să fie $\mathrm{Im}f = [-3, 2]$.

104. Fie A mulțimea tuturor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relația $ab[f(xy) + f(xz)] - a^2f(x)f(yz) \geq b^2$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, unde a, b sunt numere fixate din intervalul $(0, +\infty)$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A.

105. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left|\frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

106. Determinați funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface condiția: $(f \circ f)(x) = 4f(x^2) - 4f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

107. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(ax + b) \leq ax \leq f(ax) + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde a și b sunt numere reale date. *(RMT 1/1961)*

108. Determinați mulțimea valorilor funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x-2)(3-x)(4-x)$.

109. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție dată și $a \in \mathbb{R}$ fixat. Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația $2f(x-a) + 3f(a-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

110. Determinați imaginea funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)^2}$.

111. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ = distanța de la x la cel mai apropiat punct din intervalul $[1, 2]$. Reprezentați grafic funcția $f \circ f$.

112. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuațiile $2x^2 - (3m + 1)x + 12 = 0$ și $4x^2 - (9m + 2)x + 36 = 0$ să admită o rădăcină comună.

113. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $mx^2 - 2(m-2)x - m - 10 = 0$ să aibă două rădăcini reale de semne contrare. *(Bacalaureat, 1998)*

114. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $E(x) = \dfrac{x^2+(m+1)x+m+2}{x^2+x+m}$ să aibă sens și să fie strict pozitivă pentru orice x real. *(Bacalalureat, 1998)*

115. Determinați numerele naturale a și b astfel încât ecuația $x^2 - abx + a + b = 0$ să aibă rădăcinile întregi.

116. Determinați condiția necesară și suficienta pentru ca

$$ax^2 + bx + c \le \frac{a+b+c}{3}(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

117. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $3x^2 + 5x - 3 = 0$, calculați expresia

$$E = \frac{10x_1^2+3x_1+5}{x_1^2+1} + \frac{10x_2^2+3x_2+5}{x_2^2+1}.$$

118. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3, m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *(Bacalalureat, 1998)*

119. Rezolvați ecuația: $\dfrac{a}{x-b} + \dfrac{b}{x-a} = 2, a, b \in \mathbb{R}$. *(GM 12 / 1984)*

120. Fie ecuația $x^2 + (5-m)x + 5 - m^2 = 0$ cu rădăcinile x_1 și x_2.

a) Arătați că $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{R}$. b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} < 0$.

121. a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(f(x)) = 2x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Calculați $f(1)$.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(f(x)) = ax^2 - (2a-1)x + a, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$ este fixat. Calculați $f(1)$.

122. a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2 - 3x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Calculați $f(2)$.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2 - (2a-1)x + a^2, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, fixat. Calculați $f(a)$.

123. a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(f(x)) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Calculați $f(1)$.

b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(f(x)) = ax - a + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in (1, +\infty)$ este fixat. Calculați $f(1)$.

124. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemele:

a) $\begin{cases} x+y+xy=29 \\ x+y-xy=-11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=75 \\ x^2-xy+y^2=25 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^5-y^5=31 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x^5-y^5=33 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x^3+y^3=a^3+b^3 \\ x^5-y^5=a^5-b^5 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$; g) $\begin{cases} 3(x^2+1)(y^2+1)=20xy \\ 3(x+1)^2(y+1)^2=64xy \end{cases}$;

h) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=5xy \\ (x+1)^2(y+1)^2=18xy \end{cases}$; i) $\begin{cases} x^2+y=a \\ x+y^2=a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$; j) $\begin{cases} x^2-3y=9 \\ y^2-4x=11 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} (x-y+1)^2=z^2-9 \\ (x+y-1)^2=9z-3z^2 \end{cases}$; l) $\begin{cases} (x-y+1)^2=z^2-k^2 \\ (x+y-a)^2=k^2z-kz^2 \end{cases}$, $k>0$;

m) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx+z=7 \end{cases}$; n) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{cases}$; o) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$.

2. Geometrie și trigonometrie

1. Fie d o dreaptă pe care se fixează n puncte echidistante $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$. Se notează cu M mijlocul segmentului $[A_1A_n]$. Arătați că pentru orice punct P din plan, exterior dreptei d are loc egalitatea: $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\ldots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PM}$.

2. Fie P un punct interior triunghiului echilateral de centru O. Dacă P_1, P_2, P_3 sunt proiecțiile lui P pe laturile triunghiului, să se arate că: $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.

3. a) Dacă diametrul $[MN]$ al cercului $\mathcal{C}(O, R)$ se rotește în jurul centrului O și punctul A este fix, arătați că produsul $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ este constant.

b) O secantă variabilă dusă prin punctul A taie un cerc în B și C. Arătați că produsul $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ este constant. (Constanta se numește **puterea punctului A față de cerc.**)

4. a) Dacă I este mijlocul segmentului $[AB]$ și M un punct oarecare, atunci $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Aflați locul geometric al punctelor M pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte date este constantă.

c) Determinați locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de două cercuri date. (Acest loc geometric se numește **axa radicală a celor două cercuri**.)

5. Arătați că într-un patrulater oarecare $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

6. Printr-un punct fix P, interior unui cerc, se duc două coarde variabile AB și CD, $AB \perp CD$. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=$ const.; b) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$; c) $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=$ const.

7. a) Determinați locul geometric al punctelor M cu proprietatea $MA^2 + MB^2 = k$ (k constant), unde A și B sunt puncte date.

b) Determinați locul geometric al punctelor M cu proprietatea $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$ (k constant), unde A, B, C sunt puncte date necoliniare.

8. Dacă $[AD$ este bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC, $D \in (BC)$, arătați că: $AD^2 = b \cdot c - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

9. Fie $[AB]$ și $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc cu centrul în O, care se intersectează în P. Arătați că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

10. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor unui patrulater $ABCD$.
Să se arate că $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă pentru orice punct M are loc egalitatea: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

11. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC. Arătați că:
a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

12. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ având centrele de greutate G și G'.
Arătați că $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Determinați o condiție necesară și suficientă ca două triunghiuri să aibă același centru de greutate.

13. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N și P astfel încât: $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}} = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}}$. Arătați că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

14. Fie M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$ și P mijlocul segmentului $[MN]$. Determinați coordonatele punctului P în funcție de coordonatele vârfurilor A, B, C, D.

15. Pentru $M \in (AB)$ să se arate că următoarele propoziții sunt echivalente:
a) M este mijlocul segmentului $[AB]$.
b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
c) Există $P \in \mathcal{P}$ astfel încât $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$, unde $\mathcal{P}$ este planul real.
d) Pentru orice $X \in \mathcal{P}$ are loc egalitatea $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{XM}$.

16. Să se arate că următoarele propoziții sunt echivalente:
a) $ABCD$ este paralelogram. b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
d) Există $P \in \mathcal{P}$ astfel încât $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.
e) Pentru orice $x \in \mathcal{P}$ are loc egalitatea $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$.
f) Dacă $O \in AC \cap BD$, atunci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

17. Să se arate că următoarele propoziții sunt echivalente:
a) G este centrul de greutate al triunghiului ABC.
b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
c) Pentru orice $x \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XG}$.

18. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = n\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AF} = p\overrightarrow{AB}$, unde $m, n, p \in (0, 1)$.
Să se arate că următoarele propoziții sunt echivalente:
a) Triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate.
b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. c) $m = n = p$.

19. Pe laturile AB, BC, CD, DE, EF, FA ale unui hexagon regulat $ABCDEF$ se consideră punctele M, N, P, Q, R, S astfel încât $BN = NC$ și $ER = RF$. Demonstrați că dreapta care unește centrele de greutate ale triunghiurilor MNP și QRS este perpendiculară pe AD dacă și numai dacă $AM + DQ = AS + DP$. *(Concurs „Cezar Ivănescu“, 2002, Cristinel Mortici)*

20. Se consideră în plan un patrulater $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$ și $H \in (DA)$ astfel încât $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{BF}{FC} = \dfrac{CG}{GD} = \dfrac{DH}{HA} = k$. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor (AC), (BD), (EG), (FH). Să se demonstreze că $PM \cdot QM = PN \cdot QN$.

21. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 și $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = 7$, $\dfrac{CN}{NB} = 2$. Notăm cu P intersecția dreptelor CM și DN.
a) Arătați că $13\overrightarrow{AP} = 12\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AD}$.
b) Să se calculeze AP. *(OM 2002, București, L. Panaitopol)*

22. Fie A, B, C, D patru puncte pe o dreaptă d. determinați pe d un punct M astfel încât: $\|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\overrightarrow{BM}\| = k \cdot \|\overrightarrow{CM}\| \cdot \|\overrightarrow{DM}\|$, unde k este dat. *(relația lui Apollonius)*

23. Fie M un punct în planul dreptunghiului $ABCD$. Arătați că:
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$; b) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$; c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

24. Fie M, N, P mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Arătați că: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$.

25. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și fie punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{BA'} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $k \neq 0$. Arătați că pentru orice punct M din planul punctelor A, B, C avem: $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ și deduceți că triunghiurile ABC și $A'C'B'$ au același centru de grutate. *(relația lui Pappus)*

26. Fie ABC un triunghi și $ABDE$, $ACFG$ pătratele construite pe laturile $[AB]$, $[AC]$ în exteriorul triunghiului ABC. Arătați că $CE \perp BG$.

27. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și fie M un punct în planul acestui triunghi. Arătați că $2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9\overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2$.

28. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \perp CD$ și fie E, F mijloacele laturilor $[AD]$, $[BC]$. Demonstrați că:
a) $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$; b) $4\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2$; c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

29. Într-un triunghi ABC, fie a, b, c lungimile laturilor și I centrul cercului înscris. Arătați că:
a) $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. *(OM 2004, Vaslui)*

30. Determinați coordonatele vârfurilor unui triunghi ABC în care sunt date ortocentrul $H(-3, 10)$, centrul cercului circumscris $O(-2, -3)$ și mijlocul $D(1, 3)$ al laturii $[BC]$.

(OM, et. jud., 2004)

31. Fie A, B, P, Q patru puncte distincte într-un plan astfel încât unghiurile $\sphericalangle PAQ$ și $\sphericalangle PBQ$ să fie drepte. Arătați că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}$.

32. Fie $ABCD$ un patrulater astfel încât $AD = BC$. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$, $[BD]$. Arătați vă vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{PQ}$ sunt perpendiculari și că $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB}$.

33. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu catetele de lungimi $AB = 3$, $AC = 4$. Pe ipotenuza $[BC]$ se consideră punctele D, E, F, G astfel încât $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC}$.

34. Știind că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt perpendiculari și că $\| \vec{u} \| = \frac{2}{3}$, iar $\| \vec{v} \| = \frac{3}{2}$, calculați $\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$ și $\| \vec{u} - \vec{v} \|$.

35. Arătați că dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ au $\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$, iar măsura unghiului format de cei doi vecori este $120°$, atunci $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} \|$.

36. Fie dreptunghiul $ABCD$ și M un punct oarecare. Arătați că $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

37. Fie pătratul $ABCD$ și M un punct oarecare pe cercul înscris în pătrat.
Arătați că suma $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ este constantă.

38. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și M un punct oarecare din planul triunghiului. Arătați că:

a) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$; b) $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$;

c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$; d) $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

39. Fie pătratul $ABCD$ și M, N, P și Q mijloacele laturilor lui.
Arătați că pentru orice punct L din planul pătratului există relația:
$LA^2 + LB^2 + LC^2 + LD^2 = LM^2 + LN^2 + LP^2 + LQ^2 + AB^2$.

40. Fie triunghiul echilateral ABC și M un punct oarecare pe cercul circumscris triunghiului.
Arătați că suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este constantă.

41. Fie triunghiul ABC și punctul M aparține planului.
Determinați poziția punctului M pentru care suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este minimă.

42. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă
$b + c = 2(R + r)$.

43. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC = b$, $BC = a$) în care $m(\sphericalangle BAC) = 20°$.
Arătați că există relația $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

44. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și D piciorul înălțimii din A.
Arătați că: $AD > AB + AC - BC$.

45. Demonstrați că un triunghi ABC pentru care $(p-b)\text{ctg}\frac{C}{2} = p\,\text{tg}\frac{B}{2}$ este isoscel.

46. În triunghiul ABC fie m_a lungimea medianei din B și l_b lungimea bisectoarei interioare din B. Arătați că:

a) $m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$; b) $l_b^2 = \frac{4ac}{(a+c)^2}p(p-b)$.

47. În triunghiul ABC, cu laturile de lungimi a, b, c, fie O centrul cercului circumscris, G centrul de greutate, H ortocentrul, I centrul cercului înscris, R raza cercului circumscris și r raza cercului înscris. Arătați că:

a) $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$; b) $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$;
c) $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (*relația lui Euler*).

48. Arătați că în orice triunghi ABC au loc relațiile:

a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$; b) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$.

49. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $b\cos C + c\cos B = a$; b) $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2-c^2}{a}$;
c) $2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = a^2+b^2+c^2$;
d) $b\cos B + c\cos B = a\cos(B-C)$.

50. Să se arate că triunghiul ABC în care $\frac{a+c}{b} = \text{ctg}\,\frac{B}{2}$ este dreptunghic.

51. Arătați că dacă în triunghiul ABC avem $\text{ctg}\,A + \text{ctg}\,B = 2\,\text{ctg}\,C$, atunci $a^2+b^2 = 2c^2$.

52. Arătați că în orice triunghi ABC au lor relațiile:

a) $r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$; b) $S = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$; c) $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

d) $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; e) $p = r\left(\text{ctg}\frac{A}{2}+\text{ctg}\frac{B}{2}+\text{ctg}\frac{C}{2}\right)$;

f) $p = r\,\text{ctg}\frac{A}{2}\text{ctg}\frac{B}{2}\text{ctg}\frac{C}{2}$; g) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{R}$;

h) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$;

i) $a\,\text{ctg}\,A + b\,\text{ctg}\,B + c\,\text{ctg}\,C = 2(R+r)$;

j) $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} = \frac{p}{R+r}$; k) $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p}$.

53. Arătați că în orice triunghi ABC au loc inegalitățile:

a) $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$; b) $\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}$;

c) $\frac{R}{r} \ge \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc} \ge 2$; d) $r \le \sqrt{\frac{abc}{8p}}$;

e) $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b+c}$; f) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$;

g) $\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)} \le p$; h) $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$;

i) $Rr \le \frac{2p^2}{27}$; k) $\frac{R}{2r} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$; l) $p \ge \sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{bc}$;

m) $2(\sin B + \sin C) \le 3 + 2\cos A$; n) $\frac{R}{r} \ge \frac{b}{c}+\frac{c}{b}$;

o) $\frac{1}{2Rr} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$; p) $18Rr \le ab + bc + ca \le \frac{4p^2}{3}$;

r) $\frac{R}{2r} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$; s) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{9R}{4S}$; t) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 36r^2$;

u) $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \le \frac{27R^2}{4}$; v) $m_a + m_b + m_c \le \frac{9R}{2}$; x) $36r^2 \le ab + bc + ca \le 9R^2$.

54. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă

$$\sqrt{p(p-a)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}=\sqrt{2bc}.$$

55. Demonstrați că triunghiul ABC în care $a = 2b\sin\frac{A}{2}$, $A \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ este isoscel.

56. Transformați în produs suma $S = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ și scrieți identitatea condiționată de $x + y + z = \pi$.

57. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă este îndeplinită relația $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$.

58. Demonstrați că în orice triunghi ABC au loc relațiile:

a) $h_a = 2R\sin B\sin C$; b) $\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

c) $1 + \cos A\cos(B - C) = \frac{b^2+c^2}{4R^2}$.

Cercetați dacă există triunghiuri în care $a^2 + 2bc\cos A = 8R^2$.

59. Dacă în triunghiul ABC are loc relația $b^2 + bc + c^2 = a^2$, determinați măsura unghiului A și demonstrați inegalitatea $\operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C \ge 3$.

60. Calculați $E = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$.

61. Dacă $x + y + z = 2\pi$, atunci $\sin x + \sin y + \sin z = 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$.

62. Fie ABC un triunghi. Arătați că are loc echivalența:

$$\operatorname{ctg} A = 2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) \Leftrightarrow \cos A = \frac{2a^2}{bc}.$$

63. Demonstrați că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 4$.

64. Dacă $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, calculați $\frac{2\sin 2\alpha + 3\cos 2\alpha}{3\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha + 7\sin\alpha\cos\alpha}$.

65. Calculați produsele: $P_1 = \text{tg } 1° \cdot \text{tg } 2° \cdot \text{tg } 3° \cdot ... \cdot \text{tg } 88° \cdot \text{tg } 89°$ și $P_2 = \text{ctg } 1° \cdot \text{ctg } 2° \cdot \text{ctg } 3° \cdot ... \cdot \text{ctg } 88° \cdot \text{ctg } 89°$.

66. Demonstrați că dacă a și b sunt numere reale astfel încât egalitatea $a \sin x + b \sin 2x = a \cos x + b \cos 2x$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $a = b = 0$.

67. Demonstrați că dacă a, b și c sunt numere reale astfel încât egalitatea $a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $a = b = c = 0$.

68. Demonstrați că dacă $\alpha = \frac{\pi}{11}$, atunci $\frac{\cos\alpha \cdot \cos 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = -\frac{1}{2}$.

69. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\cos(a + b) = 0$. Arătați că $\sin(a + 2b) = \sin a$.

70. Demonstrați că au loc egalitățile:

a) $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$;

b) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

71. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea

$(\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2 + ... + \text{tg } \alpha_n)(\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \alpha_2 + ... + \text{ctg } \alpha_n) \geq n^2, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
În ce caz are loc egalitatea?

72. Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ sunt adevărate inegalitățile:

a) $|\sin(x + y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$;
b) $|\sin(x - y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$;
c) $|\sin(x + y)| \leq |\cos x| + |\cos y|$;
d) $|\sin(x - y)| \leq |\cos x| + |\cos y|$.

73. Arătați că relația $\sqrt{\sin^4 x + m\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + m\sin^2 x} = 3$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m = 4$.

74. Arătați că $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

75. a) Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x + \cos^6 x = 1$.

b) Fie $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Arătați că $\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^2 b = 1$ dacă și numai dacă $a = b$.

Indicații și răspunsuri

Capitolul 1

Pag. 21

8. a) 81; b) 27; c) $\frac{1}{1024}$; d) $-\frac{1}{27}$; e) –1; f) $\frac{1}{36}$; g) 1. **9.** a) 81; b) $\frac{1}{945}$; c) $\frac{2}{9}$. **10.** $x = \frac{16}{9}$.
11. $(-9)^{17} < (-27)^{11} < (-8)^{11} < (-4)^{16}$. **13.** a) Dacă $m < 3$ este pozitivă; dacă $m = 3$, este zero; dacă $m > 3$, este negativă; b) dacă $m < \frac{4}{5}$, este pozitivă; dacă $m = \frac{4}{5}$, este zero; dacă $m > \frac{4}{5}$, este negativă; c) este pozitivă oricare ar fi $m \neq 3$; pentru $m = 3$, este zero.

14. a) a^3; b) a^8; c) a^{12}; d) a^{23}; e) $\frac{1}{a^5}$. **15.** a) y^3; b) $(a + b)^2$; c) $3^n + 2^n$.
17. b) $(x^{n-1} + 1)(x^{n+1} + 1)$; c) $(x^m + y^n)(x^n + y^m)$; d) $(x^m + 1)(x^n + 1)(x^p + 1)$. **18.** $a = (12^{n+1})^2$.
19. a) Presupunem prin absurd că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m^2 + 1 = k^2$. Avem $(k + m)(k - m) = 1$. Cum divizorii în $\mathbb{Z}$ ai lui 1 sunt 1 și –1, putem avea $k - m = k + m = 1$ sau $k + m = k - m = -1$. În ambele cazuri rezultă $m = 0$, contrar ipotezei; b) Avem $49^2 + 2\ \ 7^n + 2 = (7^n + 1)^2 + 1$ și se aplică rezultatul de la a). **20.** a) 3^k; b) 1.

22. Notăm $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $t \geq 2$ deoarece $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$. Avem egalitate dacă și numai dacă $t = 2 \Leftrightarrow x = y$.
23. Presupunem că $a \geq b \geq c$. Avem $a - b + c > 0$, $a + b - c > 0$, iar pentru $-a + b + c$ apar două situații:
1) dacă $-a + b + c < 0$, atunci inegalitatea din enunț este evidentă;
2) dacă $-a + b + c > 0$, atunci notăm $-a + b + c = x$, $a - b + c = y$, $a + b - c = z$ și inegalitatea din enunț devine $xyz \leq \frac{1}{8}(x + y)(y + z)(z + x), x, y, z > 0$. Avem $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$, $\sqrt{yz} \leq \frac{1}{2}(y + z)$, $\sqrt{xz} \leq \frac{1}{2}(x + z)$.
Înmulțind aceste inegalități membru cu membru, obținem $xyz \leq \frac{1}{8}(x + y)(y + z)(z + x)$.

Pag. 28

1. $A = [-6; 9)$; $B = (-\infty; 5]$; $C = (-2; 0)$; $D = (4; +\infty)$; $E = (-10; 0]$; $F = [-1; +\infty)$; $G = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$; $H = (-\infty; 0{,}3)$. **2.** $A \cup B = [-2; 6]$; $A\ \ B = [0; 3]$; $A \setminus B = [-2; 0)$; $B \setminus A = (3; 6]$;
$A \times B = [-2; 3] \times [0; 6] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3 \text{ și } 0 \leq y \leq 6\}$.
3. $A = (-4; 7)$; $B = (0; 5)$; $A \cup B = (-4; 7) = A$; $A \cap B = (0; 5) = B$; $A \setminus B = (-4; 0]$; $B \setminus A = \varnothing$; $A \times B = (-4; 7) \times (0; 5) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -4 < x < 7 \text{ și } 0 < y < 5\}$; $A \cap (0; +\infty) = (0; 7)$; $B \cap (-\infty; 0) = (-4; 0]$. **4.** $m \in [-3; 0)$. **5.** $m = 14$. **7.** $a = 4, b = 1$. **8.** $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B = [-3; 5]$; $A \cap C = [2; 7]$; $B \cap C = [2; 5]$ $B \setminus C = (-\infty; 2)$; $C \cap (A \cup B) = C \cap \mathbb{R} = C$. **9.** $a = 18$. **10.** $x \in (2; 5)$.

Pag. 34

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = xyz$. **12.** Avem $x > 0$, $y > 0$ și $x^2 - y^2 = \frac{4a + 6}{a(a + 1)(a + 2)(a + 3)}$. Pentru $a > 0$ avem $x^2 - y^2 > 0$ sau $x > y$. Pentru $a < -3$ avem $x^2 - y^2 < 0$, deci $x < y$.
20. Avem $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}\right)^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n + 1)}$. Cum $2n \leq 2\sqrt{n(n + 1)} < 2n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\left(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}\right)^2\right] = 4n + 1$.
21. Avem $S = \left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[1 + \frac{1}{x + 1}\right] + \ldots + \left[1 + \frac{1}{x + k - 1}\right] = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + 1 + \left[\frac{1}{x + 1}\right] + \ldots +$

$+ 1 + \left[\frac{1}{x+k-1}\right] = k + 1$, deoarece dacă $\frac{1}{2} < x < 1$, atunci $1 < \frac{1}{x} < 2$ și deci $\left[\frac{1}{x}\right] = 1$, iar $\left[\frac{1}{x+1}\right] = \left[\frac{1}{x+2}\right] = ... = \left[\frac{1}{x+k-1}\right] = 0$ pentru $k > 2$.

22. a) $x \in [4, 5)$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x = \frac{1}{2}$; d) $x \in \varnothing$; e) $x \in \varnothing$.

23. Din ipoteză rezultă că $1 = x(y + z) + yz = x(2 - x) + yz = -x^2 + 2x + yz$, deci $(x - 1)^2 = yz$. Aceasta arată că y și z au același semn. Analog, x și y *au același semn* și pentru că $x + y + z = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. În aceste condiții, relațiile din ipoteză sunt echivalente cu: $x + y + z = 2$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Fie $x = \frac{4}{3} - a$, $y = \frac{4}{3} - b$, $z = \frac{4}{3} - c$. Din prima relație rezultă $a + b + c = 2$, iar din a doua $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Deci $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Obținem $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$, $0 \leq y \leq \frac{4}{3}$, $0 \leq z \leq \frac{4}{3}$.

24. Folosim inegalitățile $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$, $z^2 + x^2 \geq 2zx$. Din acestea se obține prin adunare $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$. Ținând seama de ipoteză rezultă $3 \geq x^2 + y^2 + z^2 +$ $+ 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$. Prin extragerea radicalului rezultă concluzia.

25. a) $x = -2$ și $x = 3$; b) $x = 2$; c) $x \in \{-1, 2\}$.

29. Pentru orice $x \in [3; 4]$ are loc inegalitatea $(x - 3)(x - 4) \leq 0$, ceea ce conduce la $x^2 + 12 \leq 7x$, de unde $x + \frac{12}{x} \leq 7$. Cum $x, y, z \in [3; 4] \Rightarrow x + \frac{12}{x} \leq 7$, $y + \frac{12}{y} \leq 7$, $z + \frac{12}{z} \leq 7$, inegalități care, adunate membru cu membru, conduc la inegalitatea din enunț.

30. Folosind că media geometrică este mai mare sau egală cu media armonică pentru perechile de numere pozitive $\left(\frac{a}{b+c}, 1\right)$; $\left(\frac{b}{c+a}, 1\right)$; $\left(\frac{c}{a+b}, 1\right)$ obținem $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$. Adunăm cele trei inegalități. Egalitatea ar avea loc dacă și numai dacă $\left(\frac{a}{b+c} = 1, \frac{b}{c+a} = 1, \frac{c}{a+b} = 1\right) \Leftrightarrow (a = b + c, b = c + a, c = a + b)$, de unde prin adunarea egalităților avem $a + b + c = 2(a + b + c) \Leftrightarrow 1 = 2$, fals.

Pag. 43

1. b), c) și d). **2.** a) 0; b) 0; c) 1. **3.** a) 1; b) 1; c) 0; d) 1; e) 0. **4.** a) 1; b) 0; c) 0 etc.

Pag. 50

1. $p(135)$ adevărată; $q(135)$ falsă; $p(400)$ falsă; $q(400)$ adevărată.

2. $16 - 8x + 2x^3 - x^4 = (2 - x)(2 + x)(4 - 2x + x^2)$; $p(0)$: „4 divide numărul $2 \cdot 2 \cdot 4$" este adevărată; $p(1)$: „4 divide numărul $1 \cdot 3 \cdot 3$" este falsă. Deci $(\exists\, x \in \mathbb{Z})p(x)$ este adevărată, $(\forall\, x \in \mathbb{Z})p(x)$ este falsă.

3. a) $\{3\}$; b) $\{-4; 1\}$; c) $\{2\}$; d) $\{2\}$; e) $[-1; 1]$; f) $\{(0; 1)\}$; g) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4. a) adevărat; b) adevărat; c) adevărat. **5.** a) adevărată; b) falsă; c) adevărată.

6. $A(1; 3)$ adevărată; $A(2; 2)$ falsă; $B(1; 3)$ falsă; $C(4; 2)$ falsă; $D(5; 6)$ adevărată.

9. $(a, b) \in \{(1; 2); (1; 2); (2; 1); (2; 2); (1; 3)\ (3; 1); (1; 4); (2; 3); (3; 2); (4; 1); (1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1); (1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2); (6; 1)\}$.

10. a) „$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 > x$"; b) „$\exists\, x \in \mathbb{N}, x \;\vdots\; 5$"; c) „$\exists\, \Delta ABC, AB = AC = BC$".

Pag. 58

2. a) Răspunsul este negativ. Contraexemplu: Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Avem $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3\}$ și $B \neq C$; b) Răspunsul este negativ. Contraexemplu: Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{1, 5\}$. Avem $A \cap B = A \cap C = \{1\}$ și $B \neq C$.

4. a) Dacă $n = 2n_1 + 1$ $(n_1 \in \mathbb{N})$, atunci $2^n + 3^n = 2^{2n_1+1} + 3^{2n_1+1} =$ $= (2 + 3)(2^{2n_1} + 2^{2n_1-1} \cdot 3 + ... + 2 \cdot 3^{2n_1-1} + 3^{2n_1}) = 5(2^{2n_1} + ... + 3^{2n_1})$ și deci a_n nu este prim.

Dacă $n = 2n_1$ ($n_1 \in \mathbb{N}$), atunci $a_n = 2^n + 3^n = 2^{2n_1} + 3^{2n_1} = 4^{n_1} + 9^{n_1}$. Dacă n_1 este impar, atunci $4^{n_1} + 9^{n_1} = (4 + 9)(4^{n_1-1} + 4^{n_1-2} \cdot 9 + ... + 4 \cdot 9^{n_1-2} + 9^{n_1-1}) = 13(4^{n_1-1} + ... + 9^{n_1-1})$ și deci a_n nu este prim. Dacă n_1 este par, adică $n_1 = 2n_2 \Rightarrow n = 2(2n_2) = 2^2 n_2$ ($n_2 \in \mathbb{N}$). Continuând raționamentul prin inducție, deducem că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = 2^k$;
b) Răspunsul este negativ. Contraexemplu: Fie $n = 2^3 = 8$. Avem $a_n = 6817 = 17 \quad 401$.

Pag. 60 – Test de evaluare

1. $xyz = 0$. **2.** $a - 1 = 1 - b = x$; $a^4 + b^4 = (1 + x)^4 + (1 - x)^4 = 2x^4 + 12x^2 + 2 \geq 2$. **3.** $x \in [1; +\infty)$. **4.** $x \in \{-13; -10; -7; -4; -1\}$. **5.** $P(x, y)$: „$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$“. a) 0; b) 0.
6. $A = \{0; 2\}$, $B = \{1; 3\}$, $A \cup B = \{0; 1; 2; 3\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = \{0; 2\}$, $A \times B = \{(0; 1); (0; 3); (2; 1); (2; 3)\}$.

Capitolul 2

Pag. 67

4. $a_3 = -7$, $a_{10} = -28$, $a_{100} = -298$, $a_{1000} = -2098$. **5.** a) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 13$, $a_4 = 21$, $a_5 = 31$, $a_6 = 43$, $a_7 = 57$, $b_1 = 4$, $b_2 = 7$, $b_3 = 14$, $b_4 = 25$, $b_5 = 40$, $b_6 = 95$; b) $a_n = b_n \Leftrightarrow n = 2$, deci $a_2 = b_2 = 7$.
6. a) 3, 10, 9 și 100; b) $\frac{23}{44}$. **7.** a) $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; b) $S_n = \frac{n}{n+1}$ sau

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 = \frac{n}{n+1}$. **8.** a) $\alpha = 1$, $\beta = 1$. **9.** a) $a_n = n$; b) $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$;
c) $a_n = n^2 + 2n$; d) $a_n = a^{2^{n-1}}$; e) $a_n = \frac{1}{n}$; f) $a_n = n!$; g) $a_n = \frac{1}{n!}$; h) $a_n = = 2$; i) $a_n = 2$;
j) $a_n = 2^{n-1}$; k) n^2; l) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; m) $a_n = 3^{n-1}$. **10.** a) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$; b) $a_n = 3n + 1$; c) $a_n = a \quad n + 1$; d) $a_n = a \quad n + b$; e) $a_n = n$; f) $a_n = n^2$; g) $a_n = n^3$.
11. a) $0 \leq a_n < 1$; b) $\frac{3}{5} \leq a_n < \frac{2}{3}$; c) $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{3} \leq a_n < 1$; e) $a_n \in \{0, 2\}$; f) $9 \leq a_n \leq 1$;
g) $0 \leq a_n \leq \frac{8}{9}$; h) $\frac{3}{4} \leq a_n < 1$. **12.** a) $a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict crescător; b) $a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict descrescător; c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict descrescător; d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict descrescător; e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict descrescător; f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict crescător; g) $a_{n+1} - a_n = a^n(a - 1) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict crescător; h) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este monoton.

Pag. 73

2. a) $a_{10} = 28$; b) $a_{10} = 47$; c) $a_{10} = -33$; d) $a_{10} = 4{,}5$. **3.** $a_1 = -11$, $a_2 = -4$; $a_3 = 3$; b) $a_1 = -12$, $a_2 = -9$; $a_3 = -6$; c) $a_1 = 23$, $a_2 = 16$; $a_3 = 9$; d) $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_2 = 1$; $a_3 = \frac{2}{3}$.
4. a) $a_1 = -13$, $a_3 = -7$; $a_5 = -1$; b) $a_1 = -7$, $a_3 = -13$ $a_5 = -19$.
5. a) $r = 3$, $a_{11} = 34$; b) $r = 2$, $a_{11} = 17$; c) $a_1 = 1$; $r = 2$; $a_{11} = 21$; d) $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_{11} = \frac{11}{2}$.
6. a) $a_1 = -2$, $r = 3$, $a_{11} = 28$, $a_{21} = 58$, $a_{31} = 88$; b) $a_1 = 3$, $r = -5$, $a_{11} = -47$, $a_{21} = -97$, $a_{31} = -147$.
7. a) $a_{20} = 8{,}5$; b) $a_{25} = -5{,}8$; c) $a_{100} = -102{,}5$; d) $a_{13} = \frac{44}{7}$.
8. a) $a_1 = 1$; b) $a_1 = -1$; c) $a_1 = 100$; d) $a_1 = -18{,}5$. **9.** a) $a_1 = 2$, $r = 11$; b) $a_1 = 109$, $r = -1$; c) $a_1 = 4$, $r = 3$; d) $a_1 = -2$, $r = 5$. **10.** a) $a_1 = -1$, $r = 2$; b) $a_1 = -2$, $r = -5$; c) $a_1 = -\frac{1}{5}$, $r = \frac{3}{5}$; d) $a_1 = 1$, $r = -\frac{4}{3}$. **11.** a) $a_1 = 4$, $r = 3$; b) $a_1 = 2$, $r = 3$; c) $a_1 = 1$, $r = 2$; d) $a_1 = 2$, $r = 1$.
12. a) $S_{100} = 5000$; b) $S_{100} = 5000$; c) $a_{100} = -96$; $S_{100} = -4650$; d) $a_{100} = 97$; $S_{100} = 4750$.

13. a) $a_1 = -2, r = 2$; b) $a_1 = -1, r = 4$; c) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$; d) $a_1 = \frac{3}{4}, r = -\frac{1}{2}$.

14. a) da; $a_n = 2n + \frac{1}{2}$; b) da; $a_n = 4n + 1$; c) nu; $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$; d) nu; $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$.

15. Dacă r și s sunt rațiile progresiilor aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, atunci $r + s$ este rația progresiei $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. **16.** a) $x = 46$; b) $x = 1$.

17. a) $S_{18} = 81$; b) $S_{30} = 225$; c) $a_n + a_{n+3} + a_{n+6} + a_{n+9} = 2n + 8 \Leftrightarrow 2a_1 + (2n + 7)r = n + 4$; $S_{2n+8} = \dfrac{(a_1 + a_{2n+8})(2n+8)}{2} = [2a_1 + (2n + 7)r](n + 4) = (n + 4)(n + 4) = (n + 4)^2$.

18. a) $S_{30} = 900$; b) $S_{19} = 361$; c) $\begin{cases} S_n = n^2 \\ S_m = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + (n-1)r = 2n \\ 2a_1 + (m-1)r = 2m \end{cases} \Leftrightarrow r = 2, a_1 = 1$;

$a_p = a_1 + (p - 1)\ \ 2 = 2p - 1$; $S_p = \dfrac{(a_1 + a_p)p}{2} = p^2$.

19. a) $x = 1$; b) $x \in \{1, 6\}$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x = 1$.

20. a) $a_n = 4n - 3$; $r = 4$; b) $a_n = 6n + 5$; $r= 6$; c) $a_n = 10n - 5$; $r = 10$; d) $a_n = n - \frac{1}{2}$; $r = 1$.

21. a) $\begin{cases} a_1 + (n-1)r = 2m+1 \\ a_1 + (m-1)r = 2n+1 \end{cases} \Leftrightarrow r = -2, a_1 = 2m + 2n - 1, S_{m+n} = (m + n)^2$; b) $\begin{cases} a_1 + (n-1)r = a\cdot m + b \\ a_1 + (m-1)r = a\cdot n + b \end{cases}$

$\Leftrightarrow r = -a$, $a_1 = a(m + n) + b - a$; $S_m = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \dfrac{(2am + an + 2b - a)\cdot n}{2}$.

24. a) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}\right) + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}\right) + \ldots + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) =$
$= \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{n-1}{a_1a_n}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} =$
$= \dfrac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{r} + \dfrac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{r} + \ldots + \dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{r} = \dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{r} = \dfrac{a_n - a_1}{r\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

25. a) $S = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + .. + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$; b) $S = \dfrac{n}{2n+1}$.

26. a) $S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$; b) $S = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]$; c) $S = \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{1}{a_1a_2} - \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$.

27. a) $\div -3, 1, 5$; $r= 4$; b) $\div -17, -3, 11$; $r= 14$; c) $\div\ a - 2b, a, a + 2b$; $r = 2b$.

28. a) Presupunem că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ sunt în progresie aritemtică; atunci $\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow 12 = 2 + 5 + 2\sqrt{10} \Leftrightarrow 5 = 2\sqrt{10}$, imposibil; b), c), d), e) analog cu a).

29. a) Presupunem că există o progresie aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ să fie termeni ai acesteia. Prin urmare există $n, m, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{2} = a_n$, $\sqrt{5} = a_m$, $\sqrt{7} = a_k$.

Scriind formula termenului general avem: $\begin{cases} a_1 + (n-1)r = \sqrt{2} \\ a_1 + (m-1)r = \sqrt{5} \\ a_1 + (k-1)r = \sqrt{7} \end{cases}$. Scăzând ecuațiile două câte două

obținem: $\begin{cases} (n-m)r = \sqrt{2} - \sqrt{5} \\ (m-k)r = \sqrt{5} - \sqrt{7} \end{cases}$. Împărțind ultimele două relații rezultă: $\dfrac{n-m}{m-k} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$, imposibil

deoarece $\dfrac{n-m}{m-k} \in \mathbb{Q}$ și $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

30. Fie $a_m \in \mathbb{Q}$, $a_n \in \mathbb{Q}$. Scriind formula termenului avem: $\begin{cases} a_1 + (m-1)r \in \mathbb{Q} \\ a_1 + (n-1)r \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Rezultă că diferența numerelor de mai sus este număr rațional, adică $(m - n)r \in \mathbb{Q}$, deci $r \in \mathbb{Q}$. Deducem apoi că $a_1 \in \mathbb{Q}$. Fie a_k un termen arbitrar al progresiei. Obținem $a_k = a_1 + (k - 1)r \in \mathbb{Q}$, deoarece $a_1, k, r \in \mathbb{Q}$.
31. $a_n = 3n - 2$ sau $a_n = -3n + 10$. **32.** $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 3$; $a_1 = -1$; $r = 2$.

33. $r = -2ax$; $a_n = (a + x)^2 - 2ax(n - 1)$; $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = n[(a + x)^2 - ax(n - 1)]$.

Pag. **80**

2. a) $b_2 = 6$, $b_1 = 3$; b) $b_2 = 4$, $b_1 = -2$. **3.** a) $b_n = 3\;\; 2^{n-1}$; b) $b_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$; c) $b_n = \dfrac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}}$;

d) $b_n = \sqrt{2}\;\; (\sqrt{3})^{n-1}$. **4.** a) $b_1 = 4$, $b_2 = 16$; b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$; c) $b_1 = \dfrac{2}{3}$, $b_2 = -\dfrac{2}{9}$.

5. a) $b_n = 3\;\; 2^{n-1}$; b) $b_n = 2\;\; (-3)^{n-1}$; c) $b_n = \dfrac{1}{2}\;\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$; d) $b_n = -0{,}5\;\; (\sqrt{2})^{n-1}$.

6. a) $b_1 = 1$, $q = 2$; b) $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$; c) $b_1 = 2$, $q = 3$; d) $b_1 = 3$, $q = \dfrac{1}{2}$.

7. a) $S_5 = 242$; b) $S_5 = 1{,}5^6 - 1$; c) $S_7 = 2(2^7 - 1)$; d) $S_8 = 0$.

8. a) $q = \dfrac{1}{3}$, $S_6 = \dfrac{728}{972}$; b) $q = 2$, $S_8 = \dfrac{254}{3}$; c) $q = 2$, $S_{10} = 1023$; d) $q = -1$, $S_{12} = 0$.

9. a) $q = 3$; da; b) $q = \dfrac{1}{4}$; da; c) $q = \dfrac{3}{5}$; da; d) $q = \dfrac{1}{3}$; da; e) $q = -\dfrac{1}{2}$; da;
f) nu există $q \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $b_{n+1} = q\;\; b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; nu; g) nu; h) nu; i) nu.
10. a) nu; b) nu; c) nu; d) da, $b_1 = 4$, $q = 5$.

11. $\begin{cases} b_1 + b_2 = 9 \\ b_3 + b_4 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q = 9 \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q) = 9 \\ b_1 q^2 (1+q) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} b_1 = -9 \\ q = -2 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13 \\ b_4 + b_5 + b_6 = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 13 \\ b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5 = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 13 \\ b_1 q^3 (1 + q + q^2) = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$.

13. a) $q = 2$, $b_1 = 3$; b) $q = 2$, $b_1 = \dfrac{2a}{7\cdot 2^n}$; c) $q = \pm 2$; $b_1 = \pm 2$; d) $q = \pm 3$; $b_1 = \pm 3$; e) $q = 2$, $b_1 = 1$;
f) $q = -2$, $b_1 = 1$ sau $q = 2$, $b_1 = \dfrac{3}{7}$; g) $q = 2$, $b_1 = \dfrac{a}{3}$; h) $q = 2$, $b_1 = \dfrac{a}{7}$ sau $q = -2$, $b_1 = \dfrac{a}{3}$.

14. a) $x \in \{0, 1\}$; b) $x \in \{0, 1\}$; c) $x = 1$; d) $x = 1$; e) $x \in \left\{-\dfrac{4}{5}, 1\right\}$; f) $x = 0$;
g) pentru $a = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; pentru $a \neq 1$, $x = 0$; h) $x = 3$.

15. a) $S = 2047$; b) $S = \dfrac{3^{10} - 1}{2}$; c) $S = \dfrac{1023}{1024}$; d) $S = \dfrac{171}{512}$; e) $S = 683$; f) $S = \dfrac{3^{11} + 1}{4}$;

g) $S = \dfrac{a^{11} - 1}{a - 1}$, $a \neq 1$; $S = 11$ pentru $a = 1$; h) $S = \dfrac{a^{11} + 1}{a + 1}$, $a \neq -1$; $S = 11$ pentru $a = -1$.

16. a) $b_1 = S_1 = 4$; $q = \dfrac{b_2}{b_1} = 3$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$ sau $b_n = S_n - S_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;
b) $b_1 = 12$, $q = 5$, $b_n = 12 \cdot 5^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; c) $b_1 = a(b - 1)$, $q = b$, $b_n = a(b - 1)b^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
17. a) Avem $b_1 \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1} = 4$ și $b_1 \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} = 6$. Împărțind relațiile avem: $\dfrac{1}{q^3 + 1} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{1}{2}$.

Din prima relație obținem $\dfrac{b_1}{q - 1} = \dfrac{4}{\frac{1}{2} - 1} = -8$; $S_9 = b_1\;\; \dfrac{q^9 - 1}{q - 1} = \dfrac{b_1}{q - 1}\;\; (q^9 - 1) = -8\left(\dfrac{1}{8} - 1\right) = 7$;
b) $S_9 = 70$; c) $S_9 = 7a$; d) $S_9 = 700$.

18. a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x \in \varnothing$; d) $x = \dfrac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$, dacă $a + c - 2b \neq 0$; $x \in \varnothing$, dacă $a + c - 2b = 0$ și $b^2 - ac \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$, dacă $a = b = c$.

19. a) $S = a \cdot \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$, $a \neq 1$; b) $S = a^2 \cdot \dfrac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1}$, $a^2 \neq 1$; c) $S = \dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{a^n} - 1\right)$, $a \notin \{0, 1\}$; d) $S = \dfrac{1}{1-a^2}\left(\dfrac{1}{a^{2n}} - 1\right)$, $a \notin \{-1, 0, 1\}$; e) $S = \dfrac{1}{a^2 - 1}\left(a^{2n+2} - \dfrac{1}{a^{2n}} - a^2 + 1\right) + 2n$, $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

20. a) $S = \dfrac{n}{q}$; b) $S = \dfrac{1}{b_1} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{q} - 1}$, $q \notin \{0; 1\}$; c) $S = \dfrac{1}{b_1^2} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{q^2}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{q^2} - 1}$, $q^2 \notin \{0; 1\}$; d) $S = \dfrac{1}{b_1^3} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{q^3}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{q^3} - 1}$, $q \notin \{0; 1\}$; e) $S = b_1^2 \cdot \dfrac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}$, $q^2 \neq 1$; f) $S = \sqrt{b_1} \cdot \dfrac{(\sqrt{q})^n - 1}{\sqrt{q} - 1}$, $q \neq 1$; g) $S = \dfrac{n}{\sqrt{q} - 1}$, $q \neq 1$.

21. a) Presupunem că în progresia geometrică $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ există trei termeni egali cu 11, 12, 13. Adică: $b_m = 11$, $b_n = 12$, $b_k = 13 \Leftrightarrow b_1 q^{m-1} = 11$, $b_1 q^{n-1} = 12$, $b_1 q^{k-1} = 13$. Împărțind două câte două relațiile obținem: $q^{m-n} = \dfrac{11}{12}$, $q^{n-k} = \dfrac{12}{13}$, imposibil deoarece $m, n, k \in \mathbb{N}^*$; b), c), d) și e) se demonstrează analog. **22.** $b_{n+1} = \dfrac{1}{3} b_n$; $q = \dfrac{1}{3}$.

Pag. 89

1. a) Numerele sunt consecutive, se completează cu 16, 17, 18; b) numerele sunt pare consecutive, se completează cu 16, 18, 20; c) $\dfrac{5}{6}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{7}{8}$.

2. a) Regula de formare a șirului este 1, $1 + 4 = 5$, $5 + 4 = 9$, $9 + 4 = 13$; șirul se completează cu 17, 21, 25; b) formula șirului este $a_n = 1 + 4(n - 1)$, $\forall\, n \geq 1$; $a_{150} = 1 + 4 \cdot 149 = 597$, $a_{505} = 1 + 4 \cdot 504 = 2017$, $a_{2004} = 1 + 4 \cdot 2003 = 8013$; c) singurul care face parte din șir este $5009 = 1 + 4 \cdot 1252 = a_{1253}$ și este al 1253-lea termen; d) $S_{26} = 1 + 5 + 9 + \ldots + 97 + 101$; $S_{26} = 101 + 97 + 93 + \ldots + 5 + 1$. Adunăm egalitățile membru cu membru (tehnica lui Gauss) și obținem $S_{26} = \dfrac{26 \cdot 102}{2} = 1326$.

3. Grupăm numerele de la 0 la 999 999 999 în perechi astfel: (0; 999 999 999), (1; 999 999 998), (2; 999 999 997), ..., (k, 999 999 999 – k), ..., (499 999 999; 500 000 000). Sunt 500 000 000 de perechi, iar suma cifrelor din fiecare pereche este 81; deci suma cifrelor tuturor perechilor este 81 · 500 000 000 = 40 500 000 000. La aceasta se adaugă suma cifrelor numărului 1 000 000 000, deci suma cerută este 40 500 000 001.

4. a) În scrierea numărului N există 9 numere de o cifră, 99 – 10 + 1 = 90 numere de două cifre, 999 – 100 + 1 = 900 numere de trei cifre și 2004 – 1000 + 1 = 1005 numere de patru cifre; în total sunt 9 · 1 + 90 · 2 + 900 · 3 + 1005 · 4 = 6 909 cifre;
b) pentru scrirea numerelor de o cifră și două cifre se folosesc 9 + 90 · 2 = 189 cifre; rămân 2005 – 189 = 1816 cifre pentru a scrie numere de trei cifre. Cum 1816 = 3 · 605 + 1, rezultă că a 2005-a cifră este prima cifră a celui de-al 606-lea număr de trei cifre, adică prima cifră a lui 605 $\Rightarrow$ a 2005-a cifră a lui N este 6;
c) Numărul cifrelor cu care sunt scrise primele 999 de numere (numere de o cifră, două și trei cifre) este 1 · 9 + 2 · 90 + 3 · 900 = 2889, numărul cifrelor cu care sunt scrise primele 9 999 numere (numerele de o cifră, două, trei și patru cifre) este 1 · 9 + 2 · 90 + 3 · 900 + 4 · 9000 = 38 889. În concluzie, cifra aflată pe locul 34 788 în N este a unui număr de patru cifre. Numărul de cifre cu care s-au scris numerele de patru cifre până la poziția 34 788 este 34 788 – 2 889 = 31 899 = 4 · 7974 + 3, deci pe poziția 34 788 se află a treia cifră a celui de-al 7975-lea număr scris cu patru cifre, deci este a treia cifră a numărului 7975, adică 7.

5. $A = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ... + (1\underbrace{000...000}_{2004 \text{ cifre}} - 1) = 10 + 100 + 1000 + ... +$
$+ 1\underbrace{000...000}_{2004 \text{ cifre}} - 1 \cdot 2004 = \underbrace{111...111}_{2004 \text{ cifre}}0 - 2004 = \underbrace{111...111}_{2000 \text{ cifre}}09106$.
Numărul A are $2000 + 1 = 2001$ cifre de 1.
6. Fie numărul $\overline{abc}$. Deoarece numărul este par, c poate fi 0 sau 2. Pentru $a \in \{1, 2, 3\}$, b poate lua orice valoare $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Numere de forma $\overline{ab0}$ sunt $3 \cdot 4 = 12$, iar numere de forma $\overline{ab2}$ sunt $3 \cdot 4 = 12$, în total 24 de numere. Acestea sunt: {100, 110, 120, 130, 200, 210, 220, 230, 300, 310, 320, 330, 102, 112, 122, 132, 202, 212, 222, 232, 302, 312, 322, 332}. Suma lor este $S = (1 + 2 + 3 + 4) + (2 + 3 + 4 + 5) + (3 + 4 + 5 + 6) + (3 + 4 + 5 + 6) + (4 + 5 + 6 + 7) + (5 + 6 + 7 + 8) = 10 + 14 + 18 + 18 + 22 + 26 = 108$.
7. 270 de numere. **8.** 1234 de pagini. **9.** 1210 de numere. **10.** 1200 de numere.

Pag. 90 – Test de evaluare

1. Progresie geometrică cu rația $q = 3$, $u_5 = 810° = \frac{9\pi}{2}$, deci $u_5 - 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.
2. $a_1 = 1$, $r = 1$ sau $a_1 = 3$, $r = -1$. **3.** $\frac{n(n+1)}{2} \cdot x + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \Leftrightarrow x = 1$.
4. $\begin{cases} \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = n \\ \frac{(a_1 + a_m) \cdot m}{2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_n = 2 \\ a_1 + a_m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + (n-1)r = 2 \\ 2a_1 + (m-1)r = 2 \end{cases}$. Obținem $(m - n)r = 0$, cu $m \neq n$, deci $r = 0$ și $a_1 = 1$. $S_{m+n} = m + n$.
5. $\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 7 \\ b_1 \cdot b_1q \cdot b_1q^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 7 \\ b_1^3q^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 7 \\ b_1q = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} b_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$.
6. $\frac{S_3}{S_6} = \frac{2}{3} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{2}$; $\frac{b_1}{q-1} = -8\pi$; $S_9 = \frac{b_1}{q-1}(q^9 - 1) = -8\pi \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = 7\pi$.
7. $\left(2 + \sqrt{x+1}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x}\right)\left(\frac{31}{7} + \sqrt{x}\right) \Rightarrow x = \frac{16}{9}$.
8. $S = b_1^{-2} \cdot \frac{(q^{-2})^n - 1}{q^{-2} - 1}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. **9.** $b^2 = ac \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$.

Capitolul 3

Pag. 103

1. a) f_1 este descrescătoare pe $\mathbb{R}$; f_2 este crescătoare pe $\mathbb{R}$; f_3 este descrescătoare pe $(-\infty; 0]$ și crescătoare pe $[0; +\infty)$; f_4 este crescătoare pe $(-\infty; -2)$, constantă pe $[-2; 2]$, crescătoare pe $(2; 4]$ și descrescătoare pe $[4; +\infty)$; b) $f_1(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; 3)$; $f_1(x) = 0$ pentru $x = 3$; $f_1(x) < 0$, $\forall x \in (3; +\infty)$; $f_2(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; -2)$; $f_2(x) = 0$ pentru $x = -2$; $f_2(x) > 0$, $\forall x \in (2; +\infty)$; $f_3(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; $f_3(x) = 0$, pentru $x = \pm 4$; $f_3(x) < 0$, $\forall x \in (-4; 4)$; $f_4(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$; $f_4(x) = 0$ pentru $x \in \{-3; 6\}$; $f_4(x) > 0$, $\forall x \in (-3; 6)$; c) $G_{f_1} \cap Ox = \{A_1(3; 0)\}$, $G_{f_1} \cap Oy = \{B_1(0; 3)\}$; $G_{f_2} \cap Ox = \{A_2(-2; 0)\}$, $G_{f_2} \cap Oy = \{B_2(0; 2)\}$; $G_{f_3} \cap Ox = \{A_3(-4; 0);\ A_3'(4; 0)\}$, $G_{f_3} \cap Oy = \{B_3(0; -3)\}$; $G_{f_4} \cap Ox = \{A_4(-2; 0);\ A_4'(6; 0)\}$, $G_{f_4} \cap Oy = \{B_4(0; 5)\}$.
2. a) crescătoare; b) $\operatorname{Im} f = (0; +\infty)$; c) i) $f(2) = 1{,}41$; ii) $f(3) = 1{,}75$; iii) $x = 0{,}3$.
3. a) $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$; b) crescătoare; c) fie $T > 0$ astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $\{x + T\} = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $T = 1$.

Pag. 113

1. $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (f+g)(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in(-\infty,0)\\ -x-2, & x\in[0,2)\\ 3x-5, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$; $f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (f-g)(x)=\begin{cases}3-4x, & x\in(-\infty,0)\\ 6-5x, & x\in[0,2)\\ 3-x, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$;

$f\ \ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (fg)(x)=\begin{cases}-3x^2+5x+2, & x\in(-\infty,0)\\ -6x^2+16x-8, & x\in[0,2)\\ 2x^2-6x+4, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$; $\dfrac{f}{g}:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R},\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases}\dfrac{2-3x}{x-1}, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{2-3x}{2x-4}, & x\in[0,2)\\ \dfrac{x-1}{2x-4}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$.

3. a) $h(x)=3f^2(x)-2f(x)+5=g(f(x))$, unde $f(x)=x+2$, $g(x)=3x^2-2x+5$; b) $h(x)=g(f(x))$, unde $f(x)=2x^2-4$, $g(x)=x^3$; c) $h(x)=g(f(x))$, unde $f(x)=x^2$, $g(x)=5x^2-2x+3$; d) $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=-x^2+2x-4$; e) $f(x)=x^2-4x+3$, $g(x)=x^5$; f) $f(x)=x-2$, $g(x)=-2x^2+3x+1$.
5. $(f\circ g\circ h)(x)=24x-11$. **6.** $f(x)=x^2-5x$, $g(x)=x^2+10x+24$.

7. $g(f(x))=\begin{cases}12x+7, & x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]\\ 6x+3, & x\in\left(-\dfrac{2}{3},1\right)\\ 2x^2+3, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$. **8.** $f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x\le-1\\ -x, & -1<x\le0\\ x, & 0<x<1\\ 2-x, & x\ge1\end{cases}$.

9. a) $f\circ g=1_B$ și $g\circ f=1_A$; b)* $f^{-1}=g$, $g^{-1}=f$.
10. $f(0)=f(2)=f(4)=\ldots=f(2k)=0$, $\forall\,k\in\mathbb{N}$, și $f(1)=f(3)=f(5)=\ldots=f(2k+1)=1$, $\forall\,k\in\mathbb{N}$. Funcția f este periodică, de perioadă $T=2$.
11. a) f nu este nici pară, nici impară; b) $\forall\,x\in[-3;4)$ avem $-x\in(-4;3]$, deci putem studia paritatea sau imparitatea doar pe intervalul $[-3;3]$; f este pară pe $[-3;3]$; c) f este impară pe $\mathbb{R}$; d) f este pară pe $\mathbb{R}$.
12. $\forall\,x>0$ avem $-x<0$ și $\operatorname{sgn}(-x)=-1=-\operatorname{sgn}x$; $\forall\,x<0$, avem $-x>0$ și $\operatorname{sgn}(-x)=1=-(-1)=-\operatorname{sgn}x$; pentru $x=0$ avem $-x=0$ și $\operatorname{sgn}(-x)=0=-\operatorname{sgn}x$; în concluzie, sgn este impară și mărginită ($|\operatorname{sgn}x|\le1$).

Pag. 114 – Test de evaluare

1. $A\times B=\{(-1;-2);(-1;0);(-1;1);(0;-2);(0;0);(0;1);(1;-2);(1;0);(1;1);(2;-2);(2;0);(2;1)\}$.
3. $f:\{-2;-1;0;1\}\to\{1;2;3;4\}$; $f(-2)=1$, $f(-1)=2$; $f(0)=3$, $f(1)=4$ sau $f(x)=x+3$, $\forall\,x\in\{-2;-1;0;1\}$.
4. a) $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$; b) f este strict descrescătoare pe $(-\infty;0)$ și strict crescătoare pe $(0,+\infty)$; c) $O(0;0)$; d) $x=0$; e) $x=0$ (axa Oy); f) f pară; g) i) $m>0$, două soluții; ii) $m=0$, o soluție; iii) $m<0$, nici o soluție; h) $x\in[-1;1]$.

5. $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}2f(x)+1, & f(x)\le0\\ 3f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=$

$=\begin{cases}2(2x-1)+1, & x\le0\\ 2(3x-2)+1, & 0<x\le\dfrac{2}{3}\\ 3(3x-2)+2, & x>\dfrac{2}{3}\end{cases}=\begin{cases}4x-1, & x\le0\\ 6x-3, & 0<x\le\dfrac{2}{3}\\ 9x-4, & x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$. Analog: $(f\circ g)(x)=\begin{cases}4x+1, & x\le-\dfrac{1}{2}\\ 6x+1, & -\dfrac{1}{2}<x\le0\\ 9x+4, & x>0\end{cases}$.

Capitolul 4

Pag. 117

1. $f(-1)=-2$, $f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(2)=-10$, $f(5)=-19$, $f(6)=4$.

4. $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (f+g)(x)=\begin{cases}4x+3, & x\le2\\ -9x+11, & 2<x\le5\\ -x-2, & x>5\end{cases}$; $f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (f-g)(x)=\begin{cases}16x-5, & x\le2\\ 3x+3, & 2<x\le5\\ -5x+16, & x>5\end{cases}$;

$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -60x^2 + 46x - 4, & x \le 2 \\ 18x^2 - 54x + 28, & 2 < x \le 5 \\ -6x^2 + 41x - 63, & x > 5 \end{cases}$; $2f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(2f)(x) = \begin{cases} 20x - 2, & x \le 2 \\ -6x + 14, & x > 2 \end{cases}$;

$-4g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (-4g)(x) = \begin{cases} 24x - 16, & x \le 5 \\ -8x + 36, & x > 5 \end{cases}$; $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{10x - 1}{-6x + 4}, & x \in (-\infty;\ 2] \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\} \\ \dfrac{-3x + 7}{-6x + 4}, & x \in (2,\ 5] \\ \dfrac{-3x + 7}{2x - 9}, & x \in (5,\ +\infty) \end{cases}$;

$\dfrac{g}{f} : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{10}, \dfrac{7}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{-6x + 4}{10x - 1}, & x \in (-\infty;\ 2] \setminus \left\{\dfrac{1}{10}\right\} \\ \dfrac{-6x + 4}{-3x + 7}, & x \in (2;\ 5] \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\} \\ \dfrac{2x - 9}{-3x + 7}, & x \in (5,\ +\infty) \end{cases}$;

$f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^2(x) = \begin{cases} 100x^2 - 20x + 1, & x \le 2 \\ 9x^2 - 42x + 49, & x > 2 \end{cases}$; $g^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^2(x) = \begin{cases} 36x^2 - 48x + 16, & x \le 5 \\ 4x^2 - 36x + 81, & x > 5 \end{cases}$.

Pag. 119

1. a) strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$; c) strict crescătoare pe $(-\infty; -3]$, constantă pe $(-3;\ 2]$ și strict descrescătoare pe $(2;\ +\infty)$.

Pag. 121

a) $x \in \left[\dfrac{2}{7};\ +\infty\right)$; b) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{2}{7}\right)$; c) $x \in \left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$; d) $x \in \left(-\infty;\ \dfrac{9}{5}\right]$;

e) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{5}{2}\right) \cup (0{,}4;\ +\infty)$; f) $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{3}\right) \cup (7;\ +\infty)$.

Pag. 125

1. a) $x = \dfrac{1}{3},\ y = -3$; b) $x = \dfrac{11}{17},\ y = -\dfrac{2}{17}$; c) $x = \dfrac{5}{8},\ y = \dfrac{7}{3}$.

2. a) $x = 3, y = 1$; $A(3;\ 1)$ este punctul de intersecție a dreptelor d_1: $4x + y - 13 = 0$ și d_2: $x + 2y - 5 = 0$; b) $x = 1, y = -1$; $B(1; -1)$ este punctul de intersecție a dreptelor d_1: $-5x - 3y + 2 = 0$ și d_2: $4x + 3y - 1 = 0$; c) sistem incompatibil; dreptele d_1: $9x + 7y = 13$ și d_2: $3x - 2y - 13 = 0$ sunt necoplanare; d) $x = a, y = \dfrac{5 - 8a}{3}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$; sistem compatibil nedeterminat; dreptele d_1: $8x + 3y - 5 = 0$ și d_2: $16x + 6y - 10 = 0$ sunt confundate; e) sistem incompatibil; dreptele d_1: $6x - 5y - 2 = 0$ și d_2: $12x - 10y - 3 = 0$ sunt paralele.

Pag. 126

1. a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right\}$.

2. a) Notăm $ax + b = t \Rightarrow x = \dfrac{t - b}{a}$; avem $f(t) = c\,\dfrac{t - b}{a} + d = \dfrac{c}{a}t - \dfrac{bc}{a} + d$, deci $f(x) = \dfrac{c}{a}x - \dfrac{bc}{a} + d$;

b) $f(x) = x^2 - 2x$; c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$; d) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$; e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{(x - 2)^2}$.

3. Făcând $y = x$ în relația (1), aceasta devine $[f(x) - 1]^2 = x^2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, de unde $f(x) = 1 + x$ sau $f(x) = 1 - x$. Prin urmare, $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in A \\ 1 - x, & x \in B \end{cases}$, unde $A \cup B = \mathbb{R}$ și $A \cap B = \varnothing$.

Două funcții verifică relația dată: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \begin{cases} 1+x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ și $f_2(x) = \begin{cases} 1-x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

4. a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; b) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; c) $y = x + 1$. **5.** a) da; b) nu. **6.** a) da; b) da; c) nu.

7. a) $\operatorname{Im} f = \{5, 6, 7, 8, 13\}$; b) $\operatorname{Im} f = \{1, 2\}$. **8.** $\operatorname{Im} f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\operatorname{Im} g = \{-1, 1\}$; $\operatorname{Im} h = \{1, 9\}$.

9. a) Nu; de exemplu, $f_1(0) = -5 \notin \mathbb{N}$; b) Nu; de exemplu, $f_2(1) = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$;

c) Nu; de exemplu, $f_3(1)$ nu are sens; d) Nu; de exemplu, $f_4(1) = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

10. $f(a+b) = f(1) = 1$; $f(a-b) = f\left(\sqrt{2}\right) = 3$; $f(ab) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$; $x = 0$.

11. a) $A = \{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$; b) $\left\{\frac{n+3}{n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1\right\}$.

12. Nu există. Dacă ar exista o astfel de funcție f, ar însemna că simultan am avea $f(1) = 3$ și $f(1) = 4$.

13. $\operatorname{Im} f = \{0; 2; 4; 6\}$. **14.** $x \in \left\{-\frac{7}{3};\ 5\right\}$.

15. Pentru $x \in (-\infty, -2)$ ecuația nu are soluții; pentru $a = -2$, $\forall\, x \in [-2, 2]$ este soluție; pentru $a \in (-2, 2)$, avem soluțiile $x_1 = \frac{a-2}{2}$ și $x_2 = \frac{a+6}{2}$; pentru $a = 2$, avem soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 4$; pentru $a \in (2, 6)$ avem soluția $x = \frac{a+6}{2}$; pentru $a = 6$, $\forall\, x \in [2; 6]$ este soluție; pentru $a \in (6, +\infty)$ ecuația nu are soluții.

16. $f(x) = -x + 2$. **17.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$. **18.** $\operatorname{Im} f = \{-3\} \cup [0, +\infty)$; $\operatorname{Im} g = \{1\} \cup [3, +\infty)$; $\operatorname{Im} h = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. **19.** Din $f(3) = g(3) \Rightarrow a = -1$. **20.** Punem condiția ca $a - 1 = 3$ și $a \neq 2$, rezultă $a = 4$. **22.** a) $m = -1$; c) $f_m(2) = 3$, $\forall\, m \in \mathbb{R}$, deci graficele trec prin punctul fix $A(2, 3)$.

23. $A = [-3, 5]$, $B = \{-1, 3\}$, $C = \varnothing$.

24. a) f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) g este strict descrescătoare pe $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ și constantă pe $(-1; 1)$; c) h este crescătoare pe $\mathbb{R}$; d) l este descrescătoare pe $(-\infty; 3]$ și constantă pe $(3; +\infty)$.

25. $m^2 - m - 12 = 0$ cu $m > 0$, deci $m = 4$. **26.** a) $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; b) $A = \{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\}$. **28.** 8 funcții strict monotone. **29.** $C, D, \mathbb{Z}, H, K, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

30. f_1, f_6 sunt pare; f_4, f_7 sunt impare, iar f_3, f_5, f_8 nu sunt nici pare nici impare.

32. Se proiectează graficul pe axa Oy și avem $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} h = [-1, 2]$, $\operatorname{Im} l = (-\infty, 2]$.

33. a) $\left[\frac{11}{6}, +\infty\right)$; b) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$; c) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$; d) $\left[-1, \frac{1}{4}\right] \cup [2, +\infty)$; e) $(2, 3]$; f) $(-2, 1]$; g) $[-7, 8)$; h) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; i) $(-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [4, +\infty)$; j) $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}, +\infty\right)$.

34. a) $(1, 2)$; b) sistemul are o infinitate de soluții și anume, toate perechile de forma $(5 - 2\alpha, \alpha)$, unde α este un număr real arbitrar; c) sistemul nu are soluții; d) $(\sqrt{3}\,; 1)$.

35. a) $a = -4$; b) pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, $x = -\frac{6}{a-4}$ este soluție unică; c) $a = 4$.

36. a) Dacă $a = 2$, sistemul nu are soluție. Dacă $a \neq 2$, soluția este $\left(\frac{1}{2-a}, \frac{7a-13}{3a-6}\right)$;
b) Dacă $a \neq 4$, soluția este $(0; -5)$. Dacă $a = 4$, sistemul are o infinitate de soluții și anume $(\alpha, 2\alpha - 5)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$; c) Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, soluția este $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$. Dacă $a = 1$, soluțiile sunt de forma $(m, 1 - m)$, unde $m \in \mathbb{R}$, iar dacă $a = -1$, sistemul nu are soluții.

37. a) $[x] = -1$, $[y] = 1$, $S = \{(x, y) \mid x \in [-1, 0], y \in [1, 2)\}$; b) $x = 3{,}9$ și $y = 2{,}4$; c) $x = 3{,}7$, $y = 2{,}1$; d) Notăm părțile întregi ale lui x și y cu m și n, iar părțile fracționare cu α, respectiv β; avem deci $x = m + \alpha$ și $y = n + \beta$, cu $m, n \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Înlocuind în sistem avem $\begin{cases} m+n+\alpha = 13{,}9 \\ m+2n+2\beta = 24{,}3 \end{cases}$, deci $\alpha = 0{,}9$ și $2\beta = 0{,}3$ sau $2\beta = 1{,}3$. Soluțiile sunt (2,9; 11,15) și (3,9; 10,65).

38. a) $x \in \left[-\frac{3}{5};\ \frac{7}{2}\right)$; b) $x \in \left[1;\ \frac{15}{7}\right)$; c) $x \in \left[-\frac{4}{3};\ \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{7}{6};\ \frac{5}{4}\right]$, deci $x \in \varnothing$;

d) $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (5;\ +\infty)$; e) $x \in \left[\frac{3}{8};\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{7};\ 1\right) \cup [9;\ +\infty)$.

Pag. 129 – Test de evaluare

2. b) $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m$; c) $x = \dfrac{1-m}{m} > 0 \Leftrightarrow m \in (0; 1)$; d) $f(0) = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1, m \neq 0$;

e) $f(x) = -3x - 4$; $-6x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{4}{3};\ +\infty\right)$.

3. a) $\begin{cases} 2x+3y = 8 \\ 3x-4y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow d_1 \cap d_2 = \{A(1; 2)\}$; b) $\frac{m}{3} = \frac{3}{-4} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. **4.** $x \in \left[-\frac{9}{5},\ 3\right]$.

Capitolul 5

Pag. 136

1. a) $f(x) = 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{89}{20}$; b) $f(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$; c) $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

2. a) $G_f \cap Ox = \left\{A_1\left(\frac{4+\sqrt{14}}{2};\ 0\right);\ A_2\left(\frac{4-\sqrt{14}}{2};\ 0\right)\right\}$, $G_f \cap Oy = \{B(0; 1)\}$;

b) $G_f \cap Ox = \{A_1(1; 0); A_2(6; 0)\}$; $G_f \cap Oy = \{B(0; 6)\}$; c) $G_f \cap Ox = \{A(2; 0)\}$, $G_f \cap Oy = \{B(0; 4)\}$;

d) $G_f \cap Ox = \left\{A_1(1;\ 0);\ A_2\left(\frac{5}{2}; 0\right)\right\}$, $G_f \cap Oy = \{B(0; 5)\}$. **3.** $x = \frac{7}{6}$; b) $x = 0$; c) $x = \frac{\sqrt{2}}{22}$.

4. a) $S = 7$, $P = 12$; b) $S = 0$, $P = -\sqrt{3}$; c) $S = 2$, $P = 3$. **5.** a) $x^2 - 9x + 14 = 0$; b) $x^2 - 4x = 1 = 0$; c) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$; d) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$; e) $x^2 - 15x + 26 = 0$. **6.** $3y^2 + 26y + 54 = 0$.

7. a) $x = \frac{19}{2}$, $y = -\frac{5}{2}$; b) $x_1 = 5$, $y_1 = -5$ și $x_2 = -5$, $y_2 = 5$; c) $x_1 = 1$, $y_1 = 6$ și $x_2 = 6$, $y_2 = 1$; d) $x_1 = 3$, $y_1 = -2$ și $x_2 = -2$, $y_2 = 3$; e) sistemul nu are soluții.

Pag. 136 – Test de evaluare

1. a) $G_f \cap Ox = \left\{A_1(2, 0),\ A_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$, $G_f \cap Oy = \{C(0; 2)\}$; b) $V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right) \Leftrightarrow V\left(\frac{5}{4};\ -\frac{9}{8}\right)$;

d) $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$. **2.** a) $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$; b) $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m} > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$;

c) $S = x_1 + x_2 = \frac{2(m-3)}{m}$, $P = x_1x_2 = \frac{m+3}{m}$. Eliminând parametrul m între cele două relații obținem: $S + 2P = 4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$.

3. $\frac{m-n}{m+n} = \frac{m+n-1}{2m+3n-3} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow m = 3$ și $n = 1$.

4. a) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

Capitolul 6

Pag. 150

1. a) $f(x) = x^2 + 6x + 1$; b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; c) $f(x) = -2x^2 - x + 1$. **2.** $f(x) = x^2 + x - 8$.
3. $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$. **4.** $y = -x^2 + x - 1$. **5.** $f(x) = x^2 - 4x + 8$. **6.** a) $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$;
b) $f(x) = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}$. **7.** $f(x) = x^2 - 4x + 4$. **8.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x + 1$. **9.** $a = 2, b = 4$.
10. a) $y_{min} = 2$; b) $y_{max} = -9$; c) $y_{min} = -9$; d) $y_{max} = \frac{309}{32}$; e) $y_{max} = 8$.
11. a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty; -1]$ și strict crescătoare pe $[-1; +\infty)$; b) f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$; c) f este strict crescătoare pe $(-\infty; 0]$ și strict descrescătoare pe $[0; +\infty)$; d) f este strict descrescătoare pe $(-\infty; 0]$ și strict crescătoare pe $[0; +\infty)$; e) f este strict crescătoare pe $(-\infty; 2]$ și strict descrescătoare pe $[2; +\infty)$.
12. a) $a = -2$ și n impar; b) $a = 6$ și n par; c) $a = \pm 2$ și n impar; d) $a = \pm 2$ și n par; e) $a = 6$ și n impar; f) $a = 0$ și n par. **13.** a) $m \in [0; 4)$; b) $m = 4$; c) $A(0; 1), B(1; 1)$.
14. a) $m \in (0; 1)$; b)$y_{min} = -2$, deci $m = 2$ sau $m = -1$; c) $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; d) $y = -x^2 + x$.
15. a) $m \in (-\infty; -1]$; b) $m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; c) dreapta $x + y = -2$.
16. a) $\operatorname{Im} f = \left[\frac{1}{3}, 3\right] \Rightarrow y_{max} = 3, y_{min} = \frac{1}{3}$; b) f este strict crescătoare pe $(-\infty; -1)$ și pe $(1; +\infty)$ și strict descrescătoare pe $(-1; 1)$.
18. a) $A(2; 1)$ și $B(2; 3)$; b) $|x_1 - x_2| = \sqrt{6} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 6$ (1). Cum $x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{m}$ și $x_1 \cdot x_2 = \frac{2m-1}{m}$, din (1) rezultă $5m^2 + 8m - 4 = 0$, de unde $m \in \left\{-2; \frac{2}{5}\right\}$.
19. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ **20.** b) Punem condiția $y_V < 1$; c) $m = -\frac{1}{3}$.
21. Notăm $|x| = t$ și trebuie să găsim valorle lui a pentru care $g(t) = t^2 + ta + a^2 - 1 > 0, \forall t \geq 0$. Sunt posibile două cazuri: a) $\Delta < 0$; b) $\Delta \geq 0$ și $t_1, t_2 \in (0; +\infty)$, unde cu t_1 și t_2 am notat rădăcinile eciației $g(t) = 0$.
22. a) Punem condiția $a > 0$ și $\Delta \leq 0$, obținem $a = 1$; b) cum $\Delta \geq 0, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Punem condițiile $a > 0$ și $x_1, x_2 \in [-2, +\infty)$ și obținem $a \geq \frac{1}{2}$.
23. a) $x \in (-\infty, 3) \cup (10, +\infty)$; b) $x \in [9; 11]$; c) $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$; d) $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$; c) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$; f) $x \in (-\infty; -1)$; g) $x \in \mathbb{R}$; h) $x \in \{-1; 1\}$.
24. a) $S = \left\{(10, 3); \left(-\frac{358}{37}, -\frac{97}{37}\right)\right\}$; b) $S = \{(1, 1); (-8, 7)\}$; c) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{15}, -\frac{1}{10}\right)\right\}$; d) $S = \{(-1, -2); (3, 2)\}$; e) $S = \left\{(0, 0); \left(\frac{5}{9}, \frac{5}{27}\right)\right\}$; f) $S = \left\{\left(\frac{1}{9}, -\frac{5}{3}\right); (1, 1)\right\}$.
25. a) $S = \{(1; 1); (-1; -1); (1; -1); (-1; 1)\}$; b) $S = \{(1; 1)\}$; c) $S = \{(2; 5); (5; 2)\}$;

d) $S = \{(-1; 4); (4; -1)\}$; e) $S = \left\{\left(\frac{-12-\sqrt{142}}{2}; \frac{-12+\sqrt{142}}{2}\right); \left(\frac{-12+\sqrt{142}}{2}; \frac{-12-\sqrt{142}}{2}\right)\right\}$;
f) $S = \{(1; 2); (2; 1)\}$; g) $S = \{(1; 2); (2; 1)\}$; h) $S = \{(1; 1)\}$; i) $S = \{(-2; 4); (4; -2)\}$; j) $S = \{(1; 2); (2; 1)\}$.

Pag. 153 – Test de evaluare

1. a) i) $m > 0$: f strict descrescătoare pe $\left(-\infty; \frac{m-1}{m}\right)$ și strict crescătoare pe $\left(\frac{m-1}{m}; +\infty\right)$;
ii) $m < 0$: f strict crescătoare pe $\left(-\infty; \frac{m-1}{m}\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(\frac{m-1}{m}; +\infty\right)$.
b) i) $m > 0$, f_m are punctul de minim $V\left(\frac{m-1}{m}; \frac{-1}{m}\right)$; ii) $m < 0$: f_m admite punct de maxim.

2. $y_V > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m} > 0 \Leftrightarrow m < 0$. **3.** $x = \frac{-b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

4. i) $m > 0$: $f_m(\mathbb{R}) = \left[\frac{-1}{m}; +\infty\right)$; ii) $m < 0$; $f_m(\mathbb{R}) = \left(-\infty; \frac{-1}{m}\right]$.

5. Ecuația $f_m(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = \frac{m-1}{m}$ și $x_2 = 1$. Se obține $x \in \left[\frac{m-1}{m}; 1\right]$.

6. $x_V = 1 - \frac{1}{m}$, $y_V = \frac{-1}{m}$; $y_V = x_V - 1$. Deducem că V aparține dreptei $y = x - 1$.

7. $m(x^2 - 2x + 1) + 2x - y - 2 = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$. Parabolele trec prin punctul fix $P(1; 0)$.

8. Se discută sistemul $\begin{cases} y = mx^2-2(m-1)x+m-2 \\ y=-2(m-1)x \end{cases}$. Avem $mx^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2-m}{m}$.
i) dacă $\frac{2-m}{m} > 0$ avem $m \in (0; 2)$; dreapta intersectează parabola în două puncte distincte (secantă).
ii) dacă $\frac{2-m}{m} < 0$ avem $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; dreapta nu intersectează parabola (exterioară);
iii) dacă $m = 2$ dreapta este tangentă la parabolă.

9. $\begin{cases} x^2-1=y \\ -x^2+4x-3=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$. Parabolele sunt tangente în punctul $T(1; 0)$.

Capitolul 7

Pag. 158

1. Cercul $\mathcal{C}(O, \|\overrightarrow{AB}\|)$. **2.** Dreapta care trece prin O si are directia vectorului $\overrightarrow{AB}$.
3. Semidreapta cu originea O având directia si sensul vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Pag. 160

1. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$. **2.** Avem: $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$.
3. Din ipoteză deducem că $P \in [BC]$. Avem: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD} = (\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}) + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PB}) + \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB} = \vec{0}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$.
4. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MN}$. **5.** a) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$; b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}$; c) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$; d) $\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$.

6. a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$; b) $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$; d) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$; e) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}$; f) $\overrightarrow{BC}-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}=$ $=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$; g) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO})-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

7. Avem: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$ (1); $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}$ (2). Adunând (1) + (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}}_{\vec{0}}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$.

Pag. 162

1. Avem: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}$ (1); $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}$ (2); $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}$ (3); $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MD}$ (4); Adunând (1) + (2) + (3) + (4) $\Rightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PM}+\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}_{\vec{0}}$.

2. Avem: $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2}$.

3. Prelungim mediana AM cu un segment $[MN]$ de aceeași lungime ($AM = MN$), avem $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AM}$. Deducem că $ABNC$ este paralelogram. Conform regulii paralelogramului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}$.

4. În ΔMBD: $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}}{2}$; în ΔABC: $\overrightarrow{MB}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}}{2}$; în ΔACD: $\overrightarrow{MD}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}}{2}$. Rezultă $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\right]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

Pag. 164

1. Fie M mijlocul $[BC]$. Știm că $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OM}$. Avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\cdot 3\overrightarrow{OM}=$ $=3\cdot 2\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{AO}$. **2.** Avem: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}=2\cdot 2\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AO}$.

3. În paralelogramele $ABCO$ și $AOEF$ avem: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO})+2\overrightarrow{AO}+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AO}+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})=$ $=4\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{AO}=6\overrightarrow{AO}$. **4.** $\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$.

5. $\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$.

Pag. 165 – Test de evaluare

1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{ON}$ au aceleași sens. **2.** Fie O centrul paralelogramului. Avem $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}$ (1) (în ΔPAC, PO mediană); $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$ (2) (în ΔPBD, PO mediană). Din (1) și (2) avem $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

3. a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}$ (în paralelogramul $APMN$); b) $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}$; d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AP}$.

4. $BC = 13$; $AM = \frac{13}{2}$, M mijlocul lui $[BC]$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|=2\,\frac{13}{2}=13$.

5. a) $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$; $\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{BD}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$; b) În patrulaterul $MPCB$ avem: $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$; în patrulaterul $MPDA$: $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$. Adunând cele două relații obținem $2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. Analog obținem $2\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Adunând avem $2\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{QN}=$ $=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$, de unde concluzia.

6. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BD}=\frac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BD}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=$ $=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}$.

7. Fie O centrul hexagonului. În paralelogramul $ABOF$ avem $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$, cu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ și $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. Deducem $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{ED} + 2\overrightarrow{AF}$.

Capitolul 8

Pag. 181

2. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO}$ și $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$. **3.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NM}$.

4. $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FC}$ și $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

5. Dacă O este centrul hexagonului avem, conform regulii paralelogramului, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF}) + \overrightarrow{AF} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) + 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$.

6. a) În paralelogramul $HBA'C$ avem $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$; b) În triunghiul HAA', $[HO]$ este mediană și avem $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO}$; c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{HG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{HG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{HG}$. d) Din $2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{HG}$ deducem că punctele O, H, G sunt coliniare. e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{OG} = 3 \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH}$.

7. Fie $k = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{-c}{b}$ (teorema bisectoarei). a) Avem $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{b+c}(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC})$; b) În ΔPBC avem: $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{PB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{PC} = \frac{b \cdot \overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}}{b+c}$.
Dacă P coincide cu A obținem punctul a).

8. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$; b) ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AL}$) $\Rightarrow 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AL} \Rightarrow A, D, L$ coliniare; c) $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AD} \overset{a)}{=} 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$.

9. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

10. a) $\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{BO}}{\overrightarrow{OD}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BO} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BC}$.

11. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}) - (2\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2 \cdot 2\overrightarrow{MN}$. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$. Din ipoteză $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{MN}$, de unde $2\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N \Leftrightarrow ABCD$ paralelogram.

Pag. 183 – Test de evaluare

1. $\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow 3\lambda = -2\lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{5}$. **2.** a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$; $\overrightarrow{CA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$; avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$; c) Fie $M\left(\frac{1}{2}, 1\right), N\left(-2, \frac{1}{2}\right), P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, ; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$.

3. $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = -8\vec{i} - 8\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

4. $M\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{OM} = -\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$. **5.** $G(1, -2)$; $\overrightarrow{OG} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

6. a) Fie $[AA'$, $[BB'$ bisectoarea unghiului A, respectiv B. Avem $A'\left(\frac{5}{2}, 3\right)$, $B'\left(4, \frac{5}{3}\right)$ (teorema bisectoarei) și $\overrightarrow{OA'} = \frac{5}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j}$;

b) Fie I centrul cercului înscris în ΔABC, avem: $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a+b+c}$, unde $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$. Deducem $\overrightarrow{OI} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

7. Ținând seama că tangentele duse dintr-un punct exterior la cerc sunt congruente, avem $AP = AN$, $BP = BM$, $CM = CN$. Obținem $\dfrac{PA}{PB} \cdot \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui Ceva, rezultă că dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

Capitolul 9

Pag. 186

1. $\dfrac{\pi}{18}$; $\dfrac{5\pi}{36}$; $\dfrac{5\pi}{12}$; $\dfrac{7\pi}{12}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{4}$; $\dfrac{11\pi}{20}$. **2.** 135°; 15°; 22°30′; 225°; 315°; 102°.
3. 75°; $\dfrac{5\pi}{12}$. **4.** a) $\dfrac{10\pi}{9}$; b) $\dfrac{4\pi}{3}$. **5.** Panta este $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{15} \Leftrightarrow \dfrac{h}{d} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow d = 6$ mm.

Pag. 195

2. a) $T = 12\pi$; b) $T = 2\pi$; c) $T = \dfrac{8\pi}{3}$; d) $T = 5\pi$; e) $T = 24$; f) $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow |\sin|x + T|| = |\sin|x|| \Leftrightarrow \sin|x + T| = \pm\sin|x|$. Pentru $T = \pi$ avem $\sin|x + \pi| = \pm\sin x$; analog dacă $T = 2\pi$. Perioada funcției f este π. **3.** a) $T = \pi$; b) $T = \dfrac{\pi}{10}$; c) $T = 2\pi$.

4. Condiția ca funcția $f(x) = \sin\sqrt{x}$ să fie periodică este ca $\forall\, x \in \mathbb{R}$, să existe $T \in \mathbb{R}$, $T \neq 0$ astfel încât $\sin\sqrt{x+T} = \sin\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+T} = (-1)^k\sqrt{x} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + T = x + k^2\pi^2 + 2(-1)^k k\pi\sqrt{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T = k^2\pi + 2(-1)^k k\pi\sqrt{x}$. Rezultă că nu putem avea $T =$ constant când $x \neq 0$, adică T nu este independentă de x. Așadar, funcția f nu este periodică. **5.** $T = \dfrac{2\pi}{a}$.

6. a) Cele mai mici numere care satisfac relația $m\pi = \dfrac{2n\pi}{5}$ sunt $m = 2$ și $n = 5 \Rightarrow T = 2\pi$; b) $T = 2\pi$.

7. a) f nu este nici pară, nici impară; b) nu este nici pară, nici impară; c) Dacă n este par f este impară, iar dacă n este impar, atunci f este pară; d) Dacă n este par, f este pară, iar dacă n este impar, f este impară; e) f este pară.

9. a) $T = \dfrac{\pi}{2}$; b) f este neperiodică; c) $T = 6\pi$; d) $T = \pi$; e) $T = \dfrac{\pi}{4}$; f) $T = \dfrac{\pi}{3}$. **10.** a) f este pară; b) f este impară; c) f este pară; d) f nu este nici pară nici impară; e) f este pară; f) f este pară.

11. Avem $f(x) = 5 + \dfrac{4}{\sin^2 2x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \min f(x) = 5 + \dfrac{4}{\max \sin^2 2x} = 5 + \dfrac{4}{1} = 9$ și se obține pentru $x = \dfrac{\pi}{4}$. **12.** a) $\min f(x) = \dfrac{1}{4}$; $\max f(x) = 1$; b) $\min f(x) = -\dfrac{9}{8}$; $\max f(x) = 2$; c) Dacă $-\dfrac{m}{2} \leq -2$, adică $m \geq 2$, avem $\min f(x) = 1 - m + n$ și $\max f(x) = 1 + m + n$; dacă $-1 < \dfrac{m}{2} < 1$, adică $m \in (-2, 2)$, avem $\min f(x) = -\dfrac{m^2 - 4n}{4}$ și $\max f(x) = 1 + |m| + n$; dacă $m \leq -2$, avem $\min f(x) = 1 + m + n$; $\max f(x) = 1 - m + n$. **13.** $\min f(x) = 1$ și $\max f(x) = 5$.

15. Funcția este periodică de perioadă $T = \pi$ și este pară; f este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, și strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

16. a) $x = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$; b) Notăm $x - \dfrac{\pi}{2} = t$, obținem $f(t) = \cos t - 1$.

Pag. 199

1. a) $\sin 600° = \sin\frac{10\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1.
3. a) $E = 0$; b) $E = \cos 32° - \sin 32°$. **4.** $E = 1 + \sin x \quad \cos x$.

Pag. 204

1. $\cos(a-b) = \frac{63}{65}$; $\sin(a+b) = \frac{56}{65}$. **2.** Avem $\cos(a-b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cu $0 < a-b < \frac{\pi}{2}$; rezultă $a-b = \frac{\pi}{6}$. **3.** $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{16}{63}$; $\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{33}{56}$. **4.** $a+b = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. a) $E = -\frac{2\sqrt{3}\left(1+\operatorname{ctg}^2 a\right)}{1-3\operatorname{ctg}^2 a}$; b) $E = \operatorname{tg}(a-b)$; c) $E = \operatorname{ctg}(a-b)$; d) $E = \operatorname{ctg} a$. **10.** $E = q$.

13. $\cos x \quad \cos y \quad \cos z - \sum \cos x \quad \sin y \quad \sin z = \cos x\,(\cos y \quad \cos z - \sin y \quad \sin z) - \sin x\,(\sin z \quad \cos y + {}$ $+ \cos x \quad \sin y) = \cos x \cos(y+z) - \sin x \sin(y+z) = \cos(x+y+z) = \frac{1}{2}$. **14.** $E = \frac{3}{2}$. **15.** $E = 4$.

Pag. 211

1. $E = 5$. **2.** $\cos 4a = \frac{7}{25}$. **3.** $\sin 2a = \frac{24}{25}$; $\cos 2a = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} 2a = \frac{24}{7}$; $\operatorname{ctg} 2a = \frac{7}{24}$. **4.** $\sin 3a = \frac{99}{125}$.

5. $\sin a = \pm\frac{4}{5}$. **6.** $\sin 2a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} 2a = -1$.

12. a) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - 1$; b) $b^2(a^2-1)^4 - b^2(a^2-1)^2 + 1 = 0$. **14.** $u \pm 2v = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

15. $E = \frac{a^5 - 3a^2 + a^2 + 2a - 8}{a^2}$. **16.** $E = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{x+3}{x}, & x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty) \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{x+3}{x}, & x \in (-3, 0) \end{cases}$.

17. $\{f(x) \mid x \in [-\pi, \pi]\} = \{g(y) \mid y \in [-1, 1]\}$, unde $g(y) = -2y^2 + (5-a^2)y + a^2 + 1$.

19. $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{2} \pm 1$. **20.** $E = n$. **21.** $\sin 15° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$; $\cos 15° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$. **25.** $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 1$.

Pag. 218

1. a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; b) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; c) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; e) $\frac{\sqrt{3}}{2\cos 20° \cos 40°}$; f) $\sqrt{3} - 1$.

2. a) $2\cos^2\frac{x}{2} \quad \operatorname{tg} x$; b) $\sin(x+y)\cos(x-y)$; c) $\sin(x-y) \quad \cos(x+y)$. **3.** $4\cos 45° \quad \cos 15°$.
4. a) $E = 4\cos^2(x-y)$; b) $E = \sin 4x \quad \sin 2y$; c) $E = 4\cos^2 x - 1$. **5.** $E = 1$.
6. $E = n \quad \sec\beta \quad \sec\alpha \quad \sin(\beta-\alpha)$; b) $E = n \quad \sec\beta \quad \sin(\beta-\alpha)$;

c) $E = 4\cos 2\alpha \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; d) $E = 4\cos\alpha \quad \cos 2\beta \quad \cos 3\gamma$.

10. Avem $\cos\frac{a-b}{2} = p \quad \cos\frac{a+b}{2}$ și $\sin\frac{a+b}{2} = -q \cos\frac{a-b}{2}$, de unde rezultă:

a) $\sin\frac{a+b}{2} = -\frac{pq}{\sqrt{1+p^2q^2}}$; b) $\cos\frac{a+b}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2q^2}}$; c) $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = -pq$; d) $\cos\frac{a-b}{2} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2q^q}}$;

e) $\sin\frac{a-b}{2} = \sqrt{\frac{1-p^2+p^2q^2}{1+p^2q^2}}$; f) $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{1-p^2+p^2q^2}}{p}$.

11. $\sin a - \cos a = \pm\sqrt{2-m^2}$, $m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. **19.** $E(a) = \frac{2\operatorname{tg} 4a}{1-\operatorname{tg}^2 4a} = \frac{16}{63}$.

20. Generalizare: $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - ... - 2\cos nx = 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

Pag. 219 – Test de evaluare

1. $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. **2.** $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos\beta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$. Din $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}$, cu $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta - \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha - \beta = -\frac{\pi}{3}$.

4. Folosind formulele pentru $a^2 - b^2$, $\sin x \pm \sin y$ și $\cos x \pm \cos y$ obținem $F = \operatorname{ctg} 3x$.

5. $E = \sin^2 a$; $F = \frac{3}{2}$. **6.** $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $E = 2$. **7.** $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $E = 1$.

Capitolul 10

Pag. 226

1. a) $\frac{5\sqrt{13}}{2}$; b) $15\sqrt{2}$; c) $-\frac{123}{2}$; d) 0. **2.** $m = 16$, $n = 4\sqrt{3}$. **3.** $\cos A = -\frac{7}{32} \Rightarrow$ unghiul A este obtuz.

4. $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{39}{32}$.

6. $a = 44$; $b = 24\sqrt{2}$; $\sin B = \frac{6\sqrt{2}}{11}$.

8. a) $c = 4$, $b = 6$; $\sin B = \frac{3}{5}$, $\sin C = \frac{2}{5}$; b) $B\ \frac{\pi}{12}$; $a = \frac{12}{\sin\frac{\pi}{12}}$, $c = 12\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{2}}$;

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ și $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ și $c = 12\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Pag. 229

3. a) c= 8; $\sin A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow A = \frac{\pi}{12}$ și $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \frac{2\pi}{3}$;

b) $C = \frac{5\pi}{12}$; $a = 6\sqrt{3}-6$, $b = 9\sqrt{2}-3\sqrt{6}$; c) $A = \frac{\pi}{2}$; $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{6}$; $C = \frac{\pi}{3}$;

d) $B = \frac{\pi}{2}$; $b = 16\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$; $c = 16(2+6\sqrt{3})$; e) $C = \frac{5\pi}{12}$; $b = 12\left(\sqrt{3}+1\right)$; $c = 12\left(\sqrt{3}+1\right)$;

f) $B = \frac{2\pi}{3}$; $a = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Pag. 233

1. Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Ridicând la pătrat obținem:
$\overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2 = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 = AD^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ (1) și $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = AB^2 + BC^2 +$
$+ 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ (2). Adunând (1) și (2) deducem $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

2. *Soluția 1 (vectorială).* Fie ΔABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in [BC]$. Avem $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ $|\cdot\overrightarrow{CB}$
$\Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (deoarece $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = \vec{0}$);
$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}^2$ (deoarece $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}\ \overrightarrow{AB} = \vec{0}$) $\Rightarrow$
$\overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} \Rightarrow CA^2 = CB\cdot CD$.

Soluția 2 (sintetică). $\Delta ADC \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC\cdot DC$. Analog pentru cealaltă catetă.

3. *Soluția 1 (vectorială).* Fie ΔABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in [BC]$. Avem $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$. Înmulțind scalar cele două egalități avem $\overrightarrow{AD}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) =$

$= \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}_{0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} =$

$= \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{CD}$ (deoarece $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Cum $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$, avem $\overrightarrow{AD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{CD} =$
$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$ (deoarece $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$). Deducem că $AD^2 = BD \cdot CD$.

Soluția 2 (sintetică). $\Delta ABD \sim \Delta CAD \Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD} \Leftrightarrow AD^2 = BD \cdot CD$.

Pag. 237

2. $A = \dfrac{\pi}{4}$, $B = \dfrac{\pi}{3}$; $C = \dfrac{5\pi}{12}$; $c = \sqrt{3} + 1$; $S = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$. **3.** $a = 2\sqrt{19}$.

7. $S = 84$; $R = \dfrac{65}{8}$; $r = 4$; $\cos A = \dfrac{3}{5}$; $\sin B = \dfrac{56}{65}$.

8. $B = \dfrac{\pi}{3}$ și $A = C = \dfrac{\pi}{3}$. În concluzie, triunghiul ABC este echilateral.

9. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{c}{\sqrt{6}} = x \Rightarrow a = 2x$, $b = (1+\sqrt{3})x$, $c = \sqrt{6}\,x$;

$\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{4}$; $\cos B = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow B = \dfrac{5\pi}{12}$; $\cos C = \dfrac{1}{2} \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{3}$.

Pag. 239 – Test de evaluare

1. a) $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow m(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 90° \Leftrightarrow \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;
b) Folosind a) avem $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) - \lambda(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

4. $\cos A + \cos B = \sin C \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{C}{2} \cdot \cos\dfrac{A-B}{2} =$
$= \sin\dfrac{C}{2} \cdot \cos\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{C}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\dfrac{A-B}{2} = \cos\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{A-B}{2} = \pm\dfrac{C}{2}$.

Din $A - B = C \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$; din $A - B = -C \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{2}$. Prin urmare, ΔABC este dreptunghic în A sau B.

5. Din teorema cosinusului și prima relație obținem $\cos A = \dfrac{1}{2}$, de unde $m(\sphericalangle A) = 60°$. Folosind și relația a doua avem $\cos(B - C) - \cos(B + C) = \dfrac{3}{2}$ și obținem $B - C = 0$; $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60°$.

6. Transformând în produse egalitatea avem $a\left(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}\right) = b\left(\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2} - \operatorname{tg} B\right)$ și folosind teorema sinusurilor obținem $\sin\dfrac{A-B}{2}(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Capitolul 11

Pag. 239 – Algebră

1. Nu; se folosește teorema împărțirii cu rest.
2. a) $n \in \{1; 3\}$; pentru $n \geq 5$ ultima cifra a numărului din enunț este 3, deci nu poate fi pătrat perfect; b) $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$; c) $(n - 1)^3 < (n - 1)n(n + 1) < n^3$.
3. a) $8! + 2, 8! + 3, 8! + 4, 8! + 5, 8! + 6, 8! + 7, 8! + 8$; b) $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \ldots, (n + 1)! + (n + 1)$.

4. a) Fie $\begin{cases} d/(3n+2) \\ d/(4n+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/4(3n+2) \\ d/3(4n+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(12n+8) \\ d/(12n+9) \end{cases} \Rightarrow d/(12n+9-12n-8) \Rightarrow d/1$.

5. a) Fie $\begin{cases} d/n+2 \\ d/2n+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2(n+2) \\ d/2n+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2n+4 \\ d/2n+3 \end{cases} \Rightarrow d/(2n+4-2n-3) \Rightarrow d/1$.

6. a) $n^2+1=k^2, (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (n-k)(n+k)=-1 \Rightarrow n=0$; b) $n^2+2003=k^2$ $(k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n-k)(n+k)=2003 \Rightarrow n=1001$.
7. a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=14\sqrt{10}$; $\sqrt{x}=a\sqrt{10}$ și $\sqrt{y}=b\sqrt{10}$ cu $a, b \in \mathbb{N}$, $a+b=14$; b) analog a).
8. a) $k=2$; b) $k=3$. **9.** a) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$;
b) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.
10. Metoda reducerii la absurd. **11.** $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$.

12. $x^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)^2$. **13.** $4(a^2+ab+b^2)^2$.

14. Notăm $\sqrt{x-1}=a$, $\sqrt{y-1}=b$; $\sqrt{z-1}=c$; $(a-1)^2+(b+1)^2+(c-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a=1, b=-1, c=1)$, dar $\sqrt{y-1}=-1$ este imposibil pe $\mathbb{R}$.

15. Notăm $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y-1}=b$; $\sqrt{z-2}=c$; $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c=1$;

$(x, y, z)=(1, 2, 3)$. **16.** $(x, y)=(2, 1)$ soluție unică. **17.** a) $m_a \geq m_h$ pentru $\dfrac{1}{1+a+b}, \dfrac{1}{1+b+c}, \dfrac{1}{1+c+a}$.
18. a) $b+c=x$, $c+a=y$, $a+b=z$; b) $a^2+1 \geq 2a$; c) $a^2+p^2 \geq 2ap$. **19.** $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$.
20. Se folosește inegalitatea Cauchy-Schwartz; b) Inegalitatea Cauchy; egalitatea are loc pentru

$a_1=a_2=\ldots a_n=\dfrac{1}{n}$. **21.** Notăm radicalii cu x, y, z; avem $x+y=2z \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2z^2$.

23. a) $\dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{4}$; b) $\dfrac{ab}{ab+1} \leq \dfrac{a+b}{4}$; c) $\dfrac{ab}{ab+p} \leq \dfrac{a+b}{4p}$; d) $\dfrac{a^2}{a+1} \geq \dfrac{8a}{9}-\dfrac{4}{9}$; e) $\dfrac{a^2}{a+p} \geq \dfrac{8a}{9}-\dfrac{4p}{9}$;
f) $(a-b)^2 \geq 0$; g) se folosește f); h) $a(b-1)^2+b(a-1)^2 \geq 0$; i) se folosește f); j) $a(b-m)^2+$
$+b(a-m)^2 \geq 0$; k) se folosește h); l) $(a-b)^2 \geq 0$; m) se folosește f); n) se folosește f).
25. inegalitatea este echivalentă cu $(\alpha y-\beta x)^2 \geq 0$; b) se folosește a); c) se folosește a).
27. $X=\{1, 2, 3, 8, 9\}$. **29.** $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. **30.** $-8+0=-8$. **31.** $(0; 0), (0; 1)$; două perechi.
32. Pentru prima inegalitate se ridică la pătrat. Egalitatea are loc pentru $(a, b, c) \in \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$. Pentru a doua inegalitate se folosește inegalitatea Cauchy. Egalitatea are loc

pentru $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; b) Vezi punctul a). **33.** $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \dfrac{1}{2}$.
34. $a-c=c-b=k \Rightarrow a=c+k, b=c-k$; $a^4+b^4=(c+k)^4+(c-k)^4=2c^4+12c^2k^2+2k^4 \geq 2c^4$.
39. a) $x \in [-1; 3]$; b) $x \in [1-a; 1+a]$; c) $x \in [a-2; a+2]$; d) $x \in [a-b; a+b]$;
e) $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; f) $x \in (-\infty; 1-a] \cup [1+a; +\infty)$; g) $x \in (-\infty; a-2] \cup [a+2; +\infty)$;

h) $x \in (-\infty; a-b] \cup [a+b; +\infty)$; i) $x \in \left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$; j) $x \in \left(-\infty; \dfrac{a+2}{2}\right)$; k) $x \in \left(-\infty; \dfrac{a+b}{2}\right)$;

l) $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; m) $x \in (-\infty; 0) \cup (a+2; +\infty)$; $x \in [0; a+b]$; o) $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$;

p) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{2a+2b+2c}{3}; +\infty\right)$. **40.** $x \in \{-4; -2; 0\}$; b) $x \in \varnothing$; c) $x \in \varnothing$; d) $x \in \varnothing$; e) $[0; 1]$;

f) $x \in [0; a]$; g) $x \in [-1; 1]$; h) $[-a; a]$; i) $x \in \{0; 2\}$; j) $x \in \{0; 2a\}$; k) $x \in \left\{0; \dfrac{2(a+b)}{3}\right\}$.

41. a) $x \in \left\{-3; 2; \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$; b) $x \in \{-2; 6; 3 \pm \sqrt{21}\}$; c) $x \in \left\{-2; \dfrac{1}{2}\right\}$; d) $x \in \left\{-\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{2}\right\}$;

e) $x \in \left\{1 \pm \sqrt{5};\ 1 \pm 2\sqrt{5}\right\}$; f) $x + 4 = t$; g) $x^2 + 10x = t$, $(t + 16)(t + 24) = 4t + 125$; h) $x^2 - 7x + 8 = t$, $(t - 2)(t + 2) = 12$; i) $x^2 + 3x - 7 = t$, $x \in \left\{\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2};\ \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$; j) $(2x + 3)(x^2 + 3x + 6) = 0$; k) $x + 2 = t, x \in \left\{-2 \pm \sqrt{5}\right\}$; l) $x + a + 1 = t$; m) $x \in \left\{1;\ 3;\ \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}\right\}$.

42. a) $x = 2$; b) $D = [2; +\infty), S = \{11; 38\}$; c) $D = [a; b], x = \frac{a + b + 2\sqrt{2(b - a - 2)}}{2}$; d) $x \in [5; 10]$; e) $x \in \{1; 2\}$; f) $D = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, $x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$; g) $x = 1$; h) $x \in \{a; b\}$; i) $x = 2$; j) $x \in \{-14; 1\}$; k) $x = a^2 + a$; l) $x \in \left\{-\frac{a}{b}; -\frac{c}{d}\right\}$; m) $x = 1$; n) $D = [-2; 2], x = -2$.

43. a) $x \in \{16; 81\}$; b) $x \in [16; 81]$. **44.** a) $x = 3$; b) $\sqrt{x + a^2} = t$; c) $\sqrt{x + a^2} = t$.

45. $(x, y, z) = (a + 1, b + 1, c + 1)$. **46.** a) $x \in \left\{-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}\right\}$; b) $x = \frac{4}{3}$. **47.** $x = \frac{a + b}{2}$.

48. a) $x \in \{1; 3; 5\}$; b) $x \in \{-4; -1; 2; 5\}$; c) $x \in \{1; 4\}$; d) $x \in \{11; 16; 21; 26\}$; e) $x \in \{-5; -2\}$; f) $x \in \{-14; -10; -6\}$; g) $x \in \left\{\frac{1}{3};\ 1\right\}$; h) $x \in \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ 1\right\}$; i) $x_k = k(n + 1) - 2n + 1$, unde $k \in \{-n, -n + 1, -n + 2, ..., 0, 1, 2\}$; ecuația are $(n + 3)$ soluții; j) $x_k = (2n + 1)k - 6n - 2$, unde $k \in \{2n + 1, 2n + 2, ..., 4n\}$; ecuația are $2n$ soluții; k) $x_k = (n + 2)k + n$, unde $k \in \{-2n, -2n + 1, ..., -n\}$; ecuația are $(n + 1)$ soluții; l) $x_k = \frac{n \cdot k + 1}{n + 1}$, unde $k \in \{-n + 2, -n + 3, ..., -2, -1, 0, 1\}$; ecuația are n soluții. **50.** $M = \{-19; 5\}$; $S = -14$.

51. $A = \{-14; -5; -2; -1; 0; 1; 4; 13\}$. **52.** $m \in \left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. **53.** $a = 2$, $b = \frac{2}{3}$.

54. $(a + b + c - x)\left(\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}\right) = 0$; $x_1 = a + b + c \in \mathbb{R}$, x_2 și x_3 sunt soluțiile ecuației $3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$ cu $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0$, deci $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$; $x_1, x_2, x_3 \notin \{a, b, c\}$. **55.** $A = \{-2; 0; 1\}$, $S = -1$. **56.** $A = \{1; 2; 3\}$. **57.** $x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$.

58. $x_4 = x_{13}$ și $x_3 = x_8$; card $A = 98$. **59.** $m \in (-1; 2)$. **63.** a) $x_V = \frac{-m - n}{m}$, $y_V = \frac{-n^2}{m}$.
Dacă $n = 0$, obținem dreapta $x = -1$; dacă $n \neq 0$ obținem dreapta $y = n(x + 1)$;
b) $AB = |x_1 - x_2| = 2\left|\frac{n}{m}\right|$; $VF = \left|\frac{-\Delta}{4a}\right| = \left|\frac{n^2}{m}\right|$, deci $2VF = |n|AB$; c) Punctul fix căutat este $P(-1, 0)$.

64. $F(1; 0)$. **65.** $F(1; 0)$. **66.** $f_m(x) = mx^2 - 2mx + 3(1 - m)$, $m \in \mathbb{R}^*$. **67.** $x_V = y_V \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

68. $m \in [-11; 5]$. **69.** $m \leq \frac{1}{4}$. **70.** a) $(2x + m)^2 \geq 0$; b) $m \in \left[0,\ \frac{4}{3}\right]$. c) Fie $a^2 + ma + m^2 = n$, $n \in \mathbb{N}$; pentru $n = 2m^2$, $m \neq 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-m \pm m\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; pentru $m = 0$, avem $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

71. $m \in \left[-\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\right]$. **74.** $m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

76. b) $f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + ... + a_n)x + a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$; $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

77. a) $f(x) = x + 2$; b) $f(x) = x + a$; c) $f(x) = x - b$.

78. b) $x_1 = a + b$, $2x^2 - (a + b)x + 2(a^2 - ab + b^2) = 0$.

82. $f(x) = -x^2 + 2mx + 7m$. **83.** Se scad ecuațiile.

84. $\Delta_1 = a_1^2 - 4b_1$, $\Delta_2 = a_2^2 - 4b_2$; $\Delta_1 + \Delta_2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ cel puțin un discriminant este pozitiv.

85. Inegalitatea Cauchy–Schwartz: $(x + 2y + 3z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2}{14} = 14 \Leftrightarrow a = \pm 14$; b) Generalizare la punctul a): $a = \pm\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

86. $24x_1x_2 = 5(x_1 + x_2) + 4$.

87. Presupunem $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$ și obținem $(a + b + c)^2 < 0$, contradicție.

88. Presupunem $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$; obținem $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 3(a + b + c)^2 < 0$, contradicție.

89. $\frac{m-n}{m+n} = \frac{m+n-1}{2m+3n-3} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow (m, n) = (3, 1)$. **90.** $m \in \{0\} \cup [1; +\infty)$. **91.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = b - a$.

92. Ecuația $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x - (m + 1) = 0$ are două soluții distincte $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8m(m + 1) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **93.** $m \in \left\{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

94. Ecuația de gradul al doilea în x: $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 14 = 0$ are ($\Delta = 9y^2 + 112 = p^2$ cu $p \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow 9y^2 - p^2 = -112 \Leftrightarrow (3y - p)(3y + p) = -2^4 \cdot 7$ etc.

95. $m \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$. **96.** Se aplică proprietatea pentru x, y; apoi z, t și se înlocuiește $t = \frac{3xyz}{xy + yz + zx}$.

97. $T = 3$. **98.** $f(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$. **99.** $T = 4$. **100.** $T = 2b$. **101.** $x \in \left[0, \frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

102. $abx(x - 1)^2 + bcx(x - 1)^2 + ac(x^2 - 1)^2 \geq 0$. **103.** $m \in [-4; 0]$. **104.** card $A = 1$.

105. $m \in (-1; 5)$. **106.** $f(x) = 2x^2 - 1$. **107.** $f(x) = x - b$. **108.** $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty)$.

109. $x \to 2a - x$; $f(x) = \frac{3}{5}g(a - x) - \frac{2}{5}g(x + a)$. **110.** Im $f = \left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$.

111. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x \in [1, 2] \\ x - 2, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$. **112.** Pentru $m = \frac{8}{3}$ rădăcina comună este $x_0 = 2$.

113. $\Delta > 0$, $P < 0$; $m \in (-\infty; -10) \cup (0; +\infty)$. **114.** $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $m \in \left(\frac{1}{4};\ 1 + 2\sqrt{2}\right)$.

115. $(a; b) \in \{(0; 0); (2; 3); (3; 2); (1; 5); (5; 1); (2; 2)\}$. **116.** $b \geq a = c$. **117.** $E = 25$.

118. $m \leq 1$. **119.** $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$. **120.** a) $\Delta = 5(m - 1)^2 \geq 0$; b) $m \in \left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\ +\infty\right)$.

121. a) $f(1) = 1$; b) $f(1) = 1$. **122.** a) $f(2) = 2$; b) $f(a) = a$. **123.** a) $f(1) = 1$; b) $f(1) = 1$.

124. a) $(x; y) = \{(4; 5); (5; 4)\}$; b) $(x; y) \in \{(5; 5); (-5; -5)\}$; c) $(x; y) \in \{(2; 3); (-2; -3)\}$;

d) $(x; y) = (2; 1)$; e) $(x; y) = (2; -1)$; f) $(x; y) = (a; b)$; $(x; y) \in \left\{(1; 3); (3; 1); \left(1, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$;

h) $(x; y) \in \left\{(1; 2); (2; 1); \left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$; i) se scad ecuațiile; j) $y = \frac{x^2 - 9}{3}$, $x^4 - 18(x + 1)^2 = 0$;

k) $(x; y; z) = (0; 1; 3)$; l) $(x; y; z) = (0; 1; k)$; m) $(x; y; z) = (1; 1; 2)$; n) $(x; y; z) = (2; 2; -2)$;

o) $x = y = z \in \{\pm 1\}$.

Pag. 252 – Geometrie

1. Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci M este mijlocul segmentului $[A_kA_{k+1}]$, iar dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci M coincide cu A_{k+1}. Obținem: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \ldots + \overrightarrow{PA_n} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA_1}) + (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA_2}) + \ldots + (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA_n}) =$ $= n\overrightarrow{PM} + \underbrace{(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n})} = n\overrightarrow{PM} + \vec{0} = n\overrightarrow{PM}$.

2. Construim paralele prin P la laturile ΔABC. Avem: $2\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PQ}$, $2\overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PN}$, $2\overrightarrow{PP_3} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR}$; adunăm cele trei relații $\Rightarrow 2(\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3}) = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PT}) + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PR}) +$ $+ (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) = 3\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) =$ $= 3\overrightarrow{PO} + \vec{0} = 3\overrightarrow{PO}$. Deducem $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.

3. a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON}$. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} =$ $= AO^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}_{-R^2} = AO^2 - R^2 =$ const.; b) Fie C' punctul diametral opus lui C în cercul dat; avem $m(\sphericalangle CBC') = 90°$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'B}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'B} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AC}$ (deoarece $\overrightarrow{C'B} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{C'B} \cdot \overrightarrow{AC} = 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AC} \overset{a)}{=} AO^2 - R^2 =$ const.

4. a) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$; $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) =$ $= (2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}})(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = (2\overrightarrow{MI} + \vec{0})(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$;
b) dreaptă perpendiculară pe AB; c) dreaptă perpendiculară pe linia centrelor O_1O_2.

5. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} +$ $+ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

6. Fie E și F mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[CD]$. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{PE}$; $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FD} = 2\overrightarrow{PF}$; $\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PO} =$ const. b) Se folosește exercițiul anterior și $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ $(AB \perp CD)$. c) $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = 8R^2 - 4OP^2 =$ const.

7. a) Cercul de centru I și raza $\sqrt{\frac{k}{2} - IA^2}$, cu condiția $k > 2IA^2 \Leftrightarrow k > \frac{AB^2}{2}$; b) Cercul de centru G cu condiția $k > GA^2 + GB^2 + GC^2$.

9. Fie M, N mijloacele coardelor $[AD]$, $[CD]$. Avem $OMPN$ dreptunghi. Obținem:
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) =$ $= 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}$.

11. a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) +$ $+ \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP} =$ $-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) \overset{a)}{=} \vec{0}$; c) $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) \overset{a)}{=} \vec{0}$.

12. $G \equiv G' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

13. Fie k valoarea comună a rapoartelor din enunț. Avem $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AB}$. Analog $\overrightarrow{NB} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CA}$.
Obținem $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \frac{k}{1-k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$. Cu ex. 12 $\Rightarrow \Delta MNP$ și ΔABC au același centru de greutate.

14. $P\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\ \dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right)$.

21. a) Alegând un sistem de coordonate cu originea în A și semiaxe $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) \overset{\text{not}}{=} (\vec{i},\ \vec{j})$. Obținem $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$, $M\left(\dfrac{7}{8},\ 0\right)$, $N\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$. Avem (DN): $2x + 3y = 3$, (CM): $8x - y = 7$. Rezultă $P\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{5}{13}\right)$, de unde $\overrightarrow{AP} = \dfrac{12}{13}\vec{i} + \dfrac{5}{13}\vec{j}$; b) $|\overrightarrow{AP}| = 1$.

22. În coordonate condiția dată se scrie $|x-a| \cdot |x-b| = k|x-c| \cdot |x-d| \Leftrightarrow |(x-a)(x-b)| = k|(x-c)(x-d)| \Leftrightarrow (x-a)(x-b) = \pm k(x-c)(x-d)$. Poziția punctului M se determină calculând pe x din relația de mai sus.

23. a) Fie O intersecția diagonalelor; în ΔMAC, MO mediană: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$ (1); în ΔMBD, MO mediană: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$ (2). Din (1) și (2): $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$; b) Se folosește relația medianei în triunghiurile MAC și MBD; în ΔMAC: $MO^2 = \dfrac{MA^2+MC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}$; în ΔMBD: $MO^2 = \dfrac{MB^2+MD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4}$. Cum $AC = BD$, relația cerută este imediată; c) Se ridică la pătrat egalitatea vectorială a) și se ține seama de b).

24. Avem: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$. Prin adunare obținem:

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}}_{\vec{0}}) = \vec{0}.$$

25. $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{MB}+k\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{MC}+k\cdot\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{MA}+k\cdot\overrightarrow{AB}$. Adunând cele trei egalități obținem: $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA} + k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ (1). Dacă G este centrul de greutate al ΔABC, avem: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (2). Dacă G' este centrul de greutate al $\Delta A'B'C'$, avem: $\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'} = 3\overrightarrow{MG'}$ (3). Din (1), (2), (3) $\Rightarrow G \equiv G'$.

26. Avem $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$ și $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}$. Dar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ $(CA \perp AG)$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ $(AE \perp BA)$, iar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG} = bc\cos A + bc\cos(\pi - A) = bc\cos A - bc\cos A = 0$, de unde $CE \perp BG$.

27. În ΔMBC, MD mediană: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$ (1). În ΔMAD, G împarte latura AD în raportul $\dfrac{AD}{GD} = 2$. Avem: $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MD}}{1+2} \overset{(1)}{=} \dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Ridicând la pătrat obținem: $9\overrightarrow{MG}^2 = \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$, de unde se obține relația cerută.

28. a) În patrulaterul $ABFE$ avem: $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE} = \vec{0}$ (1). În patrulaterul $CDEF$ avem: $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE} = \vec{0}$ (2). Adunând (1) și (2) $\Rightarrow 2\overrightarrow{EF}+(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; b) Ridicând a) la pătrat și ținând seama că $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ $(AB \perp CD)$ se obține $4\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2-2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$;
c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\ |\cdot\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}$;
d) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\ |\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

30. $A(-9; -2)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 4)$ sau $A(-9; -2)$, $B(-1, 4)$, $C(3, 2)$. **33.** 15.

34. $\| \vec{u}+\vec{v} \| = \frac{\sqrt{97}}{6}$, $\| \vec{u}-\vec{v} \| = \frac{\sqrt{97}}{6}$. **36.** Se aplică teorema medianei în ΔMAC și ΔMBD.
37. Se aplică teorema medianei. **39.** Se aplică teorema medianei. **40.** $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2 + a^2$.
41. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = \min. \Leftrightarrow M \equiv G$.

45. $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$. **46.** Relația Stewart.
49. a), b), c) Se folosește teorema cosinusului; d) Se folosește teorema sinusurilor.

50. Relația este echivalentă cu $\cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{B}{2}$. Triunghiul este dreptunghic în A.

51. Se folosește teorema sinusurilor și teorema cosinusului.

52. a) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; b) vezi a); c) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$; d) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;

e) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$; f) vezi e); g) vezi c); h) vezi d); i) se folosește h); j) se folosesc g) și h);

k) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

54. Egalitatea este echivalentă cu $\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$. **55.** Se folosește teorema sinusurilor.

59. $m(\sphericalangle A) = 120°$. **60.** $E = 2$. **63.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$. **64.** $\frac{7}{37}$.
65. $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 89° = 1$; $P_1 = P_2 = 1$.

66. Pentru $x = 0$ și $x = \pi$, obținem $\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$.

67. Pentru $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, obținem $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

70. Se înmulțesc egalitățile cu $2\sin\frac{\pi}{7}$.
71. Se folosește inegalitatea mediilor sau inegalitatea Cauchy–Schwartz. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \ldots = \operatorname{tg}\alpha_n \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. **72.** $|a + b| \le |a| + |b|$; $|a-b| \le |a| + |b|$.

73. „$\Rightarrow$“ $x = 0 \Rightarrow m = 4$; „$\Leftarrow$“ $m = 4 \Rightarrow \sqrt{(\sin^2 x+1)^2} + \sqrt{(\cos^2 x+1)^2} = 3$.
74. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;
$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.
75. b) $\sin^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 b + \cos^6 b = (\sin^2 a + \cos^2 a)^3 \Leftrightarrow (\cos^2 a - \cos^2 b)(\cos^4 a + \cos^4 b +$
$+ 3\sin^2 a + \cos^2 a \cos^2 b) = 0 \Leftrightarrow a = b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Bibliografie

Alexe, Șt.; Chirciu, M. – *Algebră, clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, Pitești, 2003

Andrei, Gh. – *Șiruri și progresii*, Editura Paralela 45, Pitești, 2001

Andrei, Gh.; ș.a. – *Admiterea în învățământul superior 1994 – 2003*, Editura Gil, Zalău, 2003

Andrei, I.; Caragea, Gh.; Cucurezeanu, C. – *Probleme de algebră*, Editura Gil, Zalău, 1996

Andrei, I.; Caragea, Gh.; Cucurezeanu, C.; Bordea, Gh. – *Probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1998

Becheanu, M.; Căzănescu, V.; Năstăsescu, C.; Rudeanu, S. – *Logică matematică și teoria mulțimilor (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972

Brânzei, D.; Gorgotă, V.; Ulmeanu, S.; Șerdeau, I. – *Matematica în concursurile școlare 1999 – 2002*, Editura Paralela 45, Pitești

Brânzei, D.; Zanoschi, A. – *Probleme cu vectori*, Editura Paralela 45, Pitești, 2002

Burtea, M; Burtea, Georgeta – *Matematică, manual pentru clasa a X-a, M1*, Editura Carminis, Pitești, 2000

Dragomir, N.; Deaconu, T.; Dragomir, Carmen; Mandreși, Ana; Săvulescu, D. – *Geometrie*, Editura Meteor Press, București, 2003

Dragomir, N.; Dragomir, Carmen; Săvulescu, D. – *Algebră – exerciții și probleme pentru elevii clasa a X*, Editura Meteor Press, București, 2003

Dragomir, N.; Deaconu, T.; Dragomir, Carmen; Blag, O. – *Trigonometrie – exerciții și probleme pentru elevii claselor IX–X*, Editura Universal Pan, București, 1999

Dragomir, N.; Deaconu, T.; Dragomir, Carmen; Săvulescu, D. – *Trigonometrie – exerciții și probleme pentru elevii claselor a IX-a și a X-a*, Editura Meteor Press, București, 2003

Dumitrescu, Gh. – *Manual de algebră pentru clasa a IX-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968

Ghioca, A.; ș.a. – *Subiecte date la admiterea în învățământul superior și bacalaureat*, Editura Gil, Zalău, 1999

Ianuș, S.; Soare, N.; Niculescu, L.; Dragomir, S.; Țena, M. – *Probleme de geometrie și trigonometrie pentru clasale IX – X*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983

Năchilă, P; Chirciu, M. – *Algebră, clasa a X-a*, Editura Paralela 45, Pitești, 2003

Năstăsescu, C.; Niță, C.; Brandiburu, M.; Joița, D – *Exerciții și probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1992

Năstăsescu, C.; Niță, C.; Popa, S – *Matematică, manual pentru clasa a X-a, Algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978

Nicula, V. – *Geometrie plană (sintetică, vectorială, analitică). Culegere de probleme*, Editua Gil, 2002

Pop, V.; Lupșor, V. – *Matematică pentru grupele de performanță* – Editua Dacia Educațional, Cluj-Napoca, 2004

Rusu, E. – V*ectori*, Editura Albatros, București, 1976

Stoica, M.; Raianu, M.; Mărgăritescu E. – *Culegere de probleme de trigonometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975

Teodorescu, N.; Ionescu, Bucur B., coordonatori – *Culegere de probleme – SSM*, București, 1987

Udriște, C.; Tomuleanu, V. – *Geometrie analitică, manual pentru clasa a XI-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1986

Colecția Gazeta Matematică 1980–2004

Colecția RMT 1980–2004

Cuprins

Trunchi comun + curriculum diferenţiat

ISBN 978-973-135-304-3

Preţ: 4,64 lei