



$$a^2 = b^2 + c^2$$

ALINA
PARASCHIVA

SILVIU DĂNEȚ

matematică

Formule și noțiuni generale

clasele

V-VIII

CORINT

ALGEBRĂ

Capitolul I

Mulțimea numerelor naturale

Simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se numesc **cifre**.

Numerele scrise astfel 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, formează **șirul numerelor naturale**.

Observație. Șirul numerelor naturale este infinit.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Numerele naturale sunt:

- **pare** – se împart exact la 2, se notează $n = 2k, k \in \mathbb{N}$;
- **impare** – nu se împart exact la 2, se notează $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

1. Operații cu numere naturale

1.1. Adunarea

$\text{termen} + \text{termen} = \text{sumă}$

Proprietățile adunării numerelor naturale:

- Comutativitatea: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
- Asociativitatea: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 0 este element neutru față de adunare.)

1.2. Scăderea

$\text{descăzut} - \text{scăzător} = \text{diferență}$

$a - b = c, \forall a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$.

Proba scăderii: $a = b + c$.

1.3. Înmulțirea

deînmulțit · înmulțitor = produs

Notatie: În loc de semnul „ $\cdot$ ” care simbolizează înmulțirea se folosește și „ $\times$ ”.

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

- a) Comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
- b) Asociativitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- c) Elementul neutru: $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 1 este element neutru față de înmulțire.)
- d) $a \cdot 0 = 0, \forall a \in \mathbb{N}$.
- e) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- f) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:
 $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, b > c$.

1.4. Împărțirea

deîmpărțit : împărțitor = cât

$$a : b = c, \forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

$$\text{Proba împărțirii: } a = b \cdot c.$$

$$\text{Observație: } 0 : b = 0, \forall b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale a și b , $b \neq 0$, numite **deîmpărțit** și, respectiv, **împărțitor**, există două numere naturale q și r , numite **cât** și, respectiv, **rest**, astfel încât

$$a = b \cdot q + r, r < b.$$

Numerele q și r , determinate în aceste condiții, sunt *unice*.

2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

Pentru orice două numere naturale a și b există una și numai una dintre următoarele relații:

	$a < b$	a mai mic decât b
sau	$a = b$	a egal cu b
sau	$a > b$	a mai mare decât b

Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ avem următoarele relații:

- $a \leq b$ dacă și numai dacă $a < b$ și $a = b$;
- $a \geq b$ dacă și numai dacă $a > b$ și $a = b$.

Egalitatea și inegalitatea numerelor naturale au proprietatea de *tranzitivitate*:

- Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \geq b$ și $b \geq c$, atunci $a \geq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Relațiile $<, \leq, >, \geq$ sunt *relații de ordine* și *ordonează numerele naturale*.

3. Factor comun

Pentru orice numere naturale a, b și c avem:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \text{ și}$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c), \text{ cu } b > c.$$

4. Puterea unui număr natural

Definiții:

◆ Se numește **puterea a n -a a numărului natural a** numărului a^n dat prin $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ori}}, n \geq 2, a, n \in \mathbb{N}$,

unde: a – se numește **baza puterii**;

n – se numește **exponentul puterii**.

◆ Operația matematică prin care se obține puterea unui număr se numește **ridicare la putere**.

4.1. Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice $a \in \mathbb{N}$ și orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem:

1. $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{N}^*$;

2. $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{N}^*$;

3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall a \in \mathbb{N}^*$;

4. $a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a \in \mathbb{N}^*, m \geq n$;

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall a \in \mathbb{N}^*$;

6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$;

7. $(a : b)^n = a^n : b^n, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$;

8. $a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \forall a \in \mathbb{N}^*$.

Observație: 0^0 nu se poate efectua.

Definiție: Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și **pătratul** acelui număr.

4.2. Compararea puterilor

◆ Dintre două puteri care au aceeași bază, este mai mare puterea care are exponentul mai mare.

$$a^n > a^m \Leftrightarrow n > m, \forall a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

◆ Două puteri care au aceeași bază sunt egale dacă au exponenți egali.

$$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m, \forall a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

◆ Dintre două puteri cu baze diferite, dar având același exponent (diferit de zero), este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b, \forall a, b \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Dacă într-o expresie există paranteze rotunde, drepte și acolade, începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde. După efectuarea acestor calcule, parantezele drepte le transformăm în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze drepte și continuăm efectuarea calculelor din noile paranteze rotunde.

În funcție de ordinea în care se execută, celor cinci operații matematice cunoscute pentru numerele naturale – adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere – li s-a alocat un **ordin**.

Operații	Ordin
Adunarea și scăderea	I
Înmulțirea și împărțirea	II
Ridicarea la putere	III

Dacă un exercițiu conține operații de ordine diferite, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și, în final, cele de ordinul I.

6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10)

$$\overline{ab} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$$

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$$

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$$

unde a, b, c, d sunt cifre, $a \neq 0$.

Observație: Orice număr natural se poate descompune după modelul de mai sus.

7. Divizibilitatea

7.1. Noțiuni generale

Definiție: Un număr natural a este **divizibil** cu b , dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul a se numește **multiplu** de b , iar b se numește **divizor** al lui a .

Notatie:	Se citește:
$a : b$	a se divide cu b
sau	
$b \mid a$	b îl divide pe a

Proprietățile divizibilității:

1. Reflexivitatea: $a : a, \forall a \in \mathbb{N}$.
2. Antisimetria: dacă $a : b$ și $b : a$, atunci $a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
3. Tranzitivitatea: dacă $a : b$ și $b : c$, atunci $a : c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
4. $a : 1, \forall a \in \mathbb{N}$.
5. $0 : a, \forall a \in \mathbb{N}$.
6. Dacă $a : b$ și $c : b$, atunci $(a \pm c) : b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
7. Dacă $a : b$, atunci $(a \cdot c) : b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
8. Dacă $a : b$ și $a : c$, atunci $a : (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

7.2. Criterii de divizibilitate

✧ Un număr natural este divizibil cu 2, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este o cifră pară: 0, 2, 4, 6 și 8.

✧ Un număr natural este divizibil cu 5, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.

✧ Un număr natural este divizibil cu 10, dacă și numai dacă ultima cifră este 0.

✧ Un număr natural este divizibil cu 3 (sau 9), dacă și numai dacă suma cifrelor numărului este multiplu de 3 (sau 9).

7.3. Numere prime și numere compuse

Definiții:

◆ Spunem că un număr este **prim** dacă are ca divizori pe 1 și pe el însuși.

◆ Un număr care are mai mult de doi divizori se numește **număr compus**.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Definiție: Spunem că d este **cel mai mare divizor comun** a două numere naturale a și b dacă:

a) $d \mid a$;

b) $d \mid b$;

c) orice alt divizor comun d' al acelor numere este divizor și pentru d .

Notatie: $d = \text{c.m.m.d.c.}(a, b) \stackrel{\text{not}}{=} (a, b)$.

Observație: C.m.m.d.c. se află astfel:

I. Se descompun numerele a și b în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mici.

Exemplu: Calculăm (300, 225).

$$\text{I. } \begin{array}{r|l} 300 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 225 & 5^2 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \end{array}$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$\text{II. } (300, 225) = 5^2 \cdot 3 = 75.$$

Definiție: Două numere se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

Definiție: Spunem că m este **cel mai mic multiplu comun** a două numere naturale a și b dacă:

a) $a \mid m$;

b) $b \mid m$;

c) orice alt multiplu comun nenul m' al acelor numere este multiplu al lui m .

Notatie: $m = \text{c.m.m.m.c.}(a, b) = [a, b]$.

Observație: C.m.m.m.c se află astfel:

I. Se descompun numerele a și b în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni și necomuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mari.

Exemplu: Calculăm [320, 165].

$$\text{I. } \begin{array}{r|l} 320 & 2 \cdot 5 \\ 32 & 2^5 \\ 1 & \end{array}$$

$$320 = 2^6 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 165 & 11 \\ 15 & 3 \cdot 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\text{II. } [320, 165] = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 10\,560.$$

Cuprins

Prefață	3
----------------------	----------

ALGEBRĂ

I. Mulțimea numerelor naturale	5
1. Operații cu numere naturale	5
2. Compararea și ordonarea numerelor naturale	7
3. Factor comun	7
4. Puterea unui număr natural	8
5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	9
6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10) ...	10
7. Divizibilitatea	10
II. Propoziții și mulțimi	13
1. Propoziții	13
2. Mulțimi	14
III. Mulțimea numerelor întregi	16
1. Noțiuni generale	16
2. Operații cu numere întregi	17
IV. Mulțimea numerelor raționale	19
1. Noțiuni generale. Frații	19
2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor	20
3. Aducerea fracțiilor la același numitor	20
4. Opusul unei fracții	21
5. Operații cu fracții	21
6. Frații ordinare și fracții zecimale	23
V. Mulțimea numerelor reale	25
1. Noțiuni generale	25
2. Radicali	25
3. Intervale de numere reale	26

4. Rapoarte, procente și proporții	27
5. Medii	30
6. Mărimi proporționale	31
7. Calcul algebric	34
VI. Ecuații	37
1. Ecuația de gradul întâi cu o necunoscută	37
2. Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută	37
VII. Inecuația de gradul întâi cu o necunoscută	39
1. Noțiuni generale	39
2. Rezolvarea inecuațiilor	39
VIII. Ecuații și sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute	40
1. Ecuații de gradul întâi cu două necunoscute	40
2. Sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute	40
IX. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor	44
X. Funcții	45
1. Noțiuni generale	45
2. Funcția liniară	45

GEOMETRIE

I. Unghiul	51
1. Noțiuni generale	51
2. Clasificarea unghiurilor	52
II. Triunghiul	56
1. Noțiuni generale	56
2. Construcția triunghiurilor	56
3. Clasificarea triunghiurilor	58
4. Linii importante în triunghi	59

5. Proprietăți ale triunghiurilor	61
6. Congruența și asemănarea triunghiurilor	65
7. Rezultate importante în asemănarea triunghiurilor ...	69
8. Teoreme importante în triunghiuri oarecare	70
9. Teoreme importante în triunghiuri dreptunghice ..	73
10. Rapoarte constante în triunghiurile dreptunghice (elemente de trigonometrie)	75
11. Valori particulare ale funcțiilor trigonometrice	76
12. Formule pentru aria triunghiului	76
III. Patrulaterare	79
1. Noțiuni generale	79
2. Paralelogramul	79
3. Trapezul	83
4. Perimetrul și aria patrulaterelor studiate	84
IV. Linia mijlocie în triunghi și trapez	86
V. Cercul	88
1. Noțiuni generale	88
2. Poziții relative ale unei drepte față de un cerc	89
3. Poziții relative a două cercuri	90
4. Unghiuri construite relativ la cerc	92
5. Teoreme referitoare la arce și coarde	95
6. Figuri geometrice înscrise în cerc	96
7. Poligoane regulate	98
8. Lungimi și arii întâlnite în cerc	99
VI. Unghiul a două drepte în plan și spațiu	101
VII. Perpendicularitate în plan și spațiu	104
1. Noțiuni generale	104
2. Teoreme relative la perpendicularitate	104

3. Proiecții de puncte, segmente și drepte	105
4. Unghi diedru; unghi plan diedru	108
5. Teorema celor trei perpendiculare	109
VIII. Prisma	111
1. Noțiuni generale	111
2. Prisma dreaptă	111
IX. Piramida	114
1. Noțiuni generale	114
2. Piramida regulată	114
X. Trunchiul de piramidă regulată	117
1. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată ...	117
2. Cazuri particulare de trunchiuri	118
XI. Ariile și volumele corpurilor rotunde	120
1. Cilindrul circular drept	120
2. Conul circular drept	120
3. Trunchiul de con circular drept	121
4. Sfera	121
XII. Unități de măsură	122
1. Unități de măsură pentru lungime	122
2. Unități de măsură pentru arie	122
3. Unități de măsură pentru volum	123
4. Unități de măsură pentru masă	124
5. Unități de măsură pentru timp	124

Lucrarea este un auxiliar didactic util și eficient, atât pentru elevi, cât și pentru profesori, pentru activitatea curentă desfășurată acasă sau în clasă, dar și pentru examene și concursuri, reușind să acopere în totalitate, într-o formă sintetică, conținuturile programei școlare de matematică din curriculum nucleu și curriculum aprofundat pentru gimnaziu.

Toată materia învățată în gimnaziu este organizată în două părți, corespunzătoare celor două ramuri ale studiului matematicii în clasele V-VIII — algebră și geometrie. Se realizează o trecere în revistă a tuturor noțiunilor de matematică incluse în programa școlară, acestea fiind structurate pe capitole, conform materiei studiate, astfel încât elevul să se poată orienta ușor și, totodată, să aibă la dispoziție tot arsenalul teoretic necesar, însoțit de exemplificări prin câteva exerciții.

ISBN: 978-973-135-428-6

